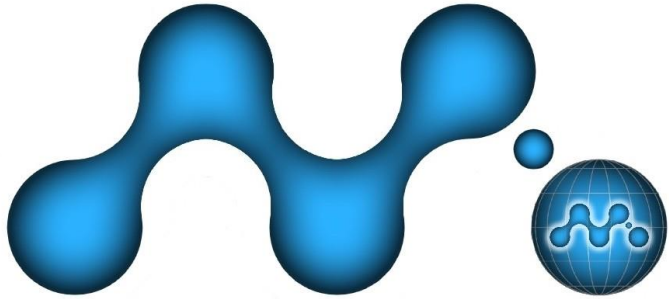
INTERNATIONAL SCIENTIFIC-PRACTICAL CONFERENCE

MODERN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS



18–20 May 2017
Ufa

Part 2

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF THE RUSSIAN FEDERATION

THE FEDERAL STATE BUDGETARY EDUCATIONAL ESTABLISHMENT OF HIGHER EDUCATION «BASHKIR STATE UNIVERSITY»

STERLITAMAK BRANCH
OF THE FEDERAL STATE BUDGETARY EDUCATIONAL ESTABLISHMENT OF HIGHER EDUCATION «BASHKIR STATE UNIVERSITY»

MODERN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

Papers of the International scientific-practical conference

Part II

18–20 May 2017
Ufa

Ufa
2017

UDK 519.85
BBK 22.186
C 56

ISBN 978-5-86111-586-5

The conference was funded by RFBR according to the research project № 17-01-20035

Reviewers:
chair of mathematical modeling (Sterlitamak branch of the Bashkir state university); professor E.A. Muraviova (Branch of the Ufa state petrol technical university in Sterlitamak); professor E.R. Gizzatova (Sterlitamak branch of the Bashkir state university); chair of natural scientific and professional disciplines (Branch of the Ufa state petrol technical university in Sterlitamak)

Chief editor – professor S.A. Mustafina (Sterlitamak branch of the Bashkir state university)

Editorial Board:
A.M. Akhtyamov, professor; M.B. Belyaeva, associate professor; S.V. Viktorov, associate professor; E.R. Gizzatova, professor; I.V. Grigoryev, assistant; L.M. Kozhevnikova, professor; T.A. Mikhailova, senior lecturer; A.R. Naphikova, associate professor; K.B. Sabitov, professor; Yu.K. Sabitova, associate professor; I.G. Husainov, professor; S.I. Spivak, professor

C 56 **MODERN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS**: Papers of the International scientific-practical conference, 18–20 May 2017, Ufa. – Part II / Chief editor S.A. Mustafina. – Sterlitamak: Sterlitamak branch of the Bashkir state university, 2017. – 440 p. – ISBN 978-5-86111-586-5

The collection of materials contains the papers of the participants of the International scientific-practical conference «Modern mathematics and its applications», 18–20 May 2017, Bashkir state university. The materials characterize a modern state and topical problems of mathematic and its applications.

The collection of papers is recommended for teachers, post-graduates, students of natural sciences, physics and mathematics.

ISBN 978-5-86111-586-5

© Collective of authors, 2017
© Bashkir state university, 2017
© Sterlitamak branch of the Bashkir state university, 2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СТЕРЛИТАМАКСКИЙ ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы
Международной научно-практической конференции

Часть II

18–20 мая 2017 г.
г. Уфа

Уфа
2017

УДК 519.85
ББК 22.186
С 56

ISBN 978-5-86111-586-5

Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Проект № 17-01-20035

Рецензенты:
кафедра математического моделирования (Стерлитамакский филиал БашГУ); доктор технических наук, профессор Е.А. Муравьева (филиал Уфимского государственного нефтяного технического университета в г. Стерлитамаке); доктор физико-математических наук, профессор Э.Р. Гиззатова (Стерлитамакский филиал БашГУ); кафедра естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин (филиал Уфимского государственного авиационного технического университета в г. Стерлитамаке)

Ответственный редактор – доктор физико-математических наук, профессор С.А. Мустафина (Стерлитамакский филиал БашГУ)

Редакционная коллегия:
д.ф.-м.н., проф. А.М. Ахтямов; к.ф.-м.н., доц. М.Б. Беляева; к.ф.-м.н., доц. С.В. Викторов; д.ф.-м.н., проф. Э.Р. Гиззатова; асс. И.В. Григорьев; д.ф.-м.н., проф. Л.М. Кожевникова; к.ф.-м.н., ст. преп. Т.А. Михайлова; к.ф.-м.н., доц. А.Р. Нафикова; д.ф.-м.н., проф., чл.-корр. АН РБ К.Б. Сабитов; к.ф.-м.н., доц. Ю.К. Сабитова, д.ф.-м.н., проф. С.И. Спивак

С 56 **СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**: Материалы Междунар. науч.-практ. конф., 18–20 мая 2017 г., г. Уфа. – Часть II / Отв. ред. С.А. Мустафина. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2017. – 440 с. – ISBN 978-5-86111-586-5

В сборнике публикуются труды участников Международной научно-практической конференции «Современная математика и ее приложения», состоявшейся 18–20 мая 2017 г. в Башкирском государственном университете. Представленные материалы характеризуют современное состояние и актуальные проблемы математики и ее приложений.

Сборник адресован преподавателям, аспирантам и студентам, обучающимся на естественно-научных и физико-математических направлениях.

ISBN 978-5-86111-586-5

© Коллектив авторов, 2017
© Башкирский государственный университет, 2017
© Стерлитамакский филиал БашГУ, 2017

УДК 519.6

Какушкин С.Н., Кадченко С.И.

НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

В работе описывается новая методика нахождения собственных значений и собственных функций возмущенных самосопряженных операторов, заданных на геометрических графах.

Ключевые слова: собственные значения, собственные функции, дискретные операторы, геометрический граф, метод Галеркина.

Kakushkin S.N., Kadchenko S.I.

FINDING THE EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS OF PERTURBED SELF-ADJOINT OPERATORS ON A GEOMETRIC GRAPH

The paper describes a new method of finding the eigenvalues and eigenfunctions of perturbed self-adjoint operators defined on geometric graphs.

Keywords: eigenvalues, eigenfunctions, discrete operators, geometric graph, Galerkin's method.

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$ – конечный связанный ориентированный компактный граф. Здесь $\mathbf{V} = \{V_i\}_{i=1}^{i_0}$ – множество вершин, $\mathbf{E} = \{E_j\}_{j=1}^{j_0}$ – множество ребер. Предположим, что каждое ребро E_j имеет длину $l_j > 0$ и площадь поперечного сечения $d_j > 0$. На ребрах **E** графа **G** рассмотрим оператор

$$T + P = \left(T_1 + P_1, T_2 + P_2, \ldots, T_{j_0} + P_{j_0}\right)$$

действующий в гильбертовом пространстве

$$L_2(\mathbf{G}) = \left\{\mathbf{g} = \left(g_1, g_2, \ldots, g_{j_0}\right),\ g_j \in L_2\left(0, l_j\right),\ j = \overline{1, j_0}\right\}$$

со скалярным произведением

$$(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx_j, \quad g, h \in L_2(G).$$

© Какушкин С.Н., Кадченко С.И., 2017

Здесь T_j – дискретные полуограниченные операторы, а P_j – ограниченные операторы, заданные в $L_2(0,l_j)$, $j=\overline{1,j_0}$. Рассмотрим краевую задачу:

$$\left(T_j+P_j\right)u_j=\mu u_j,\ u_j=u_j(x_j),\ x_j\in\left(0,l_j\right),\ j=\overline{1,j_0}, \tag{1}$$

$$\sum_{E_k\in E^{\alpha}(V_s)} d_k\left.\frac{du_k}{dx_k}\right|_{x_k=0} - \sum_{E_m\in E^{\omega}(V_s)} d_m\left.\frac{du_m}{dx_m}\right|_{x_m=l_m}=0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &u_i(0)=u_k(0)=u_m(l_m)=u_h(l_h),\\ &E_i,E_k\in E^{\alpha}(V_s),\quad E_m,E_h\in E^{\omega}(V_s),\quad \forall s\in N. \end{aligned} \tag{3}$$

Через $E^{\alpha}(V_s)$ обозначено множество дуг с началом в вершине V_s, а через $E^{\omega}(V_s)$ – с концом в той же вершине. Условия (2) означают, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а (3) – что решение $\mathbf{u}=\left(u_1,u_2,\ldots,u_{j_0}\right)$ в каждой вершине должно быть непрерывным.

Рассмотрим краевую задачу:

$$T_jv_j=\lambda v_j,\ v_j=v_j(x_j),\ x_j\in\left(0,l_j\right),\ j=\overline{1,j_0}, \tag{4}$$

$$\sum_{E_k\in E^{\alpha}(V_s)} d_k\left.\frac{dv_k}{dx_k}\right|_{x_k=0} - \sum_{E_m\in E^{\omega}(V_s)} d_m\left.\frac{dv_m}{dx_m}\right|_{x_m=l_m}=0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &v_i(0)=v_k(0)=v_m(l_m)=v_h(l_h),\\ &E_i,E_k\in E^{\alpha}(V_s),\quad E_m,E_h\in E^{\omega}(V_s),\quad \forall s\in N. \end{aligned} \tag{6}$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – собственные значения задачи (4)–(6), занумерованные в порядке неубывания их величин, а через $\left\{\mathbf{v}_k=\left(v_{1k},v_{2k},\ldots,v_{j_0k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ – собственные вектор-функции, соответствующие этим собственным значениям λ_k.

Приближенное решение задачи (1)-(3) будем искать в виде

$$\mathbf{u}(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k\mathbf{v}_k, \tag{7}$$

где вектор-функции $\mathbf{v}_k = \left(v_{1k}, v_{2k}, \ldots, v_{j_0 k}\right)$ образуют счетный базис в пространстве $L_2(\mathbf{G})$ с энергетической нормой $\left\|\mathbf{v}_k\right\|_{T+P}$, индуцированной энергетическим скалярным произведением:

$$\left(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_m\right)_{T+P} = \left((T+P)\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_m\right) = \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{l_j} \left(T_j + P_j\right) v_{jk} v_{jm} dx_j.$$

Коэффициенты a_k являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k \left[\left(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_m\right)_{T+P} - \mu\left(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_m\right)\right] = 0, \; m = \overline{1,n}; \\ \sum_{l=1}^{n} \left[a_l\right]^2 = 1. \end{cases}$$

Пространство $L_2(\mathbf{G})$ с энергетической нормой $\left\|\mathbf{v}_k\right\|_{T+P}$ обозначим H_{T+P}.

Теорема 1. Если $T+P$ – полуограниченный снизу оператор, действующий в пространстве $L_2(\mathbf{G})$, то решения задачи (4)–(6) образуют базис в энергетическом пространстве H_{T+P}.

В работах авторов были получены линейные формулы нахождения собственных значений возмущенных дискретных операторов (см., напр., [1]–[4]). Аналогично этим работам, можно доказать теорему.

Теорема 2. Если $T = \left(T_1, T_2, \ldots, T_{j_0}\right)$ – дискретный полуограниченный снизу оператор, а $P = \left(P_1, P_2, \ldots, P_{j_0}\right)$ – ограниченный оператор, действующие в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbf{G})$, и система вектор-функций $\left\{\mathbf{v}_k = \left(v_{1k}, v_{2k}, \ldots, v_{j_0 k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L_2(\mathbf{G})$, то собственные значения μ_m оператора $T+P$ можно найти по формулам:

$$\mu_m = \lambda_m + \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{l_j} P_j v_{jm} v_{jm} dx_j + \delta(m). \qquad (8)$$

Здесь $\delta(m)=\sum_{k=1}^{m-1}\left[\hat{\mu}_k(m-1)-\hat{\mu}_k(m)\right]$, а $\hat{\mu}_k(m)$ - m-ые приближения по Галеркину k-ого собственного значения.

Многочисленные вычислительные эксперименты показали высокую точность и эффективность нахождения собственных значений и собственных вектор-функций задачи (1)–(3) используя формулы (7) и (8).

Библиографический список

1. Кадченко С.И., Какушкин С.Н. Численные методы регуляризованных следов спектрального анализа: Монография. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – 206 с.
2. Кадченко С.И., Какушкин С.Н. Метод регуляризованных следов // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы. – 2013. – С. 47–54.
3. Кадченко С.И., Какушкин С.Н. Нахождение значений сумм функциональных рядов Релея – Шредингера возмущенных самосопряженных операторов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2016. – Т. 9, № 3. – С. 137–143.
4. Какушкин С.Н. Развитие численных методов для математического моделирования нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов: дис. ... кандидата физико-математических наук: 05.13.18; [Место защиты: Южно-Уральский государственный университет]. – Магнитогорск, 2013.

Сведения об авторах

Какушкин Сергей Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент каф. прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова». E-mail: kakushkin-sergei@mail.ru.

Кадченко Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, зав. каф. прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова». E-mail: sikadchenko@mail.ru.

УДК 517.957

Калиев И.А., Сабитова Г.С.

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ СОРБЦИИ

Доказана глобальная однозначная разрешимость второй начально-краевой задачи, моделирующей процесс неравновесной сорбции.

Система уравнений неравновесной сорбции, вторая краевая задача, глобальная однозначная разрешимость.

Kaliev I.A., Sabitova G.S.

THE SECOND BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF EQUATIONS OF NONEQUILIBRIUM SORPTION

A global unique solvability of the second initial-boundary value problem modeling the non-equilibrium sorption process is proved.

The system of non-equilibrium sorption equations, the second boundary value problem, the global single-valued solvability.

Введение. Практически все жидкости, встречающиеся в природе, представляют собой растворы, т.е. смеси двух или более веществ (компонентов). Фильтрация в пористых средах жидкостей и газов, содержащих ассоциированные с ними (растворенные, взвешенные) твердые вещества, сопровождается диффузией этих веществ и массообменом между жидкой (газовой) и твердой фазами. Наиболее распространенными видами массообмена являются сорбция и десорбция, ионный обмен, растворение и кристаллизация, кольматация, сульфатация и суффозия, парафинизация. С учетом особенностей физико-химического взаимодействия растворов с породами пласта рассматриваются задачи равновесной и неравновесной сорбции.

Постановка задачи. Пусть $m(x, t)$ – пористость среды, $0 < m(x, t) \le 1$; поровое пространство заполнено раствором и твердой фазой, выпавшей в осадок из раствора; $c(x, t)$ – массовая концентрация вещества в жидкой фазе (на единицу объема раствора); $s(x, t)$ – массовая концентрация твердой фазы, выпавшей в осадок (на единицу объема пор).

В равновесных условиях, когда контакт между раствором и твердой фазой поддерживается достаточно длительное время, соот-

© Калиев И.А., Сабитова Г.С., 2017

ношение между концентрациями $c(x, t)$ в растворе и на сорбенте $s(x, t)$ определяется изотермой сорбции. При малых концентрациях раствора, величина абсорбции определяется линейной зависимостью – изотермой Генри $s = \Gamma c$, где $\Gamma > 0$ – некоторая постоянная величина, зависящая от физико-химических свойств среды (постоянная Генри).

Уравнения равновесной сорбции не всегда могут полностью характеризовать особенности поглощения и обмена веществ в двухфазной системе раствор – твердая фаза. В работах [1–3] были предложены математические модели для описания процессов неравновесной сорбции. При этом концентрация s твердой фазы связывается с концентрацией c в жидкой фазе уравнением

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\tau}(\Gamma c - s), \tag{1}$$

где положительная постоянная τ – характерное время релаксации, Γ – постоянная Генри. Концентрация c вещества в растворе удовлетворяет уравнению

$$m\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c - \nu \cdot \nabla c - \frac{\partial s}{\partial t}, \tag{2}$$

где $D(x, t) > 0$ – коэффициент диффузии, $\nu(x, t)$ – вектор скорости фильтрации, которые считаются известными функциями указанных аргументов.

В [4] доказана глобальная однозначная разрешимость первой начально-краевой задачи для системы (1)–(2). В [5–6] сформулирована разностная аппроксимация дифференциальной задачи по неявной схеме, построено решение разностной задачи с помощью метода прогонки, приведены результаты численных экспериментов.

В настоящей работе рассматривается вторая краевая задача для системы уравнений (1)–(2), описывающей процесс неравновесной сорбции.

Пусть Ω – ограниченная область n-мерного пространства R^n с достаточно гладкой границей $S = \partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$; $S_T = S \times (0, T)$ – боковая поверхность цилиндра Q_T. Требуется

найти функции $c(x,t)$, $s(x,t)$, определенные в области Q_T, удовлетворяющие в Q_T, уравнениям (1), (2), начальным условиям

$$c(x,\ 0) = c_0(x), \tag{3}$$

$$s(x,\ 0) = s_0(x), \tag{4}$$

и второму краевому условию

$$\frac{\partial c(x,\ t)}{\partial n} = 0,\ (x,\ t) \in S_T, \tag{5}$$

где n – внешняя нормаль к $S = \partial\Omega$.

Основным результатом статьи является следующая

Теорема. Пусть коэффициенты m, D, v уравнения (2) принадлежат пространствам Гельдера $C^{\alpha,\alpha/2}\left(\overline{Q}_T\right)$, $0 < \alpha < 1$; граница области S является $C^{2+\alpha}$ - гладкой, функции $c_0(x)$, $s_0(x)$ принадлежат соответственно пространствам $C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right), C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ и выполнены условия $0 \le c_0(x) \le M$, $0 \le s_0(x) \le \Gamma M$, $x \in \Omega$. Тогда задача (1)-(5) имеет единственное классическое решение $c(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{Q}_T\right)$, $s(x,t) \in C^{\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{Q}_T\right)$ и справедливы оценки $0 \le c(x,t) \le M$, $0 \le s(x,t) \le \Gamma M$, $(x,t) \in Q_T$.

Библиографический список

1. Lapidus L., Amundson W.R. Mathematics of adsorption in beds. VI. The effect of longitudinal diffusion in ion exchange and chromatographic columns // J. Phys. Chem. – 1952. – V. 56. – P. 984–988.
2. Coats K.H., Smith B.D. Dead and pore volume and dispersion in porous media // Soc. Petrol. Eng. J. – 1964. – V. 4, № 1. – P. 73–84.
3. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР / Под ред. П.Я. Полубариновой-Кочиной. – М.: Наука, 1969. – 546 с.
4. Калиев И.А., Сабитова Г.С. Об одной задаче неравновесной сорбции // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2003. – Т. VI. – № 1 (13). – С. 35–39.

5. Калиев И.А., Мухамбетжанов С.Т., Сабитова Г.С. Численное моделирование процесса неравновесной сорбции // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8. – № 2. – С. 39–43.

6. Kaliev I.A., Mukhambetzhanov S.T., Sabitova G.S. Mathematical Modeling of Non-Equilibrium Sorption // Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS). – 2016. – V. 99, № 12. – P. 1803–1810.

Сведения об авторах

Калиев Ибрагим Адиетович, доктор физико-математических наук, профессор СФ БашГУ. E-mail: kalievia@mail.ru.

Сабитова Гульнара Сагындыковна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: sabitovags@mail.ru.

УДК 657.47

Кильдибаева Р.В., Карамова А.И.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА СЕБЕСТОИМОСТИ ПРОДУКЦИИ

В работе рассмотрены теоретические аспекты данной темы, осуществлен практический расчет и анализ себестоимости продукции коммерческой организации.

Ключевые слова: себестоимость, методы расчета.

Kildibaeva R.V., Karamova A.I.

METHODOLOGY OF CALCULATION OF COST OF PRODUCTION

Theoretical aspects of this topic are considered in the work, practical calculation and analysis of the cost of production of a commercial organization.

Key words: cost.

Всем известно, что покупателя интересует качество продукции и ее цена. Чем выше качество и ниже цена, тем лучше и выгоднее для покупателя. Эти показатели как раз и заключены в себестоимости продукции.

Себестоимость является основой при определении цен на продукцию. Систематическое снижение себестоимости промышленной продукции - одно из основных условий повышения эффективности промышленного производства. Она оказывает непосредственное влияние на величину прибыли, уровень рентабельности. Поэтому форми-

© Кильдибаева Р.В., Карамова А.И., 2017

рование издержек производства и обращения, их учет, имеют важное значение для предпринимательской деятельности.

Себестоимость продукции проявляет в денежной форме индивидуальные издержки предприятия на реализацию единицы или объема продукции в действующих экономических условиях и на производство. Себестоимость можно определить по всей продукции, по отдельным ее видам, деталям, узлам, производственным процессам, по работе подразделений, участков, цехов.

Себестоимость продукции характеризуется показателями, выражающими:

– весь объем затрат на всю производственную продукцию и сделанных работы предприятия за плановый (отчетный) период – себестоимость товарной продукции, сравнимой товарной продукции, реализованной продукции;

– затраты на единицу объемы сделанных работ – себестоимость единицы отдельных видов товарной продукции, производственных услуг и полуфабрикатов, затраты на 1 руб. товарной продукции.

Классификация методов расчета себестоимости.

1. Попроцессный метод. Применяется на предприятиях, которые работают в непрерывном режиме. Классический вариант попроцессного метода применяется в отраслях с массовым типом производства, который характеризуется:

1) непродолжительным производственным циклом;

2) наличием единой характеристики для всей продукции;

3) ограниченной номенклатурой продукции;

4) полным отсутствием либо незначительными объемами полуфабрикатов и незавершенного производства.

2. Попередельный метод. Данный метод применяется в отраслях и на предприятиях, где продукция в ходе технологического цикла последовательно проходит несколько стадий.

Передел – это содержательно и пространственно обособленная совокупность технологических операций, составляющая часть полного технологического процесса изготовления конечной продукции.

Особенностями массового типа производства являются небольшая номенклатура изделий, которые выпускаются в больших количествах, узкая специализация рабочих мест, высокий уровень оборудования и автоматизации. Разновидность массового типа производств – поточное производство (целлюлозно-бумажная, прядильная, металлургическая, химическая и нефтехимическая промышленность).

3. Позаказный метод. Данный метод калькулирования себестоимости применяется на предприятиях с единичным или серийным типом производства, где выпускается уникальная продукция по специальным заказам. Он применяется в крупнейших судо-, авиа-, машиностроительных концернах, в малом бизнесе – при производстве мебели, визитных карточек, при предоставлении аудиторских услуг.

Сущность позаказного метода учета затрат и исчисления себестоимости состоит в отнесении прямых расходов в разрезе заранее установленных статей калькуляции на отдельные заказы и распределении косвенных расходов по заказам в соответствии с установленными ставками распределения. Объект учета затрат и калькулирования – отдельный заказ.

4. Партионный (пооперационный) метод. Разновидностью позаказного метода является партионное (пооперационное) калькулирование.

Партионная калькуляция применяется там, где отдельные единицы выпуска, оформленные как заказы, в процессе своего изготовления проходят несколько стадий производства (операций), причем для каждой единицы набор стадий может быть индивидуальным, а часть операций – общей для всех изделий.

Примером такого производства является изготовление мебели на заказ. Предприятие изготавливает стандартные модули – тумбочки, шкафы, полки, которые в соответствии с пожеланиями клиента подвергаются различным видам обработки, оснащаются различными фасадами, фурнитурой и аксессуарами. Таким образом, цена заказа определяется как сумма стоимостей отдельных модулей и затрат, которые предприятие понесло на всех операциях в соответствии со спецификацией.

5. Учет затрат по функциям. Данную систему учета затрат применяют организации, которые выпускают большой ассортимент продукции разными партиями. Суть метода заключается в соотношении затрат с определенными функциями, которые осуществляются в интересах производства и реализации того или иного вида продукции.

Калькулирование – это система расчетов, с помощью которых определяется себестоимость всей проданной продукции и её частей, себестоимость конкретных видов изделий, сумма затрат отдельных подразделений предприятия на продажу продукции и производство. Процесс калькулирования себестоимости продукции включает разграничение затрат на производство между законченной продукцией и не законченным производством; распределение затрат между видами

продукции; оценку отходов производства и побочной продукции; считывание затрат на забракованную продукцию; определение суммы расходов, относящихся к готовым изделиям; расчет себестоимости единицы продукции.

В зависимости от назначения различают плановую, сметную, нормативную, проектную, отчетную и хозрасчетную калькуляции.

Рассмотрим вычислительный эксперимент по оценке трудоемкости и составлению сметы затрат.

Для точного определения стоимости составляется таблица с перечнем работы и их трудоемкости, распределенных между научными сотрудниками. В таблице 1 приведено распределение работ по этапам, видам и должностям, между инженером и студентом.

Таблица 1.

Трудоемкость работ по разработке проекта

Наименование работ	Трудоемкость, чел/дни	
	Преподаватель	Студент
Разработка технического задания	1	1
Разработка методов решения задачи	5	7
Изучение литературы	-	5
Разработка структуры решения задачи	1	3
Составление технической документации	1	8
Сдача проекта	2	2
Итого	10	26

На основе трудоемкости выполнения работ рассчитывается смета затрат проекта. Себестоимость разработки будет определяться по фактическим затратам. Расчет себестоимости осуществляется по статьям, представленным в таблице 2.

Таблица 2.

Статьи затрат

№	Наименование статьи
1	Расходы на оплату труда
2	Отчисления на социальные нужды
3	Затраты по работам, выполняемые сторонними организациями
4	Расходы на содержание и эксплуатацию оборудования
5	Амортизационные отчисления
6	Накладные расходы

Расчет на оплату труда:

Исходные данные:

Трудоемкость выполнения работ для инженера – 10 чел/дней.

Трудоемкость выполнения работ для студента – 26 чел/дней.

Заработная плата преподавателя – 20 000 рублей.

Заработная плата студента – 1 500 рублей.

Среднее количество рабочих дней в месяце – 21 день.

Норматив дополнительной заработной платы – 14 %.

Норматив отчислений на страховые взносы – 30 %.

Расходы на основную заработную плату исполнителей:

$$З_{Осн.Зарп.} = \frac{Т_{исп.} \cdot З_{исп.}}{21}$$

Основная заработная плата преподавателя:

$$З_{Осн.Зарп.} = \frac{10 \cdot 20000}{21} = 9523{,}8.$$

Основная заработная плата студента:

$$З_{Осн.Зарп.} = \frac{26 \cdot 1500}{21} = 1857{,}14.$$

Калькуляция расходов по заработной плате см. в таблице 3.

Таблица 3.

Смета затрат на заработные платы

Основная заработная плата преподавателя	9 523.8
Основная заработная плата студента	1 857.14
Итого	11 380,94

Себестоимость продукции представляет выраженные в денежной форме текущие затраты на производство и реализацию продукции (работ, услуг), актуальной задачей моделирования является автоматизация методов расчета и внедрение их в существующие прикладные решения. Существующие программные средства обладают богатым инструментарием для расчета себестоимости различными методами, но зачастую на практике приходится учитывать ряд локальных факторов, поэтому умение самостоятельно проводить подобные расчеты и вносить коррективы в существующие алгоритмы остается важной задачей.

Библиографический список

1. Лермонтов Ю.М. Материальные расходы в налоговом учете // Все о налогах. – 2013. – № 8. – С. 13–21.

2. Пипко В.А. Учет производства и калькулирования себестоимости продукции в условиях агробизнеса: Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2012. – 207 с.

Сведения об авторах

Кильдибаева Регина Вадимовна, студентка 3 курса, факультет математики и информационных технологий, СФ БашГУ. E-mail: regkildibaeva@mail.ru.

Карамова Альбина Ильгизовна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: alb_bai@rambler.ru.

УДК 517.956.25

Кожевникова Л.М., Камалетдинов А.Ш.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

В работе рассматривается некоторый класс анизотропных эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида с переменными нелинейностями. Изучаются условия разрешимости задачи Дирихле в неограниченных областях $\Omega \in \mathbb{R}_n, n > 2$. Доказано существование решений без ограничений на рост входных данных при $|x| \to \infty$.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое уравнение, существование решения, переменные показатели, задача Дирихле, псевдомонотонный оператор.

Kozhevnikova L.M., Kamaletdinov A.SH.

EXISTENCE OF SOLUTIONS OF ANISOTROPIC ELLIPTIC EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY IN UNBOUNDED DOMAINS

We consider a class of anisotropic elliptic differential equations of second order with divergent form and variable non-linearities. We obtain solvability conditions for the Dirichlet problem in unbounded domains $\Omega \in \mathbb{R}_n$, $n > 2$. The proof of existence of solutions is free of restrictions on growth of data for $|x| \to \infty$.

Key words: anisotropic elliptic equation, existence solution, variable exponent, Dirichlet problem, pseudomonotone operator.

Пусть Ω – произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 2$. Для анизотропных квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(x, u, \nabla u))_{x_i} - a_0(x, u, \nabla u) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что функции $a_i(x, s_0, s_1, \dots, s_0)$ имеют степенной рост по переменным s_i с показателями $p_i(x) \in (1, \infty), i = 0,1, \dots, n$. В качестве простейшего примера можно привести уравнение

© Кожевникова Л.М., Камалетдинов А.Ш., 2017

$$\sum_{i=1}^{n}(|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i})_{x_i}-|u|^{p_0(x)-2}u=\sum_{i=1}^{n}(\phi_i(x))_{x_i}-\phi_0(x). \quad (3)$$

В 1984 году H. Brezis [1] на примере уравнения

$-\Delta u+|u|^{p_0-2}u=f(x),\ x\in\mathbb{R}^n,\ p_0>2,$

и его обобщений показал, что есть эллиптические уравнения в неограниченных областях, для которых существуют единственные решения соответствующих краевых задач без предположений на их поведение и рост входных данных на бесконечности.

В работе [2] Л.М. Кожевниковой, А.А. Хаджи для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с нестепенными нелинейностями доказана теорема существования без ограничений на рост входных данных при $|x|\to\infty$. M.M. Bokalo, O.V. Domanska в работе [3] исследовали краевые задачи в неограниченных областях для эллиптических анизотропных уравнений с переменными показателями нелинейностей, модельным примером которых является уравнение (3). Корректность краевых задач доказана без ограничений на поведение решений и условий на рост исходных данных на бесконечности. Следует отметить, что в работах [2]–[3] установлено существование решений эллиптических уравнений в неограниченных областях с соответствующими операторами, удовлетворяющими условию монотонности. В настоящей работе рассматривается более широкий класс эллиптических анизотропных уравнений с переменными показателями нелинейностей с соответствующими псевдомонотонными операторами.

Обозначим

$C^+(\overline{\Omega})=\{p(x)\in C(\overline{\Omega}): 1<p^-\le p(x)\le p^+<+\infty\forall x\in\overline{\Omega}\},$

где $p^-=\inf_{\Omega}p(x)$, $p^+=\sup_{\Omega}p(x)$.

Пусть $p(x)\in C^+(\overline{\Omega})$. Определим Лебегово пространство с переменным показателем $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ как множество измеримых на Ω вещественнозначных функций $v(x)$ таких, что:

$$\rho_{p(\cdot),\Omega}=\int_{\Omega}|v(x)|^{p(x)}dx<\infty.$$

Норма Люксембурга в пространстве $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ определяется равенством

$$\|v\|_{p(\cdot),\Omega}=\|v\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}=\inf\left\{k>0\middle|\rho_{p(\cdot),\Omega}(v/k)\le 1\right\}.$$

Пространство $L_{p(.)}(\Omega)$ является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством.

Пусть

$\vec{p}(x) = (p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)) \in (L_\infty^+(\Omega))^{n+1}$

положим

$p_+(x) = \max\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)\}.$

Предполагается, что функции $a_i(x, s_0, s), i = 0, .., n,$ измеримы по $x \in \Omega$ для $s = (s_0, s) = (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, непрерывны по $s \in \mathbb{R}^{n+1}$ для почти всех $x \in \Omega$. Кроме того, существуют положительные измеримые функции $\varphi(x), \Phi(x)$ и неотрицательные измеримые функции $\phi(x), \Phi_i(x), \ i = 0,1, \dots, n,$ такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и любых $s = (s_0, s) \in \mathbb{R}^{n+1}$ справедливы неравенства

$$|a_i(x, s_0, s)| \le \Phi(x)(|s_i|^{p_i(x)-1} + |s_0|^{p_0(x)/p_i(x)}) + \Phi_i(x), i = 0,1, \dots, n; \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, s_0, s) - a_i(x, s_0, t))(s_i - t_i) > 0, \qquad s \ne t; \quad (5)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i(x, s_0, s) s_i \ge \varphi(x) \sum_{i=0}^n |s_i|^{p_i(x)} - \phi(x). \quad (6)$$

Введем обозначение $v_{x_0} = v$. Определим пространство Соболева с переменными показателями $\dot{W}^1_{\vec{p}(.)}(\Omega)$ как пополнение пространства C_0^∞ по норме

$$\|v\|_{W^1_{\vec{p}(.)}(\Omega)} = \|v\|_{p_0(.),\Omega} + \|v\|_{\dot{W}^1_{\vec{p}}(\Omega)} = \sum_{i=0}^n \|v_{x_i}\|_{p_i(.),\Omega}$$

Пусть $\bar{p}(x) = n\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i(x)}\right)^{-1}$, $p_*(x) = \begin{cases} \frac{n\bar{p}(x)}{n-\bar{p}(x)}, & \bar{p}(x) > n, \\ +\infty, & \bar{p}(x) \le n, \end{cases}$

Будем считать, что

$$p_0(x) < p_*(x), \ \ x \in \Omega; p_+(x) \le p_0(x), \ \ x \in \Omega. \quad (7)$$

Определим $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega), L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \dot{W}^1_{\vec{p}(.),\mathrm{loc}}(\Omega)$ как пространства, состоящие из функций $v(x)$ определенных в Ω, для которых при любой ограниченной $Q \subseteq \Omega$ найдется функция из пространства $L_\infty(\Omega), L_1(\Omega), \dot{W}^1_{\vec{p}(.)}(\Omega)$, соответственно, совпадающая с функцией $v(x)$ в Q.

Будем считать, что неотрицательные функции

$\phi \in L_{1,\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}), \Phi_i \in L_{p_i'(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}), p_i'(x) = p_i(x)/(p_i(x)-1), \ i = 0,1,\dots,n;$ (8)

$$1/\varphi, \varphi, \Phi \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}). \quad (9)$$

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1), (2), (8), (9) назовем функцию $u(x) \in \dot{W}^1_{\vec{p}(\cdot),\mathrm{loc}}(Q)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega \sum_{i=0}^{n} a_i(x, u, \nabla u) v_{x_i} dx = 0,$$

для любой функции $v(x) \in \dot{W}^1_{\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$ с ограниченным носителем.

Теорема 1. Если выполнены условия (4)–(7), то существует обобщенное решение задачи (1), (2), (8), (9).

Доказательство теоремы базируется на результате о существовании решения задачи (1),(2) с $\phi \in L_1(\Omega), \Phi_i \in L_{p_i'}(\Omega), \ i = 0,1,\dots,n; \ 1/\varphi, \varphi, \Phi \in L_\infty(\Omega)$ (см. [4]).

Библиографический список

1. Brezis H. Semilinear equations in R_N without condition at infnity // Appl. Math. Optim. – 1984. – Т. 12, № 3. – PP. 271–282.

2. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях // Матем. сборник. – 2015. – Т. 206, № 8. – С. 1123–1149.

3. Bokalo M., Domanska O. On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces // Mathematychni Studii. – 2007. – Т. 28, № 1. – PP. 77–91.

4. Кожевникова Л.М., Камалетдинов А.Ш. Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейности в неограниченных областях // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2016. – № 5 (36). – С. 29–41.

Сведения об авторах

Кожевникова Лариса Михайловна, доктор физико-математических наук, профессор СФ БашГУ. E-mail: kosul@mail.ru.

Камалетдинов Александр Шамилевич, спирант СФ БашГУ. E-mail: kamaletdinov_aleksandr@mail.ru.

УДК 538.9

Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ИСКАЖЕНИЯ СМЕКТИЧЕСКИХ СЛОЕВ ВО ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Рассмотрена свободная энергия образца сегнетоэлектрического жидкого кристалла С, ограниченного между двумя пластинами со слабым поверхностным сцеплением на границах. Изучается возможность появления периодических искажений смектических слоев под воздействием электрического поля, приложенного вдоль слоев образца.*

Ключевые слова: математическое моделирование, сегнетоэлектрический жидкий кристалл, смектический слой, периодические искажения.

Kondratyev D.V., Migranov N.G.

PERIODIC SMECTIC LAYER DISTORTIONS IN EXTERNAL ELECTRIC FIELDS

The free energy for a sample of smectic C liquid crystal bounded between two plates with weak surface anchoring on the boundaries is considered. The electric field is applied across the sample and the possibility of layer undulations is studied.*

Key words: the mathematical modeling, ferroelectric liquid crystal, smectic layer, periodic distortions.

На протяжении нескольких десятилетий ведутся экспериментальные и теоретические исследования оптических материалов с малыми временами переключений. Такими характеристиками среди анизотропных и вязкоупругих образцов обладают жидкие кристаллы (ЖК). В отличие от нематического ЖК хиральная смектическая мезофаза – SmC*, обладает спонтанной поляризацией, чувствительной к внешнему электрическому полю и поэтому представляет собой вполне перспективный объект для фотоники и систем отображения информации [2].

Технические потребности в оптических компонентах, в основе которых лежат жидкие кристаллы являются стимулом для исследования проблем, связанных с их практическим применением [1].

На ориентацию молекул ЖК можно влиять как слабыми магнитными, электрическими, так и температурными полями, что широко используется в приборостроении. Ряд результатов в исследовании

© Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г., 2017

нематических жидких кристаллов во внешних магнитных и электрических полях в части влияния особых граничных условий на распределение поля директора в объеме ЖК приведены в [3]. На основе жидких кристаллов изготавливают медицинские термометры, датчики температуры для контроля перегрева узлов и деталей, преобразователи невидимого инфракрасного излучения в видимый свет.

Взаимодействие с ориентирующими плоскостями в поверхностно-стабилизированном смектическом ЖК приводит к появлению двух устойчивых равновесных ориентационных конфигураций – этот эффект имеет важное прикладное значение [6, 7]. Результаты, приведенные в [4, 5], подтверждают возможность управления процессами структурообразования с помощью обработки подложек, ограничивающих образец жидкого кристалла.

Рассмотрим тонкий слой раскрученного сегнетоэлектрического жидкого кристалла SmC* во внешнем электрическом поле, прикладываемом вдоль оси координат, как показано на рис. 1. Для случая магнитного поля такая геометрия сегнетоэлектрического ЖК рассмотрена в [8].

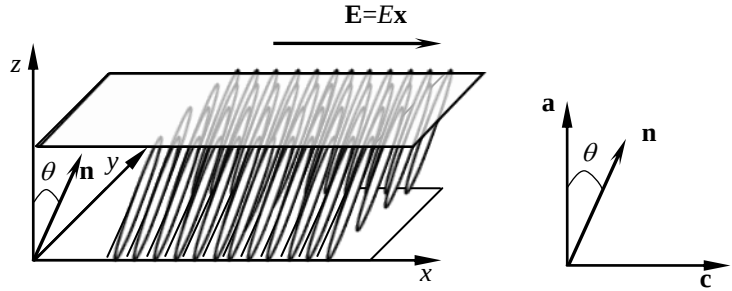


Рис. 1. Геометрия сегнетоэлектрического ЖК во внешнем электрическом поле

В общем случае угол θ зависит от температуры: с повышением температуры мезофазы он становится меньше. Запишем директор $\vec{n}$ в виде

$$\vec{n} = \vec{a}\cos\theta + \vec{c}\sin\theta,$$

где $\vec{a}$ – нормаль к смектическому слою, $\vec{c}$ – единичный вектор, характеризующий направление проекции директора $\vec{n}$ в слое.

В рассматриваемом образце SmC* присутствует спонтанная поляризация $\vec{P}$, которая всегда перпендикулярна плоскости $(\vec{a},\vec{n})$. Удобно ввести вектор $\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ для описания $\vec{P}=P_0\vec{b}$.

Известно, что плотность энергии упругости в объеме выражается соотношением [8]:

$$w_b=\frac{1}{2}A_{21}(\nabla\cdot\vec{a})^2+\frac{1}{2}B_2(\nabla\cdot\vec{c})^2+\frac{1}{2}B_1(\vec{a}\cdot\nabla\times\vec{c})^2+\frac{1}{2}B_3(\vec{c}\cdot\nabla\times\vec{c})^2+$$

$$+\frac{1}{2}(2A_{11}+A_{12}+A_{21}+B_3)(\vec{b}\cdot\nabla\times\vec{c})^2-\frac{1}{2}(2A_{11}+2A_{21}+B_3)(\nabla\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\nabla\times\vec{c})^2-$$

$$-C_2(\nabla\cdot\vec{a})(\nabla\cdot\vec{c})-B_{13}(\vec{a}\cdot\nabla\times\vec{c})(\vec{c}\cdot\nabla\times\vec{c})+(C_1+C_2-B_{13})(\nabla\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\nabla\times\vec{c}),$$

где коэффициенты эластичности A_i, B_i и C_i.

Электрическая составляющая в плотность энергии

$$w_{elc}=-\vec{P}\cdot\vec{E}-\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_a\left(\vec{n}\cdot\vec{E}\right)^2,$$

где $\vec{E}$ – электрическое поле, $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м, ε_a – диэлектрическая анизотропия. При $\varepsilon_a>0$ директор ориентируется параллельно направлению поля, при $\varepsilon_a<0$ – перпендикулярно (в данном случае, ε_a отрицательная величина). Первое слагаемое в электрической составляющей принимает минимальное значение при $\vec{P}\parallel\vec{E}$.

Функция смещения смектических слоев $\Phi=z-u(x,z)$, в которой искажения рассматриваются в виде

$$u(x,z)=u_0\sin(q_x x)\cos(q_z z),$$

где q_x и q_z – волновые числа.

Для определения полной энергии в объеме образца необходимо учесть энергию сцепления с подложками, а также энергию сжатия слоев, которые рассматриваются в данной постановке задачи в виде

$$w_s=\frac{1}{2}\tau_0\left(1+\omega(\vec{n}\cdot\vec{v})^2\right)\text{ и }w_L=\frac{1}{2}B_0\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right).$$

Свободная энергия в объеме образца сегнетоэлектрического ЖК выражается суммой объемного и поверхностного интегралов

$$F = \int_{\Omega} (w_L + w_b + w_{elc})d\Omega + \int_{S} w_s dS \ .$$

В данной работе рассмотрен образец сегнетоэлектрического жидкого кристалла, заключенный между двумя полубесконечными пластинами, со слабым сцеплением на границах ячейки. Электрическое поле приложено параллельно смектическим слоям, вызывая периодические искажения слоев, когда величина поля превышает некоторое критическое значение. Учитывая поверхностную энергию в виде Рапини-Папулара и используя методологию Стюарта [8], получено выражение для свободной энергии образца, которое описывает состояние этой системы.

Библиографический список

1. Андреев А.Л., Компанец И.Н. Применения сегнетоэлектрических жидких кристаллов – реальные и возможные (обзор) // Жидк. крист. и их практич. использ. – 2015. – Т. 15, № 3. – С. 28–40.

2. Беляев В.В. Перспективные применения и технологии жидкокристаллических устройств отображения информации и фотоники // Жидк. крист. и их практич. использ. – 2015. – Т. 15, № 3. – С. 7–27.

3. Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Континуальный подход в теории жидких кристаллов: Монография – Уфа: Гилем, Башк. энцикл., 2013. – 164 с.

4. Мигранова Д.Н., Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Исследование устойчивости равновесных состояний наноматериалов на основе сегнетоэлектрических жидких кристаллов во внешнем электрическом поле // Жидк. крист. и их практич. использ. – 2015. – Т. 15, № 3. – С. 133–142.

5. Мигранова Д.Н., Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Метод прямых в решении краевой задачи Пуассона для смектика SmC* во внешнем электрическом поле // Жидк. крист. и их практич. использ. – 2016. – Т. 16, № 3. – С. 58–68.

6. Чигринов В.Г., Шривастава А.К., Пожидаев Е.П. Сегнетоэлектрические жидкие кристаллы: физика и области применения // Жидк. крист. и их практич. использ. – 2016. – Т. 16, № 1. – С. 9–21.

7. Чилая Г.С., Чигринов В.Г. Оптика и электрооптика хиральных смектических С жидких кристаллов // Успехи физ. наук. – 1993. – Т. 163, вып. 10. – С. 1–28.

8. Stewart I. W. Distortions induced by a magnetic field in planar aligned samples of smectic-C liquid crystals // Mol. Cryst. and Liq. Cryst. – 2001. – Vol. 366. – P. 919–928.

Сведения об авторах

Кондратьев Денис Васильевич, кандидат физико-математических наук, ученый секретарь ГБНУ «Академия наук Республики Башкортостан», доцент Башкирского кооперативного института (филиала) Российского университета кооперации. E-mail: denis.kondratyev@bk.ru.

Мигранов Наиль Галиханович, доктор физико-математических наук, профессор Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы. E-mail: ufangm@yahoo.co.uk.

УДК 004.9

Котова Т.Ю., Чиганова Н.В.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ «IT VIDEOSERVISE» ДЛЯ ИП ЖИГАНОВ А.Е.

В работе будет рассмотрена система управления базами данных MySQL. С помощью этого будет спроектирована информационная система для сервисного центра «IT videoservise» ИП Жиганов А.Е.

Ключевые слова: MySQL, информационная система, СУБД.

Kotova T.Yu., Chiganova N.V.

DESIGNING INFORMATION SYSTEM «IT VIDEOSERVISE» FOR IP ZHIGANOV A.E.

In this paper, the database management system MySQL will be considered. With the help of this will be with the projected information system for the service center «IT videoservise» IP Zhiganov A.E.

Key words: MySQL, information system, DBMS.

Актуальность создания информационной системы (ИС) растет с каждым годом, потому что современный мир не может обойтись без структурированной и отсортированной информации, а ИС позволяют реализовать это.

В данном проекте будет разработана ИС, которая полностью автоматизирует небольшое предприятие «IT videoservise» ИП Жиганов А.Е., занимающиеся ремонтом компьютерной техники.

Создаваемая ИС будет вести учет поступивших заявок, отслеживать приход и расход денежных средств, хранить список сотрудников организации, вести автоматический подсчет заработной платы. Помимо этого будет авторизация на сайте, что позволит разделить права доступа (см. Рис. 1).

© Котова Т.Ю., Чиганова Н.В.

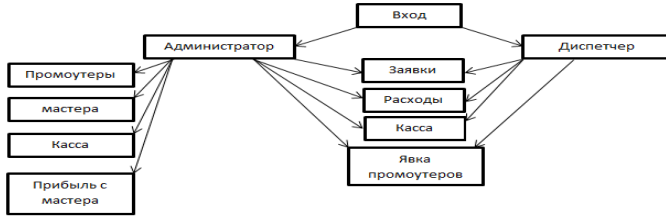


Рис. 1. Схема разделения прав доступа

Первым и самым главным этапом в процессе проектирования и создания базы данных, является разработка инфологической модели (концептуальная модель). Первый шаг в построении концептуальной модели данных состоит в определении основных объектов (сущностей), которые могут интересовать пользователя и, следовательно, должны храниться в базе данных. В ходе анализа и проектирования информационной модели наборы объектов должны быть детализированы.

Для данной информационной системы были выделены следующие атрибуты и сущности (Таблица 1.):

Таблица 1.

Сущности и атрибуты базы данных ИС

Сущности	Атрибуты
Мастера	Id_мастера, ФИО_мастера, Дата_рождения, Паспортные_данные, Адрес, Телефон
Зарплата мастеров	id_чека, ФИО_мастера, Общее_количетсво_заявок, Выполнено, Отказы, Проценты_с_заявки, Мотивация, Общая_зп
Промоутеры	id_промоутера, ФИО_промоутер, Дата_рожединя, Паспортные_данные, Адрес Телефон, Дополнительная_информация
Явка промоутера	Id, ФИО_промоутера, Дата, Город, Явка, Начало, Конец, Маршрут, Зарплата, Информация
Заявки	id_заявки, Город, Дата, Дата_выполнения, ФИО_клиента, Телефон_клиента, Адрес_клиента, Озвученная_проблема, ФИО_мастера, Статус_заяки, Сумма, Запчасти, Проценты_мастеру, Прибыль с заявки, Обзвон, Оценка_качества, Комментарий_по_оценке, Рассрочка, Оплачено, Остаток, Дата_оплаты_остатка
Расходы	id_расхода, Вид_расхода, Сумма
Касса	Id, Дата, Вид_прибыли, Сумма_прибыли, Вид_расхода, Сумма_расхода, Итого_прибыль

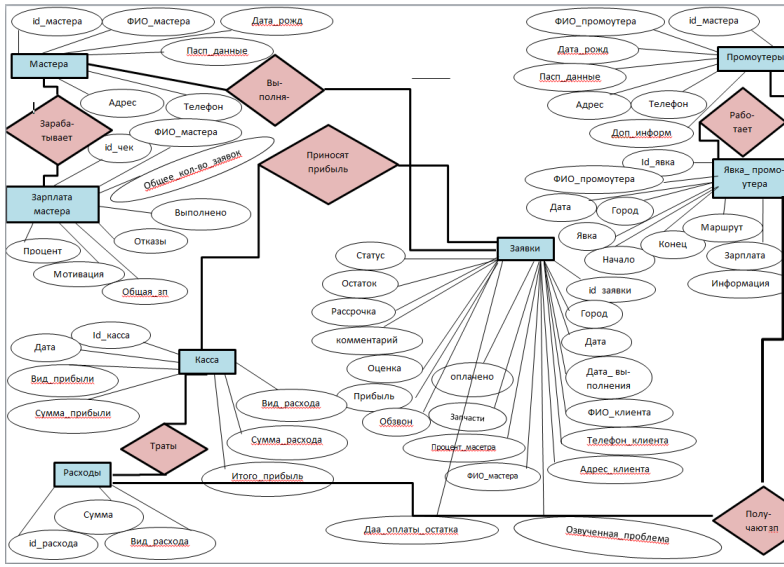


Рис. 2. ER-модель

Между сущностями могут быть уставлены связи – бинарные ассоциации, показывающие, каким образом сущности относятся или взаимодействуют между собой. Модель «сущность-связь» или ER-модель, является наиболее известным представителем класса семантических моделей предметной области (см. рис. 2)

Для реализации базы данных будет использоваться MySQL. MySQL — очень быстрая и надежная система управления реляционными базами данных (СУРБД). База данных позволяет эффективно хранить, искать, сортировать и выбирать информацию. Сервер MySQL управляет доступом к данным, позволяя работать с ними одновременно нескольким пользователям, обеспечивает быстрый доступ к данным и гарантирует предоставление доступа только тем пользователям, которые имеют на это право. Следовательно, MySQL является многопользовательским, многопоточным сервером. В нем применяется SQL (Structured Query Language — язык структурированных запросов), стандартный язык запросов к базам данных. MySQL появился на рынке в 1996 г., однако его разработка была начата еще в 1979 г. В настоящее время MySQL представляет собой наиболее популярную СУРБД с открытым

исходным кодом; эта система завоевала приз читательских симпатий в журнале Linux Journal. [2]

Каждая таблица реляционной базы данных включает информацию, уникально идентифицирующую строку этой таблицы (первичный ключ (primary key)), а также дополнительные данные, необходимые для полного описания сущности. [1]

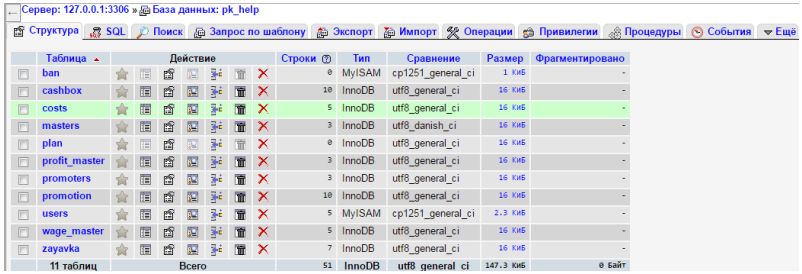


Рис 3. Проектирование ИС с помощью MySQL

Разработанная база данных будет реализована в ИС «IT videoservise».

Библиографический список

1. Алан Б. «Изучаем SQL» Вводный курс для разработчиков и администраторов БД. – СПб.: Сингл, 2007. – 312 с.

2. Веллинг Л., Томсон Л. Разработка веб-приложений с помощью PHP и MySQL, 4-е изд.: Пер. с англ. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2010. – 848 с.

3. Википедия – свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. – http://wikipedia.org. – (дата обращения: 18.04.2017).

Сведения об авторах

Котова Татьяна Юрьевна, студентка АИС-41 СФ БашГУ. E-mail: pf.mmm@mail.ru.

Чиганова Наталья Викторовна, доцент: кандидат физико-математических наук СФ БашГУ. E-mail: natali-th@yandex.ru.

УДК 004.42

Кудашев И.Н., Нафикова А.Р.

РАЗРАБОТКА WEB-ПРИЛОЖЕНИЯ «РАСПИСАНИЕ ЗАНЯТИЙ» ДЛЯ СРЕДНЕЙ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

В статье рассмотрены программные средства, которые были применены для создания учебного расписания школы, выделены их преимущества и недостатки. Демонстрируются возможности разработанного web-приложения.

Ключевые слова: автоматизация, расписание, школа.

Kudashev I.N., Nafikova A.R.

DEVELOPMENT OF THE WEB APPLICATION «LESSON SCHEDULE» FOR AVERAGE COMPREHENSIVE SCHOOL

In article software which have been applied to creation of the educational schedule of school are considered, their advantages and shortcomings are marked out. Possibilities of the developed web application are shown.

Key words: automation, schedule, school.

Проблема составления оптимального учебного расписания в среднеобразовательном учебном заведении является известной. Решением этой проблемы занимались многие ученые и практики по созданию автоматизированных систем. В настоящее время эта проблема остается нерешенной. Актуальность задачи определяется повышением уровня требований к учебному процессу, планированию работы учащихся в условиях дефицита аудиторного фонда и другие. При создании расписания специалист должен учитывать множество противоречивых факторов: пожелания учителей, занятость и вместимость аудиторного фонда, санитарно-эпидемиологические правила и нормы (СаНПиН).

Если учитывать все ограничения, предъявляемые к расписанию, то задача ручного составления расписания заметно усложняется. Выходом из сложившейся ситуации является автоматизация процесса создания учебного расписания [1].

С одной стороны, может показаться, что автоматизация составления расписания является чисто математической проблемой, и она,

© Кудашев И.Н., Нафикова А.Р., 2017

пусть нетривиальными методами, но может быть формализована, алгоритмизирована и переведена на язык машинных кодов. А быстродействие современных компьютеров должно обеспечить достижение требуемого результата в приемлемые сроки. Именно на таких ожиданиях в середине-конце 90-х годов в нашей стране, равно как в ближнем и дальнем зарубежье, наблюдался бум производства программ составления расписания занятий для персональных компьютеров, которые к этому времени стали массовыми, весьма производительными и, главное, доступными для учебных заведений. Печально, но остается констатировать, что со своей благородной миссией эти программы не справились [2].

Общие требования, предъявляемые к автоматизированной системе, следующие:

– использование норм времени для расчета объемов учебной нагрузки;

– быстрота обработки информации за счет автоматизации возможных операций пользователя системы;

– формирование отчетных форм;

– расширяемость системы (возможность её доработки в случае повышения требований к автоматизированной системе);

– удобный пользовательский интерфейс.

В качестве системы управления базами данных в автоматизированной системе расписания занятий используется наиболее популярная система управления базами данных (СУБД) MySQL. Кроме того, проект, разработанный при помощи фреймворка CMS Drupal 7, позволяет создавать и разворачивать на веб-сервере установочный профиль и использовать базы данных PostgreSQL и SQLite.

MySQL является решением для малых и средних приложений. Входит в состав серверов WAMP, AppServ, LAMP и в портативные сборки серверов Денвер, XAMPP. Обычно MySQL используется в качестве сервера, к которому обращаются локальные или удалённые клиенты, однако в дистрибутив входит библиотека внутреннего сервера, позволяющая включать MySQL в автономные программы.

Гибкость СУБД MySQL обеспечивается поддержкой большого количества типов таблиц: пользователи могут выбрать как таблицы типа MyISAM, поддерживающие полнотекстовый поиск, так и таблицы InnoDB, поддерживающие транзакции на уровне отдельных записей. Более того, СУБД MySQL поставляется со специальным типом таблиц EXAMPLE, демонстрирующим принципы создания новых

типов таблиц. Благодаря открытой архитектуре и GPL-лицензированию, в СУБД MySQL постоянно появляются новые типы таблиц [3].

Основные преимущества MySQL:

– многопоточность, поддержка нескольких одновременных запросов;
– оптимизация связей с присоединением многих данных за один проход;
– записи фиксированной и переменной длины;
– ODBC-драйвер;
– гибкая система привилегий и паролей;
– гибкая поддержка форматов чисел, строк переменной длины и меток времени;
– интерфейс с языками C и Perl, PHP;
– быстрая работа, масштабируемость;
– совместимость с ANSI SQL;
– бесплатна в большинстве случаев;
– хорошая поддержка со стороны провайдеров услуг хостинга;
– быстрая поддержка транзакций через механизм InnoDB.

В школьной и вузовской практике стали широко использовать специальные PHP-скрипты для составления расписаний занятий. Представим именно такое Web-приложение, которое станет настоящим помощником для дирекции учебных заведений и учеников:

– легко найти кабинеты;
– легко найти учителей;
– произвести замену уроков.

Главная страница приложения представлена на рис. 1.

Бесплатный PHP-скрипт «школьное расписание» позволит составить удобное расписание для всех учителей, что даст возможность установить методический день для повышения самообразования учителей [4].

База данных легко экспортируется в Excel и так же легко распечатывается. Автоматически создаётся база учителей, которая легко редактируется и так же легко удаляется. База состоит из детальной информации, в которую включены следующие данные: ФИО учителя, должность, количество часов в неделю, то есть общая и ежедневная нагрузка учителя. Отдельно есть колонка для дополнительной информации.

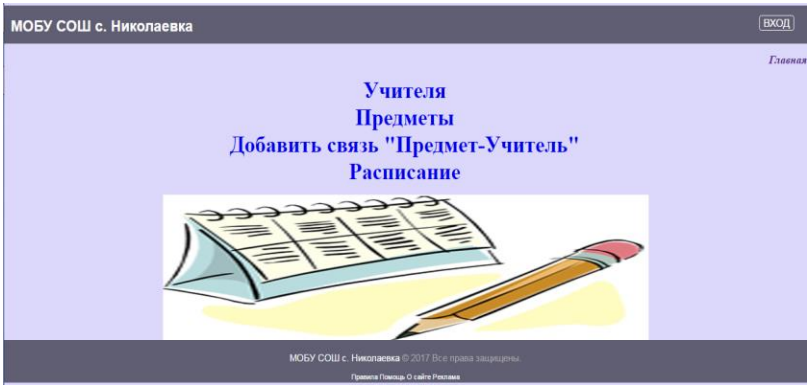


Рис. 1. Главная страница Web-расписание

В приложении каждый класс имеет свою страницу. Нажав на название класса, выводится весь список изучаемых предметов. Информация о предметах легко редактируется и изменяется (рис. 2).

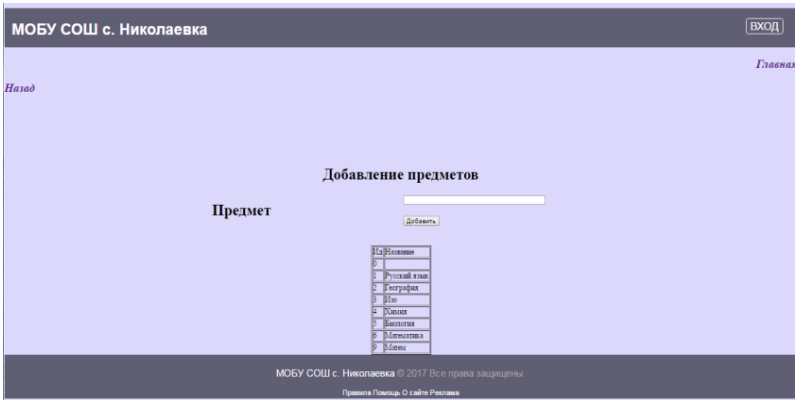


Рис. 2. Список предметов

На рис. 3 представлено расписание уроков для учеников.

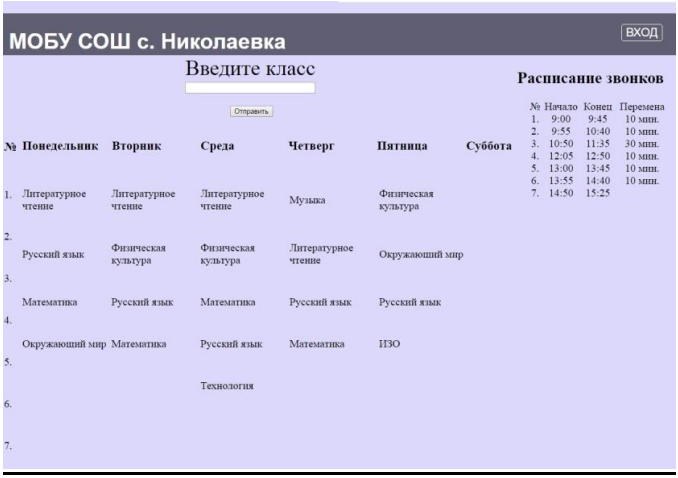


Рис. 3. Расписание уроков для учеников

В результате проделанной работы было разработано Web-приложение расписания занятий для средней общеобразовательной школы с целью его внедрения в учебный процесс.

У данной системы имеется удобный пользовательский интерфейс, который позволит легко и быстро освоить работу в программе, а гибкость программного кода в случае необходимости позволит удовлетворить растущие требования к системе.

Данную автоматизированную систему возможно интегрировать в одну информационную систему для множества школ, что, несомненно, является большим преимуществом и скажется на работе пользователей при анализе структуры нагрузки, при планировании структурной доработки и унификации имеющихся учебных планов.

Библиографический список

1. Антропов А.Ю., Варламова С.А. Проблемы автоматизированного составления расписания занятий средней образовательной школы [Электронный ресурс] // Juvenis scientia. – 2016. – № 2. – С. 10–13. – URL: http://cyberleninka.ru/article/n/problemy-avtomatizirovannogo-sostavleniya-raspisaniya-zanyatiy-sredney-obrazovatelnoy-shkoly.

2. Брезгинов А.Н., Трегубов С.Ю. Обзор существующих методов составления расписаний // Информационные технологии в программировании. – 2005. – № 2 (14). – С. 5–18.

3. Семенюта И.С. Исследование эффективности системы составления расписаний методами теории массового обслуживания // Автоматизация и современные технологии. – 2011. – № 10. – С. 72–78.

4. Семенюта И.С. Методика анализа информационной структуры базы данных автоматизированной системы составления расписаний // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – 2011. – № 09 (73). – С. 6–11. – URL: http://ej.kubagro.ru/2011/09/pdf/06.pdf.

Сведения об авторах

Кудашев Ильдар Наилович, студент факультета математики и информационных технологий СФ БашГУ. E-mail: nail.kudaschev2010@yandex.ru.

Нафикова Альбина Ринатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования. E-mail: albinabikbaeva@gmail.com.

УДК 517.52, 517.53

Кривошеева О.А.

ПОПОЛНЕНИЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В работе изучаются комплексные последовательности первого порядка с конечной максимальной угловой плотностью. Получен критерий того, когда такая последовательность является частью правильно распределенного множества с заданной угловой плотностью.

Ключевые слова: максимальная плотность, угловая плотность, правильно распределенное множество.

Krivosheeva O.A.

COMPLETION OF A COMPLEX SEQUENCE

In the paper, first-order complex sequences with finite maximal angular density are studied. A criterion for such a sequence to be a part of a regularly distributed set with a given angular density is obtained.

Key words: maximal density, angular density, regularly distributed set.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – неубывающая по модулю последовательность комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k с единственной предельной точкой ∞. Будем рассматривать именно такие последова-

© Кривошеева О.А., 2017

тельности, т.к. их совокупность совпадает с множеством бесконечных кратных спектров подпространств инвариантных относительно оператора дифференцирования (см. [1], введение).

Символом $n(r,\Lambda)$ обозначим число точек λ_k с учетом их кратностей, попавших в открытый круг $B(0,r)$. Говорят, что Λ измерима (имеет плотность $n(\Lambda)$), если существует предел $n(\Lambda)=\lim_{r\to\infty} n(r,\Lambda)/r$. Пусть $n^0(\Lambda)$ обозначает максимальную плотность Λ, т.е.

$$n^0(\Lambda)=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\,\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda)-n\big((1-\delta)r,\Lambda\big)}{\delta r}.$$

Пусть $\widetilde{\Lambda}=\{\mu_m,s_m\}_{m=1}^{\infty}$. Будем говорить, что $\widetilde{\Lambda}$ является пополнением Λ, если существуют натуральные числа $m(k)$ такие, что $\mu_{m(k)}=\lambda_k$ и $n_k\le s_{m(k)}, k\ge 1$.

Известная теорема Ж. Полиа (см., напр., [2], гл. VI, § Е3) утверждает, что любая последовательность положительных чисел с конечной максимальной плотностью является частью некоторой измеримой последовательности с той же плотностью. В лемме 5 (с учетом замечания к ней) работы [3] приводится другое доказательство этой теоремы. Метод построения пополнения, который при этом используется, является более простым, чем метод из книги [2]. В следующем утверждении этот результат распространяется на комплексные последовательности.

Лемма. *Пусть* $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$ *имеет конечную максимальную плотность* $n^0(\Lambda)$ *и* $\tau\ge n^0(\Lambda)$. *Тогда существует ее пополнение* $\widetilde{\Lambda}$ *такое, что* $n(\widetilde{\Lambda})=\tau$.

Пусть $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$ и $0<\varphi_2-\varphi_1<2\pi$. Символом $n(\varphi_1,\varphi_2,r,\Lambda)$ обозначим число точек λ_k с учетом их кратностей, попавших в сектор $\{\lambda=te^{i\varphi}\colon \varphi\in(\varphi_1,\varphi_2), t\in(0,r)\}$. Говорят ([4], гл. II, §1), что Λ имеет угловую плотность (при порядке один), если для всех φ_1,φ_2 за исключением, быть может, счетного множества существует предел $n(\varphi_1,\varphi_2,\Lambda)=\lim_{r\to\infty} n(\varphi_1,\varphi_2,r,\Lambda)/r$. Положим

$$n^0(\varphi_1,\varphi_2,\Lambda)=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\,\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(\varphi_1,\varphi_2,r,\Lambda)-n(\varphi_1,\varphi_2,(1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}.$$

Множество Λ называется правильно распределенным (см. [4], гл. II, § 1), если оно имеет угловую плотность и выполнено условие Линделефа, т.е. существует

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{|\lambda_k|<r}\frac{n_k}{\lambda_k}.$$

Правильно распределенные множества тесно связаны с функциями регулярного роста. Пусть f - целая функция экспоненциального типа (т.е. существуют $A,B>0$ такие, что $|f(z)|\le A+B|z|, z\in\mathbb{C}$). Верхним индикатором f называется функция

$h_f(\lambda)=\overline{\lim_{t\to\infty}} ln|f(t\lambda)|/t, \qquad \lambda\in\mathbb{C}.$

Индикатор h_f является выпуклой положительно однородной порядка один функцией, которая совпадает с комплексной опорной функцией некоторого выпуклого компакта K (т.е. с обычной опорной функцией комплексно сопряженного с K компакта), называемого сопряженной диаграммой f (см., напр., [5], гл. I, § 5, теорема 5.4):

$h_f(\lambda)=H_K(\lambda)=\sup_{z\in K}\mathrm{Re}(\lambda z), \qquad \lambda\in\mathbb{C}.$

Говорят (см. [4], гл. III), что f имеет регулярный рост, если

$h_f(\lambda)=\lim_{t\to\infty,t\notin E} ln|f(t\lambda)|/t, \quad \lambda\in\mathbb{C},$

где E – множество нулевой относительной меры на луче $(0,+\infty)$, т.е. мера Лебега его пересечения с интервалом $(0,r)$ бесконечна мала по сравнению с r при $r\to+\infty$.

Пусть K – выпуклый компакт и z_1,z_2 – точки его границы ∂K. Через $s(z_1,z_2,K)$ обозначим длину дуги ∂K, соединяющей z_1 и z_2, движение по которой от z_1 к z_2 осуществляется в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Для каждого $\varphi\in\mathbb{R}$ пересечение $\Gamma(\varphi)$ опорной прямой $l(\varphi)=\{z: Re(ze^{i\varphi})=H_K(e^{i\varphi})\}$ и границы ∂K является либо точкой $z(\varphi)$ либо отрезком. Множество $\Phi(K)$ направлений φ, для которых $\Gamma(\varphi)$ – отрезок, не более чем счетное. Положим

$S_K(\varphi_1,\varphi_2)=\sup_{z_1\in\Gamma(\varphi_1),z_2\in\Gamma(\varphi_2)} s(z_1,z_2,K).$

Функция $S_K(\varphi_1,\varphi_2)$ является неубывающей по φ_2 и невозрастающей по φ_1, а множество ее точек разрыва по обеим переменным совпадает с $\Phi(K)$. Если $\varphi_1,\varphi_2\notin\Phi(K)$, то

$$S_K(\varphi_1,\varphi_2)=s(z(\varphi_1),z(\varphi_2),K).$$

Согласно теореме 4 главы III книги [4] функция f имеет регулярный рост тогда и только тогда, когда ее нулевое множество является правильно распределенным. При этом для всех $\varphi_1,\varphi_2\notin\Phi(K), 0<\varphi_2-\varphi_1<2\pi$, верно равенство (см. [4], гл. II, § 1, формула (2.07))

$$n(\varphi_1,\varphi_2,\widetilde{\Lambda}) = S_K(\varphi_1,\varphi_2)/2\pi, \qquad (1)$$

где K – сопряженная диаграмма, а $\widetilde{\Lambda}$ - кратное нулевое множество f.

Теорема. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *и* K *– выпуклый компакт. Равносильны утверждения*

1) Существует $\gamma > 0$ *такое, что для всех* $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(K)$ *с условием* $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$ *выполнено неравенство* $n^0(\varphi_1,\varphi_2,\Lambda) \le S_K(\varphi_1,\varphi_2)/2\pi$.

2) Существует пополнение $\widetilde{\Lambda}$ *последовательности* Λ*, которое является правильно распределенным множеством, и при этом верно (1).*

Библиографический список

1. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций // Математический сборник. – 2013. – Т. 204. – № 12. – С. 49–104.

2. P. Koosis. The logarithmic integral I. Cambridge University Press. – 1997.

3. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. Замкнутость множества сумм рядов Дирихле // Уфимский математический журнал. – 2013. – Т. 5. – № 3. – С. 96–120.

4. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956.

5. Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983.

Сведения об авторе

Кривошеева Олеся Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет», заместитель декана по научной работе. E-mail: kriolesya2006@yandex.ru.

УДК 517.52, 517.53

Кривошеева О.А.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ПРИНЦИПА ДЛЯ ИНВАРИАНТНОГО ПОДПРОСТРАНСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В работе представлены полные решения проблем фундаментального принципа и базиса для инвариантного подпространства аналитических функций в ограниченной выпуклой области.

Ключевые слова: максимальная угловая плотность, фундаментальный принцип, базис Кете.

Krivosheeva O.A.

A SOLUTION TO THE PROBLEM OF A FUNDAMENTAL PRICIPLE FOR AN INVARIANT SUBSPACES OF ANALYTICAL FUNCTIONS

In the paper we present complete solutions of fundamental principle problems and basis for an invariant subspace of analytic functions in a bounded convex domain.

Key words: maximal angular density, fundamental principle, Köthe basis.

Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$, $H(D)$ – пространство функций, аналитических в D, с топологией равномерной сходимости на компактах, и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ – последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k такая, что система $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\},\ k \geq 1, n = 0, \dots, n_k - 1$, не полна в $H(D)$. Через $\mathcal{W}(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в $H(D)$ линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Тогда $\mathcal{W}(\Lambda, D)$ – нетривиальное замкнутое подпространство в $H(D)$ инвариантное относительно оператора дифференцирования.

Пусть $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ – разбиение Λ на группы U_m. Сделаем перенумерацию членов Λ. Точки λ_k, попавшие в группу U_m, будем обозначать $\lambda_{m,l}$, а их кратности – $n_{m,l}$. Первый индекс совпадает с номером группы, а второй меняется в пределах от 1 до M_m, где M_m – число точек λ_k в группе U_m. Положим $N_m = \sum_{l=1}^{M_m} n_{m,l}$. Будем говорить, что группы $U_m = \{\lambda_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$ относительно малы, если

$$\lim_{m\to\infty} \max_{1\leq j,l\leq M_m} |\lambda_{m,j} - \lambda_{m,l}| / |\lambda_{m,1}| = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} N_m / |\lambda_{m,1}| = 0.$$

© Кривошеева О.А., 2017

Пусть $B(w,r)$ – открытый круг с центром в точке w и радиуса r. Положим

$$q^m_{\Lambda,U}(z,\delta) = \prod_{\lambda_{k,v}\in B(\lambda_{m,1},\delta|\lambda_{m,1}|),k\neq m} \left(\frac{z-\lambda_{k,v}}{3\delta|\lambda_{k,v}|}\right)^{n_{k,v}}, \qquad m=1,2,\dots$$

Модуль функции $q^m_{\Lambda,U}(z,\delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_{k,v}\in B\big(\lambda_{m,1},\delta|\lambda_{m,1}|\big), k\neq m$ около z. В случае, когда их нет, полагаем $q^m_{\Lambda,U}(z,\delta)\equiv 1$. Следуя [1], введем величину

$$\mathcal{S}_\Lambda(U)=\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{m\to\infty}\min_{\lambda_{m,v}\in B(\lambda_{m,1},\delta|\lambda_{m,1}|)}\ln\left|q^m_{\Lambda,U}(\lambda_{m,v},\delta)\right|/|\lambda_{m,v}|.$$

Отметим, что коэффициент 3 в определении $q^m_{\Lambda,U}$ выбран лишь для удобства (см. [2], замечание 1 к теореме 5.1). Он обеспечивает неравенство $\mathcal{S}_\Lambda(U)\le 0$. В случае, когда U - тривиальное разбиение (т.е. каждая группа U_m состоит из одной точки), $\mathcal{S}_\Lambda(U)$ совпадает с величиной $\mathcal{S}_\Lambda$, введенной в работе [2].

По системе $\mathcal{E}(\Lambda)=\{z^n\exp(\lambda_k z)\}$ построим новую систему функций $\mathcal{E}(\Lambda,U)=\{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$. Пусть Γ_m - контур (простая замкнутая непрерывная спрямляемая кривая), охватывающий точки группы U_m, и

$$\omega_m(\lambda)=\prod_{l=1}^{M_m}(\lambda-\lambda_{m,l})^{n_{m,l}}, \qquad m=1,2,\dots$$

Положим

$$P_m(\lambda,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}\frac{\exp(z\zeta)(\omega_m(\zeta)-\omega_m(\lambda))}{(\zeta-\lambda)\omega_m(\zeta)}d\zeta, \qquad m=1,2,\dots$$

Эта формула определяет известный интерполяционный многочлен степени не выше N_m-1, который в точках $\lambda_{m,l}$ вместе с производными до порядка $n_{m,l}-1$ принимает значения, совпадающие с соответствующими значениями функции $\exp(z\zeta)$ и ее производных, т.е.

$$P_m^{(n)}(\lambda_{m,l},z)=z^n\exp(\lambda_{m,l}z), \quad l=1,2,\dots,M_m, \quad n=0,1,\dots,n_{m,l}-1.$$

Положим

$$e_{m,j}(z)=P_m^{(j-1)}(\lambda_{m,1},z), \quad j=1,\dots,N_m, \qquad m=1,2,\dots$$

Пусть $\{K_s\}_{s=1}^{\infty}$ – последовательность выпуклых компактов, исчерпывающая область D, т.е. $K_s\subset \mathrm{int}K_{s+1}, s\ge 1$, (int обозначает внутренность), и $D=\bigcup_{s=1}^{\infty}K_s$. Для каждого $s\ge 1$ введем банахово пространство комплексных последовательностей

$$Q_s(\Lambda,U)=\left\{d=\{d_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}\colon \|d\|_s=\sup_{m,j}\left(|d_{m,j}|e^{H_{K_s}(\lambda_{m,1})}\right)<\infty\right\}.$$

Через $Q(D,\Lambda,U)$ обозначим проективный предел пространств $Q_s(\Lambda,U)$.

Будем говорить, что система $\mathcal{E}(\Lambda,U)$ является базисом в подпространстве $\mathcal{W}(\Lambda,D)$, если каждый его элемент g единственным образом раскладывается в ряд

$$g(z)=\sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}d_{m,j}\,e_{m,j}(z), \qquad (1)$$

который сходится равномерно на компактах из D. Отметим, что коэффициенты ряда вычисляются при помощи системы функционалов биортогональной к $\mathcal{E}(\Lambda,\mathrm{U})$ ([1]). Базис называется базисом Кете, если для каждого s существуют p и $C>0$ такие, что

$$\sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}|d_{m,j}|\sup_{z\in K_s}|e_{m,j}(z)|\le\beta\sup_{z\in K_p}|g(z)|,\quad g\in\mathcal{W}(\Lambda,D).$$

Пусть $\mathfrak{B}$ – оператор, который элементу $d\in Q(D,\Lambda,U)$ ставит в соответствие сумму $g\in\mathcal{W}(\Lambda,D)$ ряда (1), если он сходится в топологии $H(D)$.

Пусть $0<\varphi_2-\varphi_1<2\pi$. Символом $n(\varphi_1,\varphi_2,r,\Lambda)$ обозначим число точек λ_k с учетом их кратностей, попавших в сектор $\{\lambda=te^{i\varphi}\colon\varphi\in(\varphi_1,\varphi_2),t\in(0,r)\}$. Положим

$$n^0(\varphi_1,\varphi_2,\Lambda)=\varlimsup_{\delta\to0}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(\varphi_1,\varphi_2,r,\Lambda)-n(\varphi_1,\varphi_2,(1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}.$$

Величина $n^0(\varphi_1,\varphi_2,\Lambda)$ называется максимальной плотностью последовательности Λ в угле.

Пусть K – выпуклый компакт и z_1,z_2 – точки его границы ∂K. Через $s(z_1,z_2,K)$ обозначим длину дуги ∂K, соединяющей z_1 и z_2, движение по которой от z_1 к z_2 осуществляется в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Для каждого $\varphi\in\mathbb{R}$ пересечение $\Gamma(\varphi)$ опорной прямой $l(\varphi)=\{z\colon Re(ze^{i\varphi})=H_K(e^{i\varphi})\}$ и границы ∂K является либо точкой $z(\varphi)$ либо отрезком. Множество $\Phi(K)$ направлений φ, для которых $\Gamma(\varphi)$ - отрезок, не более чем счетное. Положим $S_K(\varphi_1,\varphi_2)=\sup_{z_1\in\Gamma(\varphi_1),z_2\in\Gamma(\varphi_2)}s(z_1,z_2,K)$.

Теперь мы можем сформулировать результаты, полностью решающие проблемы базиса (Теорема 1) и фундаментального принципа (Теорема 2) для произвольного нетривиального замкнутого инвари-

антного подпространства в $H(D)$, которое допускает спектральный синтез, в случае ограниченной выпуклой области D.

Теорема 1. *Пусть D – ограниченная выпуклая область и U – разбиение Λ на относительно малые группы. Предположим, что $\mathcal{W}(\Lambda, D)$ нетривиально. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) Система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в $\mathcal{W}(\Lambda, D)$;

2) Система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом Кете в $\mathcal{W}(\Lambda, D)$;

3) $\mathfrak{B}$: $Q(D, \Lambda, U) \to \mathcal{W}(\Lambda, D)$ - изоморфизм линейных топологических пространств;

4) $\mathcal{S}_\Lambda(U) = 0$ и существует $\gamma > 0$ такое, что для всех $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(K)$ с условием $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$ выполнено неравенство $n^0(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) \le S_K(\varphi_1, \varphi_2)/2\pi$ (K – замыкание комплексно сопряженной к D области).

Теорема 2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и D – ограниченная выпуклая область такие, что $\mathcal{W}(\Lambda, D)$ нетривиально. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) Система $\mathcal{E}(\Lambda)$ является базисом в $\mathcal{W}(\Lambda, D)$;

2) $\mathcal{S}_\Lambda = 0$ и существует $\gamma > 0$ такое, что для всех $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(K)$ с условием $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$ выполнено неравенство $n^0(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) \le S_K(\varphi_1, \varphi_2)/2\pi$.

Библиографический список

1. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций. Математический сборник. – 2013. – Т. 204. – № 12. – С. 49–104.

2. Кривошеев А.С. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях. Известия РАН. Серия математическая. – 2004. – Т. 68. – № 2. – С. 71–136.

Сведения об авторе

Кривошеева Олеся Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет», заместитель декана по научной работе. E-mail: kriolesya2006@yandex.ru.

УДК 534.1

Культербаев Х.П., Алокова М.Х.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЙ ВЕРТИКАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ

Рассматриваются изгибные колебания вертикального стержня постоянного сечения с сосредоточенной массой при плоскопараллельном, сложном движении. Предложена математическая модель, включающая основное уравнение колебаний и граничные условия.

Ключевые слова: колебания вертикального стержня, векторный процесс возмущений.

Kul'terbayev K.P., Alokova M.H.

MATHEMATICAL MODELING OF KINEMATICALLY EXCITED FLATS OF VERTICAL ROD

We consider bending vibrations of a vertical rod of constant cross section with a concentrated mass for plane-parallel, complex motion. A mathematical model is proposed that includes the basic equation of oscillations and boundary conditions.

Keywords: vertical rod vibrations, vector perturbation process.

Столь обширное применение вертикальных стоек стимулирует значительный интерес к их колебаниям от разнообразных возмущений, особенно кинематических, возникающих при землетрясениях [1]. Они весьма опасны для устойчивости и прочности таких сооружений. Такие возмущения представляют пространственно-временные случайные поля, нестационарные во времени и неоднородные по пространственным координатам [2]. Использование математических моделей колебаний со столь сложными возмущениями чрезвычайно затруднительно, и одна из причин состоит в том, что каждое из землетрясений является уникальным по своим параметрам, нет достаточной статистической информации. Для сооружений с малыми размерами в плане, к которым относятся стержни, рассматриваемые здесь, достаточно иметь плоскую модель колебаний вместо пространственной.

Хотя постановка краевой задачи о поперечных и продольных колебаниях вертикальных стержней с учётом собственного веса, но без учёта сил сопротивления и эффектов вращения была рассмотрена давно, эта тема остаётся недостаточно изученной. Рассмотрим при

© Культербаев Х.П., Алокова М.Х., 2017

традиционных обозначениях вертикальный стержень, в верхнем конце которого расположена сосредоточенная масса M_0, с осевым моментом инерции I_0.

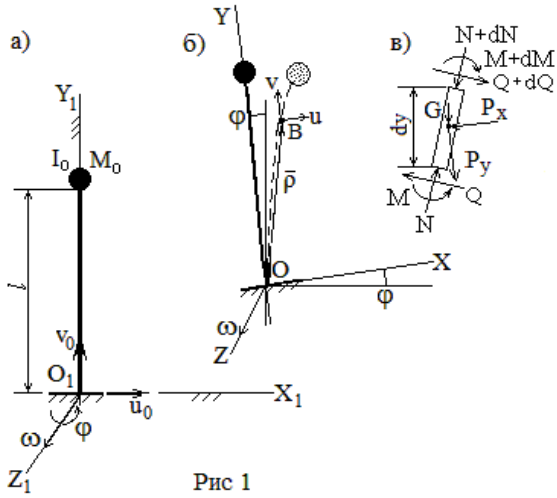


Рис 1

Расчётная динамическая модель такого сооружения представлена на рис. 1а. Источником колебаний является векторный процесс $f(t)=\{u_0, v_0, \varphi\}$ с компонентами в виде горизонтального, вертикального линейных перемещений $u_0(t)$, $v_0(t)$ и углового перемещения $\varphi(t)$.

Стержень совершает плоскопараллельное сложное движение, представляемое абсолютным, переносным и относительным движениями. Последние являются следствием изгибных и продольных деформаций в процессе соответствующих колебаний. На рис. 1а изображена инерциальная система отсчёта $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, неподвижная по отношению к Земле.

Как известно, плоскопараллельное движение тела описывается уравнениями в векторной и скалярной формах

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R} \qquad (1)$$

$$I\varepsilon = M. \qquad (2)$$

Здесь m – масса тела; $\bar{a}$ – вектор абсолютных ускорений с соответствующими компонентами; $\overline{F}, \overline{R}$ – главные векторы активных и реактивных сил; $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ – угловое ускорение вращательного движения относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа; M – главный момент всех внешних сил.

Используя теорему Кориолиса, абсолютное ускорение $\bar{a}$ можно выразить как сумму относительного, переносного и кориолисова ускорений

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c. \qquad (3)$$

Для дальнейших рассуждений удобно ввести подвижную систему координат $OXYZ$ (рис. 1б), вращающуюся вокруг оси Z с угловой скоростью $\omega = \dot{\varphi}$ и угловым ускорением ε. Подставив (3) в (1), получим

$$m\bar{a}_r = \overline{F} + \overline{R} + \overline{F}_e + \overline{F}_c. \qquad (4)$$

Последние два слагаемых в правой части (4) являются переносной и кориолисовой силами инерции и дают «поправку» ко второму закону Ньютона для неинерциальной системы отсчёта $OXYZ$. Они определяются формулами

$$\overline{F}_e = -m\bar{a}_e, \quad \overline{F}_c = -m\bar{a}_c \ . \qquad (5)$$

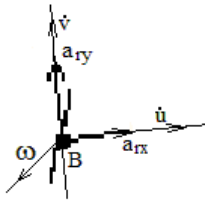


Рис. 2

Уравнения (3) и (4) конкретизируем для материального тела в виде частицы (или элемента) длины dy (рис. 1в). Она обладает следующими параметрами: погонная масса $m = \gamma A$; масса $dm = m\,dy$; осевой момент инерции $dI = I\,dy$ относительно центральной оси.

На рисунке 1в указаны продольная сила N, поперечная сила Q, изгибающий момент M, равнодействующая распределённой силы тяжести стержня G, составляющие равнодействующей удельных распределённых сил линейно-вязкого трения P_x, P_y.

При составлении уравнения (4) в координатной форме проекции векторов далее будут браться относительно переносных осей X, Y, Z. Скорости и относительные ускорения в произвольной точке B показаны на рис. 2.

$$\bar{a}_r = \{a_{rx},\, a_{ry},\, 0\} = \{\ddot{u},\, \ddot{v},\, 0\}.$$

Главный вектор активных сил $\bar{F} = \{F_x,\, F_y,\, 0\}$ образуется за счёт силы тяжести $G = mg\,dy$ и сил линейно-вязкого трения

$$P_x = -dm\,\eta\dot{u} = -m dy\,\eta\dot{u} \qquad P_y = -dm\,\eta\dot{v} = -m\,dy\,\eta\dot{v}.$$

$$F_x = -G\sin\varphi + P_x = -mg\,dy\sin\varphi - mdy\,\eta\dot{u}\ ,$$

$$F_y = -G\cos\varphi + P_y = -mg\,dy\cos\varphi - m\,dy\,\eta\dot{v}.$$

В главный вектор реакций связей R включаются внутренние силы в сечениях. Его компонентами будут

$$R_x = N\sin(\varphi+u') - (N+dN)\sin(\varphi+u') - Q\cos u' + \\ + (Q+dQ)\cos\ u' = -dN\sin(\varphi+u') + dQ\cos\ u', \tag{6}$$

$$R_y = N\cos(\varphi+u') - (N+dN)\cos(\varphi+u') + Q\sin u' - \\ - (Q+dQ)\sin u' = -dN\cos(\varphi+u') - dQ\sin u'. \tag{7}$$

Здесь и далее штрихи в верхних индексах означают дифференцирование по независимой переменной y. Внутренние силы, входящие в полученные результаты, выразим через перемещения

$$N = cv', \qquad c = EA, \qquad dN = cv''dy, \qquad M = bu'',$$

$$b = EJ, \qquad dM = bu'''dy, \qquad Q = bu''', \qquad dQ = bu^{IV}dy.$$

Подставим в (6), (7) и получим

$$R_x = -cv''dy\sin(\varphi+u') + bu^{IV}dy\cos\ u',$$

$$R_y = -cv''dy\cos(\varphi+u') - bu^{IV}dy\sin u'.$$

Переносное ускорение определяется последовательностью формул

$$\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{\rho}) + \bar{\varepsilon}\times\bar{\rho}, \qquad \bar{a}_0 = \{\ddot{u}_0, \ddot{v}_0, 0\}, \quad \omega = \dot{\varphi},$$

Перепишем (4) в проекциях на координатные оси

$$mdy\,\ddot{u} = -mg\,dy\sin\varphi - mdy\,\eta\dot{u} - cv''dy\sin(\varphi+u') + \\ + bu^{IV}dy\cos\ u' - mdy\left(\ddot{u}_0 - \omega^2 u - \varepsilon w\right) - 2m\,dy\,\omega\dot{v}; \tag{8}$$

$$m\,dy\,\ddot{v} = -mg\cos\varphi\,dy - m\,dy\,\eta\dot{v} - cv''dy\cos(\varphi+u') - \\ - bu^{IV}dy\sin u' - m\,dy\left(\ddot{v}_0 + \omega^2 w + \varepsilon u\right) + 2m\,dy\,\omega\dot{u} \tag{9}$$

Уравнения (8), (9) разделим на $m\,dy$ и получим

$$\ddot{u} = -g\sin\varphi - \eta\dot{u} - sv''\sin(\varphi + u') + ku^{IV}\cos u' - \\ - \ddot{u}_0 + \omega^2 u + \varepsilon w - 2\omega\dot{v} \tag{10}$$

$$\ddot{v} = -g\cos\varphi - \eta\dot{v} - sv''\cos(\varphi + u') - ku^{VI}\sin u' - \\ - \ddot{v}_0 - \omega^2 w - \varepsilon u + 2\omega\dot{u} \tag{11}$$

$$s = c/m, \qquad k = b/m, \qquad y \in (0, l) \qquad t > 0.$$

Теперь обратимся к уравнению (2) и запишем для вращающейся частицы

$$I\theta = -M - dM + M - (Q + dQ)dy = -dM - Qdy\,. \tag{12}$$

Здесь θ – угловое ускорение.

$$\theta = \ddot{u}', \qquad I = \gamma J\,dy\,,$$

Несложные преобразования дают

$$\ddot{u}' = eu''', \qquad e = -2b/\gamma J\,, \quad y \in (0, l), \qquad t > 0 \tag{13}$$

К уравнениям (10), (11), (13) необходимо присоединить дополнительные условия в виде начальных и граничных условий.

$$u(y, 0) = 0, \quad \dot{u}(y, 0) = 0, \quad v(y, 0) = 0, \quad \dot{v}(y, 0) = 0, \\ \varphi(0) = 0, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0. \tag{14}$$

Граничные условия на нижнем конце будут соответствовать условиям

$$u(0, t) = u_0(t), \qquad u'(0, t) = \varphi(t). \tag{15}$$

На верхнем конце учтём наличие массы M_0 с осевым моментом инерции I_0 и запишем

$$bu''(l, t) - I_0\ddot{u}'(l, t) = 0, \quad bu'''(l, t) - M_0\ddot{u}(l, t) = 0\,. \tag{16}$$

Система уравнений и дополнительных условий (10)–(16) позволяет решить обширный комплекс проблем для рассматриваемого класса сооружений.

Библиографический список

1. Культербаев Х.П. Колебания вертикальной стойки переменного сечения при гармонических и случайных векторных возмущениях. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20–24 августа 2015 г.) – Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2015. – С. 163.

2. Назаров Ю.П. Расчётные модели сейсмических воздействий. – М.: Наука, 2012. – 414 с.

Сведения об авторах

Культербаев Хусен Пшимурзович, доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова. E-mail: kulthp@mail.ru.

Алокова Мадина Хасановна, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова. E-mail: madina-alokova@yandex.ru.

УДК 657.1.011.56

Лебедь Д.В., Викторов С.В.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ ВЕДЕНИЯ БУХГАЛТЕРСКОГО УЧЕТА

В работе рассматривается сравнительный анализ специализированных программных средств автоматизированного ведения бухгалтерского учета. Сравниваются преимущества и недостатки по функциональным возможностям, качеству и цене программного обеспечения для крупных и мелких предприятий и организаций с точки зрения вопроса выбора оптимального решения.

Ключевые слова: бухгалтерский учет, автоматизация бухгалтерии, 1С:Бухгалтерия, ПАРУС-Предприятие.

Lebed D.V., Viktorov S.V.

COMPARATIVE REVIEW OF PROGRAM PROVIDING FOR ACCOUNTING

In work the comparative analysis of specialized software of the automated conducting accounting is considered. Advantages and shortcomings on functionality, quality and the price of the software for the large and small enterprises and the organizations from the point of view of a question of the choice of the optimal solution Sravnivnivatsya.

Keywords: accounting, automation of accounts department, 1С:Бухгалтерия, ПАРУС-Предприятие.

Ведение бухгалтерского учёта на современном этапе его развития не возможно без использования специализированных программных средств. Ведение автоматизированных информационных баз данных контрагентов предприятий или юридических лиц значительно упрощают работу бухгалтера. С развитием информационных техно-

© Лебедь Д.В., Викторов С.В., 2017

логий появляется множество разнообразного программного обеспечения для бухгалтерского учёта, и вопрос выбора оптимального по функциональным возможностям, качеству и цене такого программного обеспечения для отдельных предприятий и организаций остается актуальным.

Любое программное средство для ведения бухгалтерского учёта должно предоставлять пользователю ряд необходимых функций:

- сбор и регистрация первичных документов;
- составление регистра хозяйственных операций;
- заполнение всех форм бухгалтерской отчётности;
- проведение расчётов;
- анализ законодательных статей;
- работа с основными активами предприятия.

Бухгалтерский учёт предполагает использование предприятиями разных методов формирования отчётности, что влечет необходимость в использовании нескольких видов программ в зависимости от формы организации юридического лица. В этом случае могут применяться узконаправленные для определённых видов деятельности программные средства, которые не имеют универсальных инструментов для комплексного решения автоматизации всех задач, но обладают определенными преимуществами. Среди подобных программ можно выделить следующие [1].

1) «Налогоплательщик ЮЛ» – для подготовки форм бухгалтерской и налоговой отчётности. Предоставляет возможность сохранения готовых форм в формате XML, автозаполнения, выявления ошибок, ведения нескольких компаний одновременно.

2) «Инфо-предприятие» – для учёта малого бизнеса (не более 100 сотрудников). Предоставляет возможность изменения настроек, обновления через Интернет отчётных алгоритмов и форм.

3) «Инфо-бухгалтер» – для предприятий среднего уровня. Позволяет вести складской и кадровый учёт, расчёт заработной платы. Без ограничений по количеству работников.

4) «Бизнес Пак» – для оформления первичной документации.

5) «Упрощёнка» – расчёт единого налога физических и юридических лиц. Позволяет автоматически формировать налоговую декларацию, квитанции оплаты в банке, рассчитывать налоги и др.

Подобные программы для бухучета могут быть полезными для небольших предприятий в решении определённых проблем, например в налоговой отчётности.

Для полноценного контроля за финансовой и хозяйственной деятельностью больших предприятий и увеличения эффективности их работы необходимы более универсальные комплексные системы автоматизации бухгалтерского учёта. Эти системы имеют не только широкий спектр выполняемых действий, но и качественное обслуживание, постоянное обновление баз данных. Среди подобных платформ, распространёнными и популярными в бухгалтерии считаются: «1С», «Парус-Предприятие», «Галактика ERP», «БОСС».

Рассмотрим две наиболее популярные из них.

Система «1С:Бухгалтерия» – один из самых распространённых методов автоматизации делопроизводства на предприятии любой направленности и формы организации [2]. Как универсальный способ организации ведения аналитического учёта по всем имеющимся областям, эта системы позволяет обрабатывать:

– денежные средства;
– активы («основные средства», «материально-производственные запасы», «товарно-материальные ценности», «нематериальные активы»);
– валютные операции;
– расчёты с дебиторами и кредиторами;
– производственный и реализационный учёт.

К несомненным плюсам программы нужно отнести возможность формирования свободных отчётов для внутреннего пользования, формирования внешних обработок [3], создания налоговой и финансовой отчётности установленного образца по существующим стандартам. Несмотря на тот факт, что бухгалтерский учёт в данной системе должен быть строго «привязан» к конкретному предприятию, следует отметить стабильность работы и постоянное совершенствование программы.

Главными преимуществами системы «1С:Бухгалтерия» являются:

– возможность автоматизации всех видов налогового и бухгалтерского учёта;
– гибкость программы при любых условиях;
– наличие версий, обеспечивающих учёт на всех коммерческих и государственных предприятиях;
– высокая производительность;
– своевременное обновление данных в соответствие с изменениями в законодательстве.

Среди недостатков выделяют сложность обучения работе с «1С», поиска ошибок и переноса данных из других программ.

Кроме распространённой «1С» используются и другие программы для бухгалтерского учёта. Например, «Парус-Предприятие» – отличный вариант для средних и крупных организаций любой направленности. Простой интерфейс пользователя с богатым инструментарием обеспечивает все необходимые функции.

К достоинствам системы можно отнести:

– единое информационно-управленческое пространство (от бухгалтерии и налогов до кадров);

– интеграция с Microsoft Excel;

– большое количество проводников для быстрой разработки шаблонов;

– обширную библиотеку.

«Парус-Предприятие» состоит из набора модулей, предназначенных для автоматизации определённого участка бухгалтерского учета.

При выборе следует опираться и на нужды организации. Если это малый или средний бизнес, бухгалтеру будет достаточно программы с заранее установленными настройками и схемами, которые не меняются. Для наилучшей оптимизации утилит на отдельных предприятиях рекомендуется обратить внимание на настраиваемые версии.

Библиографический список:

1. Меркулова Т.А., Ларионова О.Б. Автоматизация бухгалтерского учета (пользовательский уровень): Учебное пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2006 – 171 с.

2. Харитонов С.А. Бухгалтерский и налоговый учет в «1С:Бухгалтерии 8» (редакция 3.0). Издание 5. – М., 2014. – 796 с.

3. Макушев С.А., Викторов С.В. Внешняя обработка для отправки электронных сообщений на платформе «1С:Предприяте 8.3» // Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения. Сборник научных трудов Международной научной конференции. – Липецк: ООО «Максимал информационные технологии», 2017. – № 1 (32). – С. 10–14.

Сведения об авторах

Лебедь Дарья Викторовна, бухгалтер-экономист МБУ «ЦБ УК МР Аургазинского района РБ». E-mail: lebed-darya@bk.ru.

Викторов Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Стерлитамакского филиала БашГУ. E-mail: viktorov@rambler.ru.

УДК 004.657

Макушев С.А., Викторов С.В.

РЕАЛИЗАЦИЯ ОТПРАВКИ ЭЛЕКТРОННЫХ СООБЩЕНИЙ В ВИДЕ ВНЕШНЕЙ ОБРАБОТКИ ДЛЯ ПЛАТФОРМЫ «1С:ПРЕДПРИЯТИЕ 8.3»

В данной статье рассмотрен пример создания внешней обработки для отправки электронных писем на платформе «1С:Предприятие 8.3».

Ключевые слова: внешняя обработка, электронное сообщение.

Makushev S.A., Viktorov S.V.

REALIZATION OF SENDING ELECTRONIC MESSAGES IN THE FORM OF EXTERNAL PROCESSING FOR THE 1S:PREDPRIYATE 8.3 PLATFORM

In this article an example of creation of external processing for sending e-mails on the 1C:Enterprise 8.3 platform is reviewed.

Keywords: external processing, electronic message.

Внешняя обработка «1С:Предприятия» – это компонент, который не включен в состав самой платформы и хранится в виде отдельного файла. Основное его достоинство заключается в том, что такую обработку можно внедрить в различных прикладных решениях без изменения самой конфигурации. Главным отличием внешней обработки является возможность ее проектировать и выполнять в процессе работы «1С:Предприятия», без повторного сохранения конфигурации прикладного решения.

В режиме «1С:Предприятие» внешнюю обработку можно отладить, открыв ее как любой другой файл, хранящийся на жестком диске. Такая обработка будет выполняться точно так же, как если бы она присутствовала в составе прикладного решения. Она может быть включена в структуру конфигурации прикладного решения как новый объект.

Для использования внешней обработки в «1С:Предприятие» необходимо открыть ее так же, как это делается в конфигураторе. Но следует учесть, что в «1С:Предприятие» внешняя обработка открывается только для использования, то есть пользователь не может ее изменить [1].

© Макушев С.А., Викторов С.В., 2017

Редактирование внешней обработки выполняется в конфигураторе. Чтобы открыть готовую внешнюю обработку, нужно выбрать пункт Файл – Открыть. В появившемся диалоге указать тип файла – Внешняя обработка – и его имя. При открытии внешней обработки в конфигураторе, открывается диалог редактирования объекта. В отличие от других объектов конфигурации, отладка внешней обработки проходит без перезапуска «1С:Предприятия».

Органайзер будет хранить всю информацию на жестком диске в виде структуры папок и файлов, имена которым назначаются в соответствии с датой и временем хранимого задания. Для учета факта выполнения задания в обработке предусмотрен числовой индикатор (1 – выполнено, 0 – не выполнено) в начале каждой строки с заданием (рис. 1).

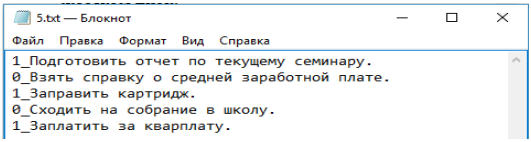


Рис. 1. Структура каталогов

Алгоритм формирования внешней обработки [2]:

1. В поле Форма обработки нажать линзу, чтобы создать основную форму.

2. В форме добавить поле «Поле календаря» и таблицу значений с двумя колонками. Первая колонка будет отвечать за выполненость задания, а вторая за его описание.

3. В модуле основной формы дописать все не достающие функции и процедуры.

Рассмотрим более подробно три основные процедуры «ОбновитьЗаметки», «ДобавитьСтрокуТЗ», «ЗагрузитьЗаметки».

Процедура «ОбновитьЗаметки» загружает с таблицы значений заметки в текстовый файл.

```
&НаКлиенте
Процедура ОбновитьЗаметки();
    Путь = КаталогКалендарь1С+"\"+Год(Календарь)+"\"+Месяц(Календарь);
    ПроверитьСуществованиеКаталога(Путь);
    ФайлЗаметок = Новый ЗаписьТекста(Путь+"\"+День(Календарь)+".txt");
    Для Каждого Строка Из ТЗ Цикл
    Если Строка.Выполнено Тогда
            НоваяСтрока = "1_"+Строка.Дела;
        Иначе
            НоваяСтрока = "0_"+Строка.Дела;
    КонецЕсли;
    ФайлЗаметок.ЗаписатьСтроку(НоваяСтрока);
    КонецЦикла;
    ФайлЗаметок.Закрыть();
    ЭтаФорма.Элементы.Календарь.Обновить();
КонецПроцедуры
```

Процедура «ДобавитьСтрокуТЗ» добавляет строку в текстовый файл.

```
&НаСервере
Процедура ДобавитьСтрокуТЗ(Строка)
    СтрЗам = ТЗ.Добавить();
    Если Лев(Строка,1) = "1" Тогда
        СтрЗам.Выполнено = Истина;
    Иначе
        СтрЗам.Выполнено = Ложь;
    КонецЕсли;
    СтрЗам.Дела = Сред(Строка,3,СтрДлина(Строка));
КонецПроцедуры
```

Процедура «ЗагрузитьЗаметки» загружает с текстового файла заметки в таблицу значений.

```
&НаСервере
Процедура ЗагрузитьЗаметки()
    ТЗ.Очистить();
    Путь = КаталогКалендарь1С+"\"+Год(Календарь)+"\"+Месяц(Календарь);
    Если ПроверитьСуществованиеФайла(Путь+"\"+День(Календарь)+".txt") Тогда
        ФайлЗаметок = Новый ЧтениеТекста(Путь+"\"+День(Календарь)+".txt");
        Строка = ФайлЗаметок.ПрочитатьСтроку();
        Пока Строка <> Неопределено Цикл
            ДобавитьСтрокуТЗ(Строка);
            Строка = ФайлЗаметок.ПрочитатьСтроку();
        КонецЦикла;
    КонецЕсли
КонецПроцедуры
```

Реализованная в рамках данной работы внешняя обработка не требует от пользователя дополнительных действий с оболочкой системы (сохранения изменений или загрузки новых данных), так как она использует события элементов формы. На рисунке 2 демонстрируется интерфейс органайзера.

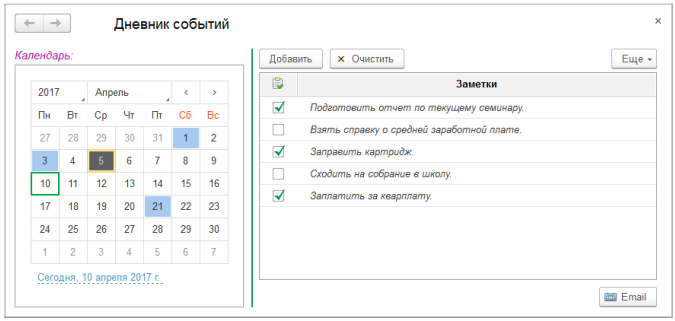


Рис. 2. Результат выполнения обработки

Для парсинга информации предполагается использование разработанных ранее алгоритмов синтаксического анализа [3].

Главное отличие данного органайзера от встроенного в том, что он может работать в любой конфигурации и хранить информацию независимо от платформы 1С.

Библиографический список

1. Кашаев С.М. 1С:Предприятие 8.3. Программирование и визуальная разработка на примерах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2015 – С. 91–99.

2. Макушев С.А., Викторов С.В. Внешняя обработка для отправки электронных сообщений на платформе «1С: предприятие 8.3» // Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения: Сборник научных трудов Международной научной конференции «Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения» (Российская Федерация, г. Липецк, 30 января 2017 г.) / Под ред. М.Ю. Левина. – Липецк: ООО «Максимал информационные технологии», 2017 – С. 10–14.

3. Викторов С.В., Викторова Ю.В. Программное средство для численного решения математических задач на основе синтаксического интерпретатора выражений // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов Наука и образование. – 2014. – Т. 1. – № 12. – С. 14.

Сведения об авторах

Макушев Сергей Александрович, магистрант 1 курса заочного обучения СФ БашГУ. E-mail: mak-ser1@yandex.ru.

Викторов Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент филиала БашГУ в г. Стерлитамак. E-mail: viktorov@rambler.ru.

УДК 004.942

Маликова Ю.В., Чиганова Н.В.

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММЫ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДРОБНОЙ ФУНКЦИИ

В данной статье рассматривается постановка и решение прямой кинетической задачи с применением интервального анализа, где неопределенности и неоднозначности возникают с самого начала и являются неотъемлемой частью постановки задачи.

Ключевые слова: оптимизация, интервальный анализ, интервалы, интервальные неопределенности.

Malikova J.V., Chiganova N.V.

IMPLEMENTATION OF THE PROGRAM INTERVAL OF THE OBJECTIVES FRACTIONAL FUNCTIONS

This article discusses the formulation and solution of the direct kinetic problem with the use of interval analysis, where uncertainty and ambiguity arise from the very beginning and are an integral part of the task.

Key words: optimization, interval analysis, interval, interval of uncertainty.

На практике достаточно часто встречают системы с неточно известными или недетерминированными параметрами. Основные причины возникновения таких систем заключаются в естественной неопределенности, в неточном задании параметров из-за погрешностей при расчетах или измерениях, в изменении во времени некоторых параметров систем, а также в острой необходимости совместного исследования целых семейств однотипных систем, которые имеют идентичные функции-характеристики, а различаются значениями параметров этих функций [2].

Принято считать, что оформление интервального анализа в самостоятельную научную дисциплину состоялось в XX веке с появлением ЭВМ, причем развитие интервальных вычислений оказалось тесно связанным с развитием и распространением практических вычислений.

В 1931 году Р. Янг разработала арифметику для вычислений с множествами чисел. В 1951 году П. Дайвер в США рассматривал специальный случай замкнутых интервалов (числовые диапазоны) в связи с необходимостью учета погрешности в численном анализе. В 1956–1958 годах появились работы ученых М. Вармуса в Польше и

© Маликова Ю.В., Чиганова Н.В., 2017

Т. Сунаги в Японии, предлагавших классическую интервальную арифметику и намечавших ее приложения.

В России «интервальная» история начинается с 20-х годов прошлого века. Связана она с именем известного русского математика В.М. Брадиса. Примерно с этого времени он изучал метод границ – способ организации вычислений, приводящий к достоверным двусторонним границам точного значения вычисляемого результата, фактически аналогичный интервальной арифметике.

В 1962 году в одном из первых выпусков «Сибирского математического журнала» появилась статья Л.В. Канторовича, обозначившего эту тематику как приоритетную для вычислительной науки. Особую значимость этой статье придает то обстоятельство, что в ней впервые сформулированы исходные положения нового подхода к анализу данных, при котором теоретико-вероятностная модель ошибки заменяется на ограниченную по величине ошибку, относительно которой никаких других допущений не делается [1].

Постановка задачи. Рассмотрим обычную функцию одной независимой переменной:

$$y = f(x) \tag{1}$$

однозначно отображающую заданное множество X={x} независимых переменных x в заданное множество $Y = \{y\}$ зависимых переменных y в соответствии с некоторым законом f-функцией.

Теперь рассмотрим недетерминированную (именно, интервальную) функцию одной независимой переменной

$$\tilde{y} = \tilde{f}(x), \tag{2}$$

Задача заключается в нахождении экстремума на интервале (a,b), где a,b интервальные переменные.

Любую интервальную функцию $\tilde{f}$ можно представить в виде пары обычных функций f_1, f_2:

$$\tilde{f} = \{f_1, f_2\}, \tag{3}$$

которые имеют вид:

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x) \tag{4}$$

Интервальная функция задана в разделенном виде, в котором верхняя и нижняя границы интервального значения функции выражены каждая по отдельности. Этот вид представления интервальной функции вытекает из выражений (2)–(4). Именно, из (3), (4) следует явное представление интервальной функции в виде интервала:

$$[y_1, y_2] = [f_1(x), f_2(x)], \quad (5)$$

границы которого выражаются формулами:

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x) \quad (6)$$

Вычисление интервального значения $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ интервальной функции (2), соответствующего значению x независимой переменной этой функции, осуществляется по следующему алгоритму:

Шаг 1. Записываем вычисляемую интервальную функцию типа (2) в разделенном виде (5), (6) с помощью нижней f_1 и верхней f_2 граничных функций функции (2).

Шаг 2. Вычисляем нижнюю граничную функцию f_1, используя для этого какой-либо подходящий известный метод вычисления обычных (детерминированных) функций .

Шаг 3. Вычисляем верхнюю граничную функцию f_2, используя ту же методику, что и на шаге 2.

Шаг 4. Соединяя вычисленные значения нижней f_1 и верхней f_2 граничных функций, получаем явное представление (5) вычисленной интервальной функции (2) в виде интервала[3].

В результате вычислений получим значения минимума нижней и максимума верхней границ, что демонстрируется на графике функции (рис. 1).

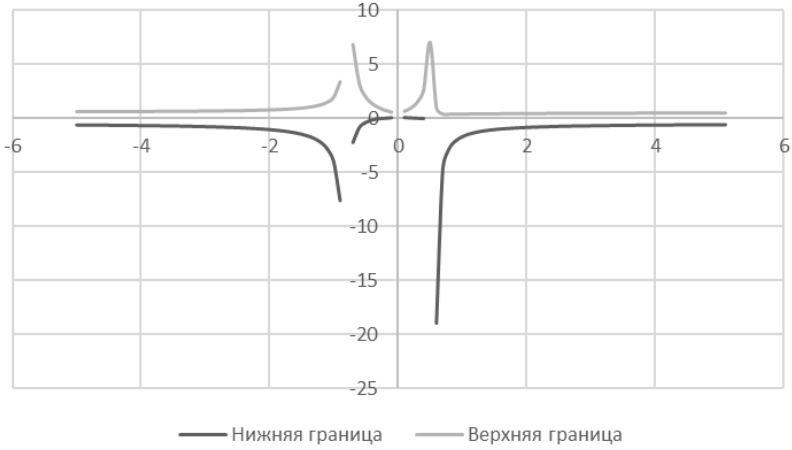


Рис. 1. График дробной функции

В данной работе разработаны систематические методы решения задач расчета и анализа поведения недетерминированных функций интервального типа, в которых функции определяются с точностью до интервала возможных значений. В качестве математического аппарата использованы интервальная алгебра и дифференциальные характеристики верхней и нижней границ изучаемых интервальных функций, которые можно рассматривать как специальное дифференциальное исчисление для неточно задаваемых функций интервального типа. Использование разработанных методов и математического аппарата позволило достичь поставленной в работе цели – устранение противоречия между новыми сложными задачами и существующими, не пригодными для их решения подходами.

Библиографический список

1. Вайтиев В.А. Двусторонние ограничения решений прямых и обратных задач химической кинетики: дис. канд. ф.-м. наук: / Владимир Анатольевич Вайтиев; БашГУ. – Уфа., 2014. – 151 с.

2. Пантелеев А.В., Бортраковский А.С., Летова Т.А. Оптимальное управление в примерах и задачах. – М.: Изд-во МАИ, 1996. – 212 с.

3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М., Наука, 1969. – 393 с.

Сведения об авторах

Маликова Юлия Владимировна, студентка 4 курса направления ПМИ, Стерлитамакский филиал БашГУ, Стерлитамак. E-mail: half.away@yandex.ru.

Чиганова Наталья Викторовна, к. ф.-м. н., доцент кафедры ПИП, Стерлитамакский филиал БашГУ, Стерлитамак. E-mail: natali-th@yandex.ru.

УДК 004.043

Матвеев В.С.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БАЗ ДАННЫХ В ПРИЛОЖЕНИИ WINDOWS FORMS APPLICATION В СРЕДЕ VISUAL STUDIO СИ ШАРП

Исследование выполнено в среде Visual Studio Си Шарп с использованием технологии разработки базы данных средствами ActiveX Data Object на платформе .NET. Реляционная база данных выполнена в СУБД Microsoft Access 2010. В ходе работы была определена и разработана предметная область применения, создана БД в СУБД Microsoft Access 2010, интегрирована БД в среду Visual Studio, произведена разработка пользовательского интерфейса в среде Visual Studio и ПО.

Ключевые слова: база данных, интерфейс, среда Visual Studio, программное обеспечение

Matveev V.S.

USE OF DATABASE IN WINDOWS FORMS APPLICATION IN VISUAL STUDIO #SHARP

The study was performed in Visual Studio #sharp using the technology of database development with the help of ActiveX Data Object on the platform .NET. A relational database implemented in Microsoft Access 2010. In the course of work the following tasks were set and solved: the definition of the subject area is given, the creation of the database itself in Microsoft Access 2010 is made, and database integration in Visual Studio that produced the user interface design in Visual Studio is presented.

Key words: database, interface, Visual Studio, software.

Объектом нашего исследования является использование баз данных. Цель – ознакомление с современными технологиями проектирования и разработки приложений баз данных на языке C# под Windows на платформе .NET. Для достижения цели исследования поставлены и решены следующие задачи:

– разработка технического задания на проектирование программного обеспечения (разработка предметной области);

– разработка алгоритма и реализации программного обеспечения на основе современных средств Microsoft Visual Studio;

– создание и использование пользовательского интерфейса;

– использование элементов графического дизайна для улучшения внешнего вида форм проекта.

База данных может быть использована на предприятии, которое предоставляет услуги ремонта транспортных средств, менеджером и

© Матвеев В.С., 2017

механиком. Данная база данных состоит из 5 таблиц: Orders, Cars, Drivers, Services, Employees, Login.

Таблица Orders (Главная таблица с заказами) имеет 8 полей:

- orderId (Id заказа)
- carId (Id автомобиля)
- serviceId (Id сервиса)
- mechanicId (Id механика)
- datep (Дата принятия заказа)
- price (Стоимость услуги)
- problemDescription (Описание проблемы)
- status (Статус заказа)

orderId	carId	serviceId	mechanicId	datep	price	problemDes	status
1	1	2	1	21.10.2016	1500	Problem5	ready
2	2	2	3	12.10.2016	3666	Problem5	decline
3	3	1	5	05.10.2016	15200	Problem5	execute
5	4	2	3	08.09.2016	25000	Problem5	ready
6	5	1	-1	21.10.2016	1681	Problem5	accepted
7	13	2	3	02.12.2016	12000	Стучит коробк	ready

Таблица Cars (Таблица Автомобилей) имеет 7 полей:

- carID (Id автомобиля)
- driverId (Id водителя)
- brand (Марка авто)
- model (Модель авто)
- regSign (Регистрационный номер)
- color (цвет)
- date (год выпуска)

carID	driverId	brand	model	regSign	color	date
1	1	Bmw	m5	o001oo178	Red	2015
2	2	Audi	a8	e153кх47	Black	2005
3	3	Mazda	6	p104хс01	White	2014
4	4	Lada	2112	н200ка05	White	2001
5	5	Mercedes	W123	к333ек777	Red	1980
12	4	Ваз	2106	o000oo111	кецуы	2003
13	9	Ваз	2107	р250ку178	Красный	2002

Таблица Drivers(Таблица Водителей) имеет 7 полей:

- driverId (Id водителя)
- fio (фио)
- birthday (дата рождения)
- registration (прописка)
- pasport (номер паспорта)
- phone (телефон)
- email (email)

driverId	fio	birthday	registration	pasport	phone	email
1	Kyla Kirby	08.01.2016	Ap #999-6751 L	45391303	(751) 564-5304	velit.egestas@miAliquam.co
2	Naida Horne	11.09.2015	1051 Nec St.	30407038	(759) 794-2955	blandit@Morbineque.ca
3	Ashton Palmer	26.06.2017	P.O. Box 835, 8	40519362	(813) 326-3445	vulputate.posuere.vulputate
4	Jasmine Shelt	26.12.2016	P.O. Box 345, 2	5750710	(314) 700-2267	rutrum.eu@miAliquam.org
5	Savannah Lott	08.02.2017	6607 Parturien	35682354	(629) 109-6983	augue.malesuada.malesuad
9	Иванов Иван I	15.01.1982	г. Санкт-Петер	801000105	(891) 158-2218	ivanov@mail.ru

Таблица Services(Таблица Сервисов) имеет 4 поля:

- serviceID (id сервиса)
- name (название)
- adress (адрес)
- phone (телефон)

serviceID	name	adress	phone
1	Sto1	P.O. Box 537, 9	(266) 910-3633
2	Sto2	Ap #380-9453 M	(638) 393-4293
(№)			

Таблица Employees (Таблица Сотрудников) имеет 10 полей:

- employeeID (Id сотрудника)
- surname (фамилия)
- first_name (имя)
- second_name (отчетсво)
- job (должность)
- birth (дата рождения)
- registration (прописка)
- phone (телефон)
- email (email)
- photo (ссылка на фотографию)

employeeID	surname	first_name	second_name	job	birth	registration	phone	email	photo
-1	null	null	null	null		null	null	null	null
0	administrator	none	none	administrator	03.12.2016	none	none	none	
1	Ezekiel	Sandoval	Altenberger	mechanic	20.02.2016	987-4507 Magr	(988) 188-9768	Aliquam.nec.e	nophoto.jpg
2	Carissa	Stanton	Wan	manager	11.09.2016	987-4507 Magr	(180) 734-8942	arcu@egetipsu	Carissa S.W.jp
3	Brianna	Mcdonald	Burgess	mechanic	03.11.2017	342-8403 Dui. A	(358) 491-8417	Nam.ac.nulla@	Brianna M.B..p
4	Ahmed	Mckay	Eskandari-qajar	manager	15.01.2017	901-8554 Cubil	(388) 491-3026	iaculis@Intege	nophoto.jpg
5	Zoe	Solomon	Cabot	mechanic	13.04.2016	P.O. Box 537, 9	(266) 910-3633	sem@lobortis	nophoto.jpg
8	gfsdads	gsdfsdfg	fgsdfsgs	mechanic	12.12.1212	gtwerqwe	(116) 531-6853	rsdrq4q3	nophoto.jpg

Таблица Login (Таблица данных входа) имеет 4 поля:

- epmloyeeID (Id сотрудника)
- login (Логин)
- password (Пароль)
- type (Тип пользователя)

epmloyeeID	login	password	type
1	admin	e10adc3949ba59abbe56e057f20f883e	administator
2	test1	e10adc3949ba59abbe56e057f20f883e	manager
3	test	e10adc3949ba59abbe56e057f20f883e	mechanic

Связываем таблицы по ключевым полям, получаем следующую структурную схему баз данных (рис. 1):

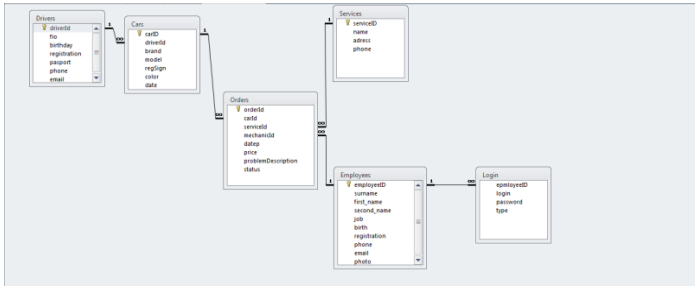


Рис. 1. Схема данных

Работа с программой

Т.к. программа имеет разных пользователей (механик и менеджер), создаем для каждого из пользователя форму, а чтобы знать, кто зашел в программу, добавляем форму авторизации.

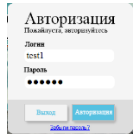


Рис. 2. Интерфейс авторизации

Если человек авторизуется под пользователем типа механик, то откроется форма для механика:

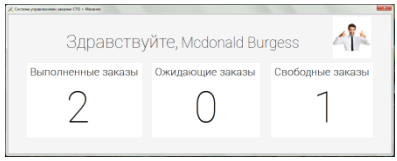


Рис. 3. Интерфейс пользователя «Механик»

Механик имеет возможность просмотреть свободные заказы, заказы, которые он выполняет в данных момент, а также все заказы, которые он уже выполнил, для этого достаточно нажать на белый прямоугольник с нужным типом заказа, и откроется форма, где выведутся заказы (рис. 4).

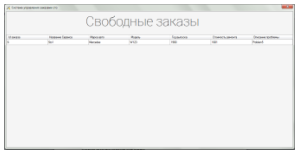


Рис. 4. Пример форм

При нажатии на строку заказа откроется форма с информацией о данном заказе, и, в зависимости от типа заказа, механик сможет либо взять заказ, либо пометить его выполненным или отказаться от него.

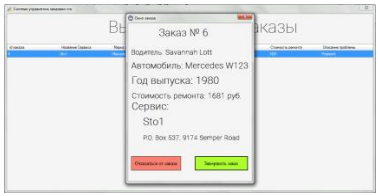


Рис. 5. Пример форм

Если же пользователь войдет в аккаунт менеджера, то откроется окно, предназначенное для данного типа аккаунта:

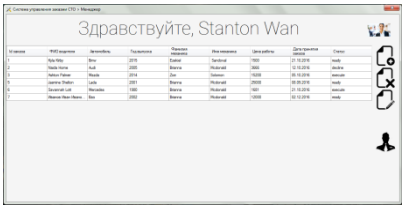


Рис. 6. Интерфейс пользователя «Менеджер»

На главной странице, менеджер может просмотреть информацию о заказе, добавить новый или редактировать существующий заказ. Чтобы добавить заказ, менеджер должен выбрать номер автомобиля, сервис, написать проблему и ввести цену ремонта. Если нужного номера нет в списке, менеджер может добавить новый автомобиль. Для этого ему нужно выбрать водителя, ввести марку, модель, номерной знак, цвет и год выпуска автомобиля. Также, если водителя нет в списке, то менеджер может добавить его.

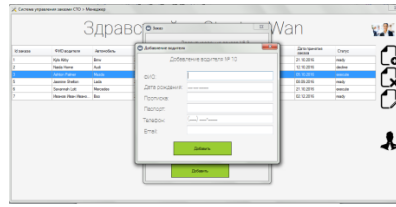


Рис. 7. Добавление записей

Чтобы добавить водителя менеджеру нужно вбить его данные, такие как ФИО, дата рождения, прописка, паспорт, телефон и email. Если же менеджеру нужно отредактировать заказ, он нажимает соответствующую кнопку, и откроется форма с уже введенными данными. В функционал менеджера входит возможность просмотреть список сотрудников, посмотреть информацию о конкретном сотруднике и добавить нового сотрудника.

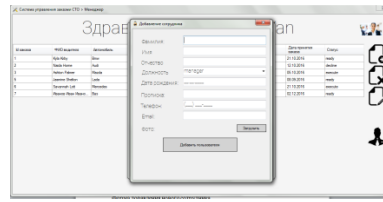


Рис. 8. Информация о сотрудниках

Для этого менеджеру нужно вбить фамилию, имя, отчество, выбрать должность, написать дату рождения прописку, телефон email и выбрать фото на компьютере.

Контроль вводимой информации осуществляется посредством проверки типа вводимой информации, либо можно использовать объект maskedTextBox для ввода номера телефона или даты.

Весь проект строится на SQL-запросах к базе, так как было решено использовать API OLE DB.

Пример SQL запроса:

string query = "SELECT Orders.orderId,Drivers.fio,Cars.brand, Cars.date,Employees.surname,Employees.first_name,price,datep,status FROM ((((Orders LEFT JOIN Cars ON Orders.carId = Cars.carID)LEFT JOIN Drivers ON Cars.driverId = Drivers.driverId)LEFT JOIN Services ON Orders.serviceId = Services.serviceID)Left JOIN Employees ON Orders.mechanicId = Employees.employeeId)";); //выбираем данные для заполнения формы информации о заказе

Таким образом, мы рассмотрели использование баз данных для работы в конкретной предметной области.

Библиографический список

1. Евсеева О.Н. Работа с базами данных на языке C#. Технология ADO.NET:учебное пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – 159 с.
2. Фленов М.Е. Библия C#. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 410 с.
3. Шилдт, Герберт. C# 4.0: полное руководство. Пер. с англ. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2011. – 403 с.

Сведения об авторах

Матвеев Виктор Сергеевич, студент ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский Горный Университет», E-mail elivic@mail.ru.

УДК 517.95

Мартемьянова Н.В.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ ЧАПЛЫГИНА

В работе доказаны теоремы существования решения обратной задачи для вырождающегося уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа.

Ключевые слова: обратная задача, нелокальная задача, уравнение смешанного типа, вырождающееся уравнение, уравнение типа Чаплыгина, существование.

Martemyanova N.V.

NONLOCAL INVERSE PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH CHAPLYGIN'S OPERATOR

In the article we proved theorems about existence of the solution of nonlocal inverse problem for Chaplygin's equation.

Key words: inverse problem, nonlocal problem, Chaplygin's equation, uniqueness, spectral method.

Рассмотрим уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа с неизвестной правой частью

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - b^2K(y)u = f(x) \qquad (1)$$

© Мартемьянова Н.В., 2017

в прямоугольной области $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,-\alpha<y<\beta\}$, где $K(y)=(\operatorname{sgn} y)\,|y|^n$, $n>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $b>0$ – заданные действительные числа, и поставим следующую обратную задачу с нелокальным граничным условием.

Обратная задача. *Найти в области* D *функции* $u(x,y)$ *и* $f(x)$, *удовлетворяющие условиям:*

$$u\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D_-\cup D_+);\qquad (2)$$

$$f(x)\in C(0,1)\cap L_2[0,1];\qquad (3)$$

$$Lu\equiv f(x),\ (x,y)\in D_-\cup D_+;\qquad (4)$$

$$u_x(0,y)=u_x(1,y),\quad u(1,y)=0,\quad -\alpha\le y\le\beta;\qquad (5)$$

$$u(x,\beta)=\varphi(x),\quad u(x,-\alpha)=\psi(x),\quad 0\le x\le 1;\qquad (6)$$

$$u_y(x,-\alpha)=g(x),\quad 0\le x\le 1,\qquad (7)$$

где $\varphi(x),\ \psi(x),\ g(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции,* $\varphi(1)=\psi(1)=0,\ \varphi'(0)=\varphi'(1),\psi'(0)=\psi'(1)$, $D_+=D\cap\{y>0\}$, $D_-=D\cap\{y<0\}$.

Прямые задачи для уравнений смешанного типа со степенным вырождением исследованы в работах [1–3]. Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучены достаточно полно, усилиями многих математиков создана теория обратных задач (см. монографии [4–6] и приведенную там библиографию).

Обратным задачам для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа посвящена работа [7].

Задача (2)–(7) для случая, когда $n=0$ исследована в работах [8, 9]. Начато исследование обратных задач для уравнений параболо-гиперболического типа со степенным вырождением [10]. В работе [11] установлен критерий единственности решения обратной задачи для уравнения (1) с локальными граничными условиями, а в работе [12] – критерий единственности поставленной обратной задачи.

В данной работе доказано существование решения нелокальной обратной задачи (2)–(7) для уравнения (1), которое ранее было построено в виде сумм биортогональных рядов [12].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-31-00421).

Библиографический список

1. Сабитова Ю.К. Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // Известия вузов. Математика. – 2009. – № 12. – С. 49–58.

2. Сабитова Ю.К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Математические заметки. – 2015. – Т. 98. – № 3. – С. 393–406.

3. Сабитова Ю.К. Критерий единственности решения нелокальной задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46. – № 8. – С. 1205–1208.

4. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. – М.: МГУ, 1994. – 208 с.

5. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. – New York; Basel: Marcel Dekker Inc., 1999. – 709 p.

6. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

7. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. – М.: Наука, 2016. – 272 с.

8. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Известия Вузов. Математика. – 2011. – № 2. – С. 71–85.

9. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53. – № 3. – С. 633–647.

10. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Известия Вузов. Математика. – 2015. – № 1. – С. 46–59.

11. Бурханова (Хаджи) И.А. Критерий единственности решения обратной задачи уравнения смешанного типа с оператором типа Чаплыгина // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Труды международной научной конференции: В 2 т. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. – Т. 1. – С. 140–144.

12. Мартемьянова Н.В. Необходимое и достаточное условие единственности решения нелокальной обратной задачи для уравнения типа Чаплыгина // Материалы V Всероссийской научно-практической конференции «Математическое моделирование процессов и систем»,

приуроченной к 110-летию со дня рождения акад. А.Н. Тихонова. – Стерлитамак, Часть III. – С. 19–24.

Сведения об авторе

Мартемьянова Нина Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, математики и методики обучения Самарского государственного социально-педагогического университета. E-mail: ninamartem@yandex.ru.

УДК 538.9

Мигранова Д.Н., Исмагилова Р.Н., Мигранов Н.Г., Кондратьев Д.В.

МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ ШЕВРОНОВ В ПОВЕРХНОСТНО–ОРИЕНТИРОВАННЫХ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

В рамках континуальной модели описания жидких кристаллов исследована система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая поверхностно-стабилизированный сегнетоэлектрический смектик С в геометрии шеврона. Исследованы устойчивые ориентационные и структурные конфигурации.*

Ключевые слова: математическое моделирование, сегнетоэлектрический жидкий кристалл, смектический слой, шеврон.

Migranova D.N., Ismagilova R.N., Migranov N.G., Kondratyev D.V.

MECHANISM OF CHEVRON FORMATION IN SURFACE STABILIZED FERROELECTRIC LIQUID CRYSTALS

The system of nonlinear differential equations describing surface stabilized ferroelectric liquid crystal in the chevron's geometry in the framework of continual model is considered. Stabilized orientations and structure configurations have been investigated.

Key words: the mathematical modeling, ferroelectric liquid crystal, smectic layer, chevron.

В последние годы наблюдается устойчивый интерес к исследованию смектических жидких кристаллов, который обусловлен тем, что эти системы обладают целым рядом структурных и ориентационных особенностей. Они позволяют использовать их в разнообразных устройствах отображения и хранения информации [1, 5]. Среди смектических жидких кристаллов особое место занимают геликоидальные смектики С*, обладающие сегнетоэлектрическими свойствами. В ограниченных

© Мигранова Д.Н., Исмагилова Р.Н., Мигранов Н.Г., Кондратьев Д.В., 2017

ячейках эти системы могут образовывать различные структуры в зависимости от условий на ориентирующих поверхностях.

Запишем феноменологическое выражение свободной энергии для SmC*. Ось *z* направим вдоль нормали к невозмущенным смектическим слоям. Обозначим через u и φ смещение слоев параллельно оси *z* и азимутальный угол, отсчитываемый от поверхности, совпадающей по направлению с осью *y*. Для описания механической нестабильности необходимо учесть нелинейное слагаемое в свободной энергии смектика С. В предположении жесткости молекул, сохраняющих свою длину a_0 и образующих поверхностно-ориентированный SmC* при наклоне молекул на угол θ толщина смектического слоя уменьшается и становится равной $a_0 \cos\theta$. При этом мы полагаем, что толщина образца со смектиком С, помещенном в ячейку между стеклянными пластинами не изменяется и не происходит скольжение слоев вдоль этих пластин (жесткие граничные условия). Следующим условием в рассматриваемой нами математической модели является неизменное количество слоев в процессе перехода от SmA к SmC*. Таким образом, вследствие деформации, в системе возникает напряжение, которое записывается в виде $1-\cos\theta\sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}$, где угол наклона смектического слоя δ выражен через пространственную производную смещения слоя $\frac{du}{dx} = -\operatorname{tg}\delta$. В нашей одномерной модели будем считать, что u и φ зависят только от переменной *x*. Свободная энергия для объема образца SmC* может быть представлена в виде: $F = F_L + F_d + F_c$, где F_L описывает энергию искажения смектического слоя, F_d – энергию искажения поля директора, а F_c – представляет энергию взаимодействия искажения слоя и поля директора. Выражения для плотностей этих энергий запишутся следующим образом

$$f_L = \frac{K_u}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 + \frac{B}{2}\left[1-\cos\theta\sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}\right]^2,$$

$$f_d = \frac{K}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + Kq_b \sin\varphi\frac{d\varphi}{dx},\quad f_c = C\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d\varphi}{dx}.$$

В этих выражениях для плотностей энергии константы K_u и B представляют собой коэффициенты упругой поперечной деформации и модуля сжатия слоев, соответственно, K – коэффициент упругости Франка.

Как упоминалось ранее, понижение температуры смектика А в ограниченном образце приводит к фазовому переходу и появлению шевронов уже в смектике С. Это связано с увеличением значения полярного угла θ, и, как следствие, с уменьшением толщины смектических слоев от значения $l = d_0$ до $l = d_0 \cos\theta$. Шевроны образуются при жестких граничных условиях, когда отсутствует скольжение смектических слоев вдоль границ, то есть вдоль пластин. А из условия сохранения объема образца происходит удлинение слоев, что сопровождается искривлением слоев и резким скачком в изменении угла в центре слоя – появлением излома. Проекция слоя на ось z запишется в виде:

$$l_z = \frac{l}{\cos\delta} = \frac{d_0 \cos\theta}{\cos(\mathrm{arctg}(du/dx))}.$$

Проинтегрировав f_L, f_d и f_c по толщине ячейки вдоль x, получим выражение для полной энергии смектического ЖК на единицу площади

$$F = K_u \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2\lambda^2}\left(1 - \cos\theta\sqrt{1+v^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\kappa\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + g\left(\frac{dv}{dx}\right)\frac{d\varphi}{dx} \right\} +$$
$$+ Kq_b\left[\cos\varphi\left(-\frac{h}{2}\right) - \cos\varphi\left(\frac{h}{2}\right)\right], \qquad (1)$$

где $v = \frac{du}{dx}$, $\lambda = \sqrt{\frac{K_u}{B}}$, $\kappa = \frac{K}{K_u}$, $\gamma = \frac{C}{K_u}$.

Минимизируя этот функционал по $v(x)$ и $\varphi(x)$, получим уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v}{dx^2} + \left[\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1+v^2}} - \cos^2\theta\right]\dfrac{v}{\lambda^2} + \gamma\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} = 0, \\ \kappa\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + \gamma\dfrac{d^2v}{dx^2} = 0. \end{cases}$$

В этой системе двух уравнений можно избавиться от $\varphi(x)$ и свести к одному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left[\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}-\cos\theta\right]\frac{v\cos\theta}{\lambda^2(1-\gamma^2/\kappa)}=0.$$

Поиск аналитического решения полученного уравнения представляет собой отдельную и достаточно сложную проблему, поэтому ограничимся малыми углами θ и слабыми изменениями в смещении слоя $v=du/dx$. Разлагая $\cos\theta$ в ряд и оставляя члены в разложении не выше второго порядка малости, получим

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{2\lambda^2(1-\gamma^2/\kappa)}\left(\theta^2-v^2\right)v=0.$$

Умножим уравнение на dv/dx и проинтегрируем

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\frac{1}{4\lambda^2(1-\gamma^2/\kappa)}\left(2v^2\theta^2-v^4\right)=C_0. \qquad (2)$$

В соответствии с экспериментальными наблюдениями [7] можно положить $dv/dx=0$, а также $|v|=|du/dx|=\theta$, θ – полярный угол, образованный директором и нормалью к слою в этой же точке, но для тех областей смектического слоя, которые располагаются дальше от центра $x=0$, от вершины шеврона. С учетом указанных допущений можно выразить константу C_0 через полярный угол θ

$$C_0=\frac{\theta^4}{4r\lambda^2}, \text{ где } r=1-\gamma^2/\kappa.$$

Теперь если допустить, что $r>0$, а это обеспечивает минимизацию функционала (1), то уравнение (2) перепишется в виде

$$\frac{dv}{dx}=\pm\frac{1}{2\lambda\sqrt{r}}\left(\theta^2-v^2\right). \qquad (3)$$

Следующим физическим допущением, связанным с симметрией рассматриваемой геометрии, является $v(-x)=-v(x)$. Поскольку дифференциальное уравнение (3) является нелинейным то можно предположить, что оно допускает несколько аналитических решений.

Первое из них, содержащее два знака имеет следующий вид:

$$v(x)=\pm\theta\,\mathrm{th}\left(\theta x/2\sqrt{r}\lambda\right). \qquad (4)$$

Это решение представляет собой одиночный солитон. Проинтегрируем (4) и получим решение для смещения смектического слоя

$$u(x) = \mp\sqrt{r}\lambda\left[\ln\left[1-\mathrm{th}\left(\theta x/2\sqrt{r}\lambda\right)\right]+\ln\left[1+\mathrm{th}\left(\theta x/2\sqrt{r}\lambda\right)\right]\right]+C_1 .$$

Из условия $u(0)=0$, постоянная интегрирования C_1 в этом выражении зануляется. После упрощения получаем симметричное относительно центра смещение смектического слоя $u(x)$, приводящее к образованию шеврона

$$u(x) = \mp 2\sqrt{r}\lambda \ln\left[\mathrm{ch}\left(\theta x/2\sqrt{r}\lambda\right)\right]. \qquad (5)$$

Появляющиеся разные знаки в (5) можно интерпретировать, согласно работе [6], как формирование шевронов типа C1 с вершинами выше (по оси z) первоначального плоского слоя, так и ниже – типа C2 (Рис. 1). Теперь в поисках дополнительных решений вернемся к частному решению (4) для уравнения (2). Оно позволяет получить общее решение, если учесть, что наше обыкновенное дифференциальное уравнение (3) представляет собой уравнение Риккати.

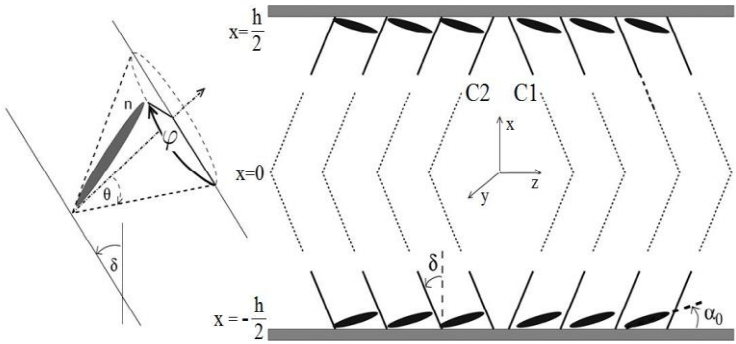


Рис. 1 (a). Конфигурация директора $\vec{n}$ внутри наклонного смектического слоя, иллюстрирующего полярный угол конуса θ, азимутальный угол φ и угол наклона слоя;
(b) Конфигурация слоев для шевронов типа C1 и C2 [6]

Используя приведенное в данной работе частное решение, можно выписать общее решение в виде:

$$v(x) = \pm\theta \frac{\left[C\,\mathrm{sh}\left(\frac{\theta x}{2\sqrt{r}\lambda} \right)\theta - \mathrm{ch}\left(\frac{\theta x}{2\sqrt{r}\lambda} \right) \right].}{\left[C\,\mathrm{ch}\left(\frac{\theta x}{2\sqrt{r}\lambda} \right)\theta - \mathrm{sh}\left(\frac{\theta x}{2\sqrt{r}\lambda} \right) \right]}.$$

Первому частному решению соответствует значение константы $C \to \infty$, второе частное решение при $C = 0$ выразится через гиперболический котангенс:

$$v(x) = \pm\theta\,\mathrm{cth}\left(\frac{\theta x}{2\sqrt{r}\lambda} \right),$$

которое не отражает физики явления – происхождения шевронов поскольку получаемое значение для смещения слоя $u(x)$ уходит в бесконечность в вершине шеврона и поэтому может быть отброшено.

В [2] авторами развит континуальный подход в теории жидких кристаллов. Проблема устойчивости сегнетоэлектрических жидких кристаллов в присутствии внешнего электрического поля в геометрии «bookshelf» решалась в [3, 4]. В предлагаемой работе реализован континуальный подход для описания распределения поля директора в образце SmC* в геометрии шеврона, для которого получено феноменологическое выражение свободной энергии. Выписаны уравнения Эйлера–Лагранжа, для которых в предположении малого полярного угла и слабых изменений в смещении слоя получены аналитические решения. Проведена оценка энергии сегнетоэлектрического ЖК, приходящейся на единицу площади.

Библиографический список

1. Андреев А.Л., Компанец И.Н. Применения сегнетоэлектрических жидких кристаллов – реальные и возможные (обзор) // Жидк. крист. и их практич. использ. – 2015. – Т. 15, № 3. – С. 28–40.

2. Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Континуальный подход в теории жидких кристаллов: монография – Уфа: Гилем, Башк. энцикл., 2013. – 164 с.

3. Мигранова Д.Н., Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Исследование устойчивости равновесных состояний наноматериалов на основе

сегнетоэлектрических жидких кристаллов во внешнем электрическом поле // Жидк. крист. и их практич. использ. – 2015. – Т. 15, № 3. – С. 133–142.

4. Мигранова Д.Н., Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Метод прямых в решении краевой задачи Пуассона для смектика SmC* во внешнем электрическом поле // Жидк. крист. и их практич. использ. – 2016. – Т. 16, № 3. – С. 58–68.

5. Чигринов В.Г., Шривастава А.К., Пожидаев Е.П. Сегнетоэлектрические жидкие кристаллы: физика и области применения // Жидк. крист. и их практич. использ. – 2016. – Т. 16, № 1. – С. 9–21.

6. Diaz A., Mottram N.J. Effects of Weak Anchoring on C1 and C2 Chevron Structures // Mol. Cryst. Liq. Crystals. – 2005. – V. 438. – P. 17/[1581] –25/[1589].

7. Rieker T.P., Clark N.A. Smectic–C “Chevron” a planar liquid–crystal defect: Implications for the surface–stabilized ferroelectric liquid–crystal geometry // Phys. Rev. A. – 1988. – V. 37, № 3. – P. 1053–1056.

Сведения об авторах

Мигранова Дана Наилевна, старший преподаватель Академии ВЭГУ, г. Уфа. E-mail: danakiprida@ya.ru.

Мигранов Наиль Галиханович, доктор физико-математических наук, профессор Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы. E-mail: ufangm@yahoo.co.uk.

Исмагилова Роксана Наилевна, аспирант БГПУ им. М. Акмуллы, г. Уфа. E-mail: roxyresearch@yandex.ru.

Кондратьев Денис Васильевич, кандидат физико-математических наук, ученый секретарь ГБНУ «Академия наук Республики Башкортостан», доцент Башкирского кооперативного института (филиала) Российского университета кооперации. E-mail: denis.kondratyev@bk.ru.

УДК 536.24+536.426

Михайлов П.Н.

ОСОБЕННОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА В ЗАДАЧАХ СОПРЯЖЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ ИЗМЕНЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ ОБЛАСТИ

Нулевое асимптотическое приближение решения задачи фильтрации в пористом пласте зависит лишь от времени и от расстояния до скважины. При смене геометрии задачи на некоторой границе, меняется и пространственная координата от которой зависит нулевое приближение. Это приводит к необходимости согласования граничных условий. В работе проведено сравнение решений, в которых дополнительное условие для согласования граничных условий определяется из различных подходов оценки остаточного члена для первого асимптотического приближения. Показано, что построенные асимптотические решения является точными в среднем, и решения не зависят от способа выбора дополнительного граничного условия.

Ключевые слова: растворы изотопов, фильтрация, пористый пласт, граничные условия, асимптотический метод, задачи сопряжения.

Mikhaylov P.N.

PECULIARITIES OF THE ASYMPTOTIC METHOD IN CONJUGATION PROBLEMS ON THE BOUNDARY OF CHANGE OF THE GEOMETRY OF THE AREA

The zero asymptotic approximation of the solution of the filtration problem in a porous formation depends only on the time and distance to the well. When the geometry of the problem is changed on a certain boundary, the spatial coordinate on which the zero approximation. This leads to the need to reconcile the boundary conditions. The paper compares solutions in which the matching of the boundary conditions follows from the different approaches of estimating the remainder term for the first asymptotic approximation. It is shown that the constructed asymptotic solutions are exact on the average, and the solutions do not depend on the choice of the additional boundary condition.

Key words: isotope solutions, filtration, porous layer, boundary conditions, asymptotic method, pairing tasks.

© Михайлов П.Н., 2017

Одним из способов прогнозирования динамики поведения радиоактивных и химических примесей в глубокозалегающих пластах, является исследование их температурных полей. Задачи о температурном поле в пористых пластах и о поле концентрации растворов взаимосвязаны [2], но допускают их раздельное решение. При этом задачи о полях концентрации и температуры в пласте связаны с соответствующими задачами в нагнетательной скважине, так как именно из их решений следуют значения плотности и температуры раствора на границе пористого пласта. В работах [3, 4] плотность, поступающего раствора в пласт считалась постоянной. В более поздней работе [5] асимптотическим методом [1] построено приближенное аналитическое решение задачи о поле плотностей растворов изотопов в пористом пласте с учетом решения массопереноса в нагнетательной скважине. Здесь строится другое решение задачи о поле плотностей раствора изотопов в пористом пласте.

Математическая постановка задачи. Пусть раствор радиоактивного изотопа закачивается через вертикальную скважину радиуса r_0 в пористый пласт, который представлен тремя областями с плоскими горизонтальными границами; покрывающий и подстилающий пласты считаются слабо проницаемыми; средняя имеет мощность $2h$ является хорошо проницаемой; все пласты являются анизотропными.

Математическая постановка задачи массопереноса для всех областей включает уравнение диффузии с учётом радиоактивного распада в покрывающем

$$\frac{\partial \rho_{1\mathrm{d}}}{\partial \tau} - D_{z1}\frac{\partial^2 \rho_{1\mathrm{d}}}{\partial z_{\mathrm{d}}^2} - D_{r1}\frac{1}{r_{\mathrm{d}}}\frac{\partial}{\partial r_{\mathrm{d}}}\left(r_{\mathrm{d}}\frac{\partial \rho_{1\mathrm{d}}}{\partial r_{\mathrm{d}}}\right) = -\alpha \rho_{1\mathrm{d}},\ \tau > 0,\ r_{\mathrm{d}} > 0,\ z_{\mathrm{d}} > h \qquad (1)$$

и подстилающем

$$\frac{\partial \rho_{2\mathrm{d}}}{\partial \tau} - D_{z2}\frac{\partial^2 \rho_{2\mathrm{d}}}{\partial z_{\mathrm{d}}^2} - D_{r2}\frac{1}{r_{\mathrm{d}}}\frac{\partial}{\partial r_{\mathrm{d}}}\left(r_{\mathrm{d}}\frac{\partial \rho_{2\mathrm{d}}}{\partial r_{\mathrm{d}}}\right) = -\alpha \rho_{2\mathrm{d}},\ \tau > 0,\ r_{\mathrm{d}} > 0,\ z_{\mathrm{d}} < -h \qquad (2)$$

пластах, а также уравнение конвективной диффузии с учётом радиоактивного распада в пористом пласте

$$\frac{\partial \rho_{\text{d}}}{\partial \tau} - D_z \frac{\partial^2 \rho_{\text{d}}}{\partial z_{\text{d}}^2} - D_r \frac{1}{r_{\text{d}}} \frac{\partial}{\partial r_{\text{d}}} \left(r_{\text{d}} \frac{\partial \rho_{\text{d}}}{\partial r_{\text{d}}} \right) + \frac{\text{v}_0' r_0}{r_{\text{d}}} \frac{\partial \rho_{\text{d}}}{\partial r_{\text{d}}} = -\alpha \rho_{\text{d}} \left(r, z, t \right), \tag{3}$$

$\tau > 0,\ r_{\text{d}} > 0,\ |z_{\text{d}}| < h.$

При этом условия сопряжения представляют равенства плотностей и потоков растворённого вещества на границах раздела пластов

$$\rho_{\text{d}}\big|_{z_{\text{d}}=h} = \rho_{\text{d}1}\big|_{z_{\text{d}}=h}, \quad \rho_{\text{d}}\big|_{z_{\text{d}}=-h} = \rho_{\text{d}2}\big|_{z_{\text{d}}=-h}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} D_z \frac{\partial \rho_{\text{d}}}{\partial z_{\text{d}}}\bigg|_{z_{\text{d}}=h} &= D_{z1} \frac{\partial \rho_{1\text{d}}}{\partial z_{\text{d}}}\bigg|_{z_{\text{d}}=h}, \\ D_z \frac{\partial \rho_{\text{d}}}{\partial z_{\text{d}}}\bigg|_{z_{\text{d}}=-h} &= D_{z2} \frac{\partial \rho_{2\text{d}}}{\partial z_{\text{d}}}\bigg|_{z_{\text{d}}=-h}. \end{aligned} \tag{5}$$

Плотность загрязнителя на входе в пористый пласт считается постоянной

$$\rho_{\text{d}}\big|_{r_d=0} = \left[m + K\left(1-m\right) \right] \rho_{0\text{d}} \left(0, z, t\right), \tag{6}$$

где $\rho_{0d}\left(r,z,t\right)$ – решение задачи массопереноса в нагнетательной скважине [3].

Полагаем, что в начальный момент времени плотность загрязнителя равна нулю

$$\rho_{\text{d}}\big|_{\tau=0} = \rho_{1\text{d}}\big|_{\tau=0} = \rho_{2\text{d}}\big|_{\tau=0} = 0, \tag{7}$$

Кроме того, на бесконечности выполняются условия регулярности

$$\rho_{\text{d}}\big|_{r_{\text{d}} \to +\infty} = 0, \ \rho_{1\text{d}}\big|_{r_{\text{d}} + z_{\text{d}} \to +\infty} = 0, \quad \rho_{2\text{d}}\big|_{r_{\text{d}} + |z_{\text{d}}| \to +\infty} = 0. \tag{8}$$

Перейдём далее к безразмерным величинам

$$\rho = \frac{\rho_{\text{d}}}{\rho_{gt}}, \quad r = \frac{r_{\text{d}}}{h}, \quad z = \frac{z_{\text{d}}}{h}, \quad t = \frac{\lambda_{z1}\tau}{c_1 \rho_{\text{п}1} h^2}, \quad \text{At} = \frac{c_1 \rho_{\text{п}1}}{\lambda_{z1}} \alpha h^2, \quad {}_1^2D = \frac{D_{z2}}{D_{z1}},$$

$${}_1^0D = \frac{D_z}{D_{z1}}, \quad {}_2^0D = \frac{D_z}{D_{z2}}, a_{z1} = \frac{\lambda_{z1}}{c_1 \rho_{\text{п}1}}, \delta = \frac{D_{z1}}{a_{z1}}, \gamma = \frac{1}{m + K\left(1-m\right)}, \rho_0 = \frac{\rho_{0\text{d}}}{\gamma \rho_{gt}}.$$

Вводится аналог параметра Пекле

$$\mathrm{Pd} = \frac{\mathrm{v}_0' r_0}{D_{z1}},$$

где v_0' – скорость конвективного переноса загрязнителя на расстоянии r_0 от оси скважины. Оценки показывают, что в уравнении (3) можно пренебречь слагаемым, описывающим радиальную диффузию

Вместо этой задачи асимптотическим методом [1] решается более общая, параметризованная задача.

Нулевое приближение и осредненная задача. Как известно [1] в подобных задачах в нулевом приближении плотность загрязнителя $\rho^{(0)} = \rho^{(0)}(r,t)$ является функцией только от *r* и *t*. С другой стороны, как видно из (13), нулевое приближение является функцией от *z* и *t*, т.е. граничное условие (13) удовлетворить невозможно. Решение указанной проблемы согласования изложено в [5]. Другой подход к решению аналогичной проблемы на задачах теплопереноса представлен в [6].

В задачу для остаточного члена подставляется разложение остаточного члена по тому же асимптотическому параметру, что и исходное уравнение

$$\theta = \theta^{(0)} + \varepsilon\theta^{(1)} + \ldots, \quad \theta_i = \theta_i^{(0)} + \varepsilon\theta_i^{(1)} + \ldots, \; i = 1,2 .$$

Затем отдельно формулируются задачи для $\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \theta_i^{(0)}, \theta_i^{(1)}$. При этом задача для остаточного члена нулевого порядка имеет нулевое решение. Для того, чтобы осредненная задача и задача для первого коэффициента разложения остаточного члена имела нулевое решение, необходимо граничное условие (13) заменить на следующее:

$$\rho^{(0)}\Big|_{r=0} = \langle \rho_0(z,t) \rangle. \tag{9}$$

Решение задачи в нулевом приближении. В пространстве изображений Лапласа – Карсона задача в нулевом приближении представляется как

$$p\rho_1^{(0)u} - \delta \frac{\partial^2 \rho_1^{(0)u}}{\partial z^2} = -\mathrm{At}\,\rho_1^{(0)u}, \quad r > 0, \; z > 1, \tag{(10)}$$

$$p\,\rho_2^{(0)u} - \tfrac{2}{1} D\delta \frac{\partial^2 \rho_2^{(0)u}}{\partial z^2} = -\mathrm{At}\,\rho_2^{(0)u}, \quad r > 0, \; z < -1, \tag{(11)}$$

$$p\,\rho^{(0)u} + \frac{\mathrm{Pd}}{r}\frac{\partial \rho^{(0)u}}{\partial r} + \mathrm{At}\,\rho^{(0)u} = \frac{\delta}{2}\left(\left.\frac{\partial \rho_1^{(0)u}}{\partial z}\right|_{z=1} - {}_1^2 D \left.\frac{\partial \rho_2^{(0)u}}{\partial z}\right|_{z=-1} \right), \qquad ((12)$$

$r > 0,\ |z| < 1,$

$$\left.\rho_1^{(0)u}\right|_{z=1} = \rho^{(0)u} = \left.\rho_2^{(0)u}\right|_{z=-1}, \qquad ((13)$$

$$\left.\rho^{(0)u}\right|_{r=0} = \left\langle \rho_0\left(z,t\right)\right\rangle, \qquad ((14)$$

$$\left.\rho^{(0)u}\right|_{r\to\infty} = 0, \quad \left.\rho_1^{(0)u}\right|_{r+z\to\infty} = 0, \quad \left.\rho_2^{(0)u}\right|_{r+|z|\to\infty} = 0. \qquad ((15)$$

Учитывая граничные условия (14), а также то, что в нулевом приближении плотность загрязнителя в пористом пласте не зависит от *z* и является функцией только от *r* и *t*, решения уравнений (10), (11) можно переписать в следующем виде:

$$\rho_1^{(0)u} = \rho^{(0)u} \exp\left(-\sqrt{\left(p+\mathrm{At}\right)/\delta}\left(z-1\right)\right),$$

$$\rho_2^{(0)u} = \rho^{(0)u} \exp\left(\sqrt{{}_2^1 D\left(p+\mathrm{At}\right)/\delta}\left(z+1\right)\right).$$

Эти выражения позволяют определить значения следов производных из внешних областей, и записать уравнение (13) как

$$\frac{\mathrm{Pd}}{r}\frac{d\rho^{(0)u}}{dr} = -\left(p + \mathrm{At} + \frac{\delta}{2}\sqrt{p+\mathrm{At}}\left(1+\sqrt{{}_1^2 D}\right)\right)\rho^{(0)u}, \qquad (16)$$

С учетом решения задачи о поле плотностей в нагнетательной скважине, решение которого примет вид

$$\rho^{(0)u} = \frac{1}{\beta}\mathrm{sh}\left(-\beta z\right)\exp\left(-\frac{1}{\mathrm{Pd}}\left(p + \mathrm{At} + \frac{\delta}{2}\sqrt{p+\mathrm{At}}\left(1+\sqrt{{}_1^2 D}\right)\right)\frac{r^2}{2}\right),$$

где

$$\beta = \frac{p + \mathrm{Ad} + 2k\left(p\right)\sqrt{p+\mathrm{Ad}}}{2\mathrm{Pd}v R_1\left(1\right)}.$$

Первое приближение решения строится известным образом [5].

Сравнив полученное решение с решением из [5], убеждаемся, что построенные различными способами решения совпадают. Таким образом, в задачах подобного типа можно согласовать граничные условия либо способом из [5], либо из [6].

Библиографический список

1. Филиппов А.И., Михайлов П.Н. Асимптотические методы в скважинной теплофизике. – Уфа: Гилем, Башкирская энциклопедия, 2013. – 384 с.

2. Филиппов А.И, Михайлов П.Н., Ковальский А.А. Поля радиоактивных изотопов в пористой среде – Уфа: Гилем, Башкирская Энциклопедия, 2015. – 224 с.

3. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Иванов Д.В. Температурное поле радиоактивных изотопов в пористой среде // Теплофизика высоких температур, 2010. – Т. 48. – № 1. – С. 96–104.

4. Филиппов А.И, Михайлов П.Н., Ковальский А.А. Асимптотические модели полей радиоактивных изотопов в проницаемых пластах // Материалы XIV Минского Международного форума по тепло- и массообмену, 26–29 сентября 2016 г. Т. 1. Ч. 2. – Минск: Институт тепо- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси, 2016. – С. 447–453.

5. Михайлов П.Н., Михайлов А.П. Проблема согласования граничного условия в задаче фильтрации растворов изотопов в пористом пласте и ее решение // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы V Всероссийской научно-практической конференции, приуроченной 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова. Ч. III. – Стерлитамак: СФ БашГУ, 2016. – С. 28–35.

6. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Кабиров И.Ф. Температурное поле источников тепла при закачке жидкости в анизотропный неоднородный пласт // Прикладная механика и техническая физика, 2013. – Т. 54. – № 6 (322). – С. 95–111.

Сведения об авторе

Михайлов Павел Никонович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, геометрии и методики обучения математике Стерлитамакского филиала БашГУ. E-mail: mihaylovpn@mail.ru.

УДК 004.942:519.245:678.7

Михайлова Т.А., Михайлов В.А.

ПРИМЕНЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА К ПОСТРОЕНИЮ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ПО МУНИ ОТ ХАРАКТЕРИСТИК БУТАДИЕН-СТИРОЛЬНОГО КАУЧУКА

На основе производственных экспериментов и анализа литературных источников построена зависимость вязкости по Муни от молекулярно-массовых характеристик синтетического каучука, образующегося в результате сополимеризации бутадиена со стиролом. Молекулярно-массовые характеристики были получены на основе моделирования процесса сополимеризации методом Монте-Карло.

Ключевые слова: сополимеризация, бутадиен, стирол, вязкость по Муни, среднечисленная молекулярная масса, среднемассовая молекулярная масса.

Mikhailova T.A., Mikhailov V.A.

APPLICATION OF CORRELATION AND REGRESSION ANALYSIS TO THE CONSTRUCTION OF DEPENDENCE OF MOONEY VISCOSITY FROM CHARACTERISTICS OF BUTADIENE-STYRENE RUBBER

On the basis of production's experiments and analysis of literature sources the dependence of Mooney viscosity from molecular-weight characteristics of synthetic rubber was deduced. Synthetic rubber is formed as a result of the butadiene-styrene copolymerization. Molecular weight characteristics were obtained on the basis of modeling the copolymerization process by the Monte Carlo method.

Keywords: copolymerization, butadiene, styrene, Mooney viscosity, number-average molecular weight, weight-average molecular weight.

Синтетические сополимеры бутадиена со стиролом являются одними из самых распространенных синтетических каучуков общего назначения. Ключевым технологическим показателем каучуков и резиновых смесей является вязкость по Муни. В практической деятельности её определение для образца каучука осуществляется на основе ротационной вискозиметрии с использованием сдвигового роторного вискозиметра Муни [1]. При этом вязкость испытуемого материала по Муни характеризуют степенью сопротивления вращению цилиндри-

© Михайлова Т.А., Михайлов В.А., 2017

ческого металлического ротора в массе эластомерного материала, помещенного в испытательную камеру [2].

Следовательно, актуальной задачей является поиск воспроизводимой и достаточно точной зависимости между одной из характеристик полимера и вязкостью по Муни.

В статье авторов Kramer O. И Good W.R. была исследована корелируемость вязкости по Муни и молекулярно-массовых характеристик образующегося сополимера – среднечисленной M_n и среднемассовой M_w молекулярных масс. По данным статьи были построены различные регрессионные зависимости на основе метода наименьших квадратов. Для них были вычислены коэффициент детерминации и среднее относительное отклонение от данных статьи – R^2 и δ соответственно (табл. 1, рис. 1), где у – вязкость по Муни, $x = \sqrt{M_n M_w} \cdot 10^{-5}$.

Таблица 1.

Характеристики регрессионных зависимостей

Вид зависимости	Уравнение	δ, %	R^2
Линейная	$y(x) = 82.8097 \cdot x - 49.9899$	11.93	0.9268
Кубическая	$y(x) = -20.3170 \cdot x^3 - 87.8676 \cdot x^2 - 22.1264 \cdot x - 7.3484$	11.17	0.9278
Степенная	$y(x) = 30.8549 \cdot x^{2.0665}$	12.81	0.9387
Экспоненциальная	$y(x) = 6.5666 \cdot \exp(1.5493 \cdot x)$	16.67	0.8912
Логарифмическая	$y(x) = 106.6866 \cdot \ln(x) - 33.6866$	12.45	0.9106

В рамках производства бутадиен-стирольного синтетического каучука в ЦЗЛ ОАО «Синтез-Каучук» (г. Стерлитамак, Респ. Башкортостан) был проведен ряд экспериментов в одном реакторе периодического действия по исследованию вязкости по Муни в зависимости от дозировки регулятора (трет-додецилмеркаптан) (табл. 2) для конверсии мономеров, равной 70 %. Эксперименты проводились при рецептуре: дозировка бутадиена – 70 мас.ч., дозировка стирола – 30 мас.ч., дозировка инициатора (гидроперекись пинана) – 0.06 мас.ч., содержание вода : мономеры – 210:100.

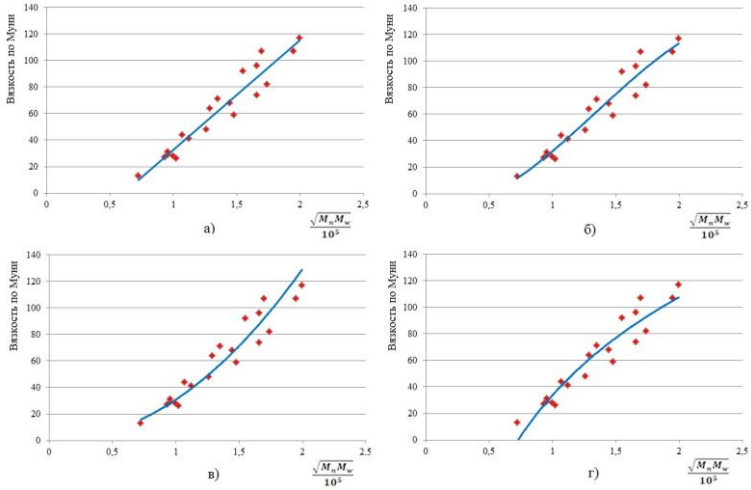


Рис. 1. Зависимость вязкости по Муни от средней геометрической среднечисленной и среднемассовой молекулярных масс продукта: а) линейная, б) кубическая, в) степенная, г) логарифмическая (линия – регрессионная зависимость, точки – экспериментальные данные)

Таблица 2.

Результаты эксперимента
в аппарате периодического действия

Дозировка регулятора, мас.ч.	Вязкость по Муни
0.1	138
0.12	135
0.14	128
0.15	125
0.16	110
0.175	80
0.2	55
0.21	55

На основе математической модели, описанной в статье [3], для той же конверсии мономеров и вариантов дозировки регулятора были проведены расчеты усредненных молекулярных характеристик [4], которые были преобразованы в условные значения вязкости по Муни согласно представленным в табл. 1 регрессионным зависимостям (ри-

сунок 2). Для каждой зависимости было рассчитано среднее относительное отклонение от экспериментальных данных: линейная – 13.35 %, кубическая – 12.69 %, степенная – 16.58 %, экспоненциальная – 31.72 %, логарифмическая – 15.54 %.

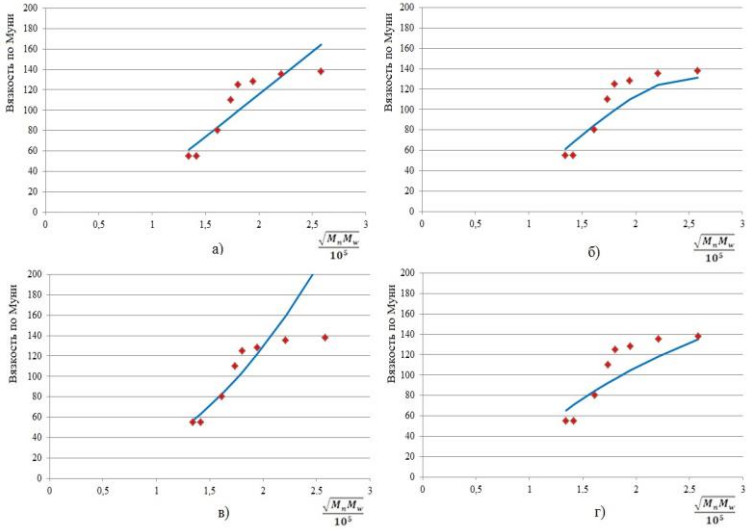


Рис. 2. Зависимость вязкости по Муни от средней геометрической среднечисленной и среднемассовой молекулярных масс продукта, полученного в аппарате периодического действия: а) линейная, б) кубическая, в) степенная, г) логарифмическая (линия – регрессионная зависимость, точки – экспериментальные данные)

По результатам проведенных расчетов наилучшее согласование с экспериментальными данными показали линейная, логарифмическая и экспоненциальная зависимости. Рассмотрим их поведение при $\sqrt{M_n M_w} \cdot 10^{-5} > 0$ (рис. 3). Наиболее адекватное приближение к экспериментальным данным показывает логарифмическая зависимость, так как кубическая зависимость, несмотря на наименьшие значения среднего относительного отклонения, с увеличением значений молекулярных масс продукта демонстрирует последующее уменьшение вязкости по Муни, что невозможно.

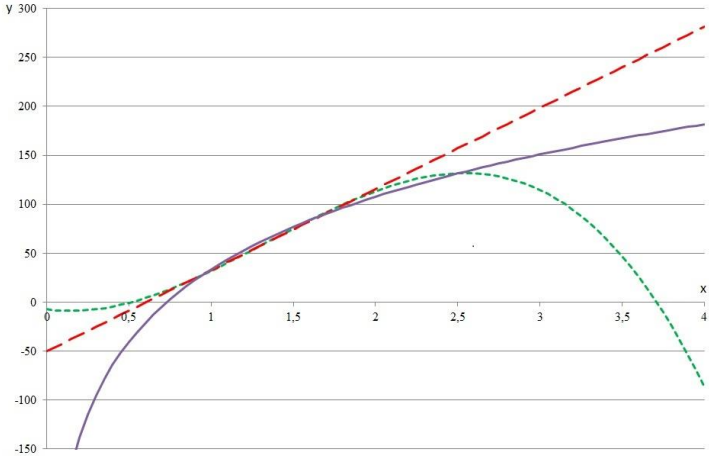


Рис. 3. Зависимость вязкости по Муни от средней геометрической среднечисленной и среднемассовой молекулярных масс продукта: а) линейная, б) кубическая, в) степенная, г) логарифмическая (линия – регрессионная зависимость, точки – экспериментальные данные)

Таким образом, была получена зависимость для вычисления вязкости по Муни по значениям усредненных молекулярных характеристик бутадиен-стирольного сополимера:

$$\eta_{Mooney} = 106.6866 \cdot \ln(\sqrt{M_n M_w} \cdot 10^{-5}) - 33.6866, \qquad (1)$$

где $\sqrt{M_n M_w} \cdot 10^{-5} > 0.7292.$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках гранта №16-31-00162_мол_а и Стерлитамакского филиала БашГУ в рамках гранта СФ БашГУ №В17-62.

Библиографический список

1. Аверко-Антонович И.Ю., Бикмуллин Р.Т. Методы исследования структуры и свойств полимеров. – Казань: КГТУ, 2002. – 604 с.

2. ГОСТ Р 54552-2011. Каучуки и резиновые смеси. Определение вязкости, релаксации напряжения и характеристик подвулканизации с использованием вискозиметра Муни. – М.: Стандартинформ, 2013. – 23 с.

3. Михайлова Т.А. Моделирование периодического и непрерывного процессов сополимеризации бутадиена со стиролом методом

Монте-Карло: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Баш. гос. университет. – Уфа, 2016. – 22 с.

4. Михайлова Т.А., Мифтахов Э.Н., Насыров И.Ш., Мустафина С.А. Моделирование синтеза бутадиен-стирольного сополимера методом Монте-Карло // Вестник Башкирского университета. – 2015. – Т. 20. – № 1. – С. 73–77.

Сведения об авторах

Михайлова Татьяна Анатольевна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического моделирования Стерлитамакского филиала БашГУ. E-mail: T.A.Mihailova@yandex.ru.

Михайлов Владимир Анатольевич, студент института вычислительной математики и информационных технологий КФУ. E-mail: v.mikhailov23@gmail.com.

УДК 517.518

Муканов А.Б.

РЯДЫ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ЛИПШИЦА

В работе рассматриваются ряды Фурье с обобщенно монотонными коэффициентами функций из пространств Липшица. Для данных функций установлена оценка сверху скорости сходимости к ним частичных сумм.

Ключевые слова: ряды Фурье, классы Липшица, обобщенная монотонность.

Mukanov A.B.

FOURIER SERIES OF FUNCTIONS FROM LIPSCHITZ SPACES

We consider the Fourier series with general monotone coefficients of functions from Lipschitz spaces. For such functions was shown upper estimate for the rate of approximation by partial sums of series.

Key words: Fourier series, Lipschitz classes, general monotonicity.

В работе рассматривается тригонометрический ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in [0,2\pi] \qquad (1)$$

интегрируемой функции $f(x)$.

Для ряда Фурье (1) с монотонными коэффициентами Г. Лоренц в статье [3] (см. также [1, Гл. 2, § 3]) установил следующую теорему.

© Муканов А.Б., 2017

Теорема А. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *невозрастающие последовательности. Тогда для любого* $0 < \alpha < 1$ *следующие условия эквивалентны:*

$$f \in Lip\,\alpha; \tag{2}$$

$$a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \quad при \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Через $Lip\,\alpha$ обозначено пространство Липшица, т.е.

$$Lip\,\alpha = \left\{f \in C[0,2\pi] : \omega(f,\delta)_{C[0,2\pi]} \le C\delta^{\alpha}\right\}, \quad 0 < \alpha \le 1,$$

где $\omega(f,\cdot)_{C[0,2\pi]}$ – модуль непрерывности функции f.

Нетрудно показать, что условие (3) для монотонных $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентно условию:

$$\| f - S_n \|_{C[0,2\pi]} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \quad при \quad n \to \infty,$$

где через $S_n(x)$ обозначена n-ая частичная сумма ряда (1).

В недавней работе [2] М. Дьяченко и С. Тихонов вместо монотонных последовательностей рассмотрели более широкий класс обобщенно монотонных последовательностей GM.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *обобщенно монотонна (или принадлежит классу* GM*), если существуют константы* $C > 0$ *и* $\lambda > 1$ *такие, что для любого* $n \ge 1$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=n}^{2n} | c_k - c_{k+1} | \le \frac{C}{n} \sum_{k=\frac{n}{\lambda}}^{\lambda n} | c_k | .$$

В выражении справа суммирование ведется по всем целым k из отрезка $\left[\frac{n}{\lambda}, \lambda n\right]$.

В работе [2] был обобщен результат Г. Лоренца на класс обобщенно монотонных последовательностей.

Теорема В. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда для любого* $0 < \alpha < 1$ *следующие условия эквивалентны:*

- $f \in Lip\,\alpha$;

- $|a_n|,|b_n| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ *при* $n \to \infty$.

В данной работе установлена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда для любого* $0 < \alpha \le 1$ *следующие условия эквивалентны:*

- $\| f - S_n \|_{C[0,2\pi]} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ *при* $n \to \infty$;
- $|a_n|,|b_n| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ *при* $n \to \infty$.

Из теорем В и 1 получаем следствие.

Следствие 1. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда для любого* $0 < \alpha < 1$ *следующие условия эквивалентны:*

- $f \in Lip\,\alpha$;
- $\| f - S_{n C[0,2\pi]} \| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ *при* $n \to \infty$;
- $|a_n|,|b_n| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ *при* $n \to \infty$.

Библиографический список

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: ГИФМЛ. – 1961. – 936 с.

2. Dyachenko M.I., Tikhonov S.Yu. Smoothness properties of functions with general monotone Fourier coefficients // Preprint.

3. Lorentz G.G. Fourier-koeffizienten und funktionenklassen // Math. Z. – 1948. – № 51. – P. 135–149.

Сведения об авторах

Муканов Асхат Бирлесович, PhD, преподаватель кафедры математики и информатики Казахстанского филиала МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: mukanov.askhat@gmail.com.

УДК 693.557

Муравьева Е.А., Соловьев К.А., Григорьев Е.С.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНДЕНСАТОРА-ИСПАРИТЕЛЯ ХЛОРА

В основу модели положены уравнения, характеризующие процессы, протекающие в конденсаторе-испарителе хлора что позволяет использовать ее для проектирования и расчета аппаратов теплопереноса через стенку с фазовыми переходами теплоносителей различных характеристик.

Ключевые слова: передача тепла, фреон, хлор, фреоновая компрессорная установка.

Muraveva E.A., Solovev K.A., Grigoryev E.S.

CHLORINE EVAPORATOR-CONDENSER SIMULATION

The model is based on the equations characterizing the processes taking place in the chlorine evaporator-condenser, which makes it possible to use it for designing and calculating heat transfer equipment through a wall with phase transitions of various characteristics coolants.

Keywords: heat transfer, freon, chlorine, freon compressor machine.

Конденсатор-испаритель является составной частью фреоновой компрессорной установки. Он предназначен для конденсации газообразного хлора. Испаритель-конденсатор представляет собой кожухотрубный аппарат, состоящий из кожуха, трубных решеток и трубного пучка. В межтрубном пространстве кипит жидкий фреон. В трубках конденсируется газообразный хлор.

Зависимость плотности фреона в кг/м^3 от температуры и давления принимает следующее выражение:

$$pof(T,p) = (-0{,}6259 \cdot T^2 - 25{,}353 \cdot T \cdot 1572{,}3) \cdot bf^{\left(\frac{p}{101325} - 1\right)},$$

где T – температура фреона в °С;

bf – коэффициент сжатия фреона, принимаемый равным 0,995;

p – давление фреона в Па.

Зависимость теплоемкости фреона от температуры в Дж/кг·К принимает следующее выражение:

$$Cpfg(T) = 0{,}5583 \cdot T^2 + 7{,}9825 \cdot T + 866{,}61,$$

где T – температура фреона в °С.

© Муравьева Е.А., Соловьев К.А., Григорьев Е.С., 2017

Зависимость парциального давления фреона от температуры в Па принимает следующее выражение:

$$\Pr f(T) = \left(7 \cdot 10^{-6} \cdot T^3 + 0{,}0014 \cdot T^2 \cdot 0{,}1001 \cdot T + 3{,}9588\right) \cdot 10^5,$$

где T – температура фреона в °С.

Уравнение для нахождения парциального давления хлора в Па примет вид:

$$Prh(T) = \begin{cases} nT = T + 273.15 \\ 10^{8{,}0213 - \frac{530{,}591}{nT - 64{,}63}} \quad ЕСЛИ\ nT < 239{,}4, \\ 10^{9{,}28814 - \frac{969{,}992}{nT - 12{,}791}} \quad ИНАЧЕ \end{cases}$$

где nT – температура хлора в K.

Теплота конденсации хлора зависит только от его температуры и потому эта кривая аппроксимируется по графику, представленному в справочных данных [2] и представляется аналитическим выражением.

Теплота конденсации хлора от его температуры представлена в Дж/кг:

$$Ccondh\ (T) = -0{,}0298 \cdot T^3 - 1{,}643 \cdot T^2 - 517{,}06 \cdot T + 267940,$$

где T – температура хлора в °С.

Переменная p1 хранит в себе значение уровня в конденсаторе-испарителе в процентах от объема межтрубного пространства. Если он составляет в определенный момент времени менее 100 %, то дозволено продолжать его наполнять, срабатывает логическая "1", иначе логический "0".

Переменная p_2 хранит в себе текущее значение давления в аппарате в Па, если оно меньше парциального давления фреона при заданной температуре, за которую отвечает результат функции парциального давления фреона $Prf(p_3)$ от температуры p_3, то это говорит о том, фреон конденсируется, иначе – испаряется. Переменная p_4 хранит в себе значения о величине температуры хлора в °С.

Таким образом, $Lf_1(p)$ отвечает за блокировку уровня фреона по его подаче, а Lf2(p) по испарению и конденсации фреона, которые

будут зависеть от величины парциального давления фреона и давления в аппарате.

Пропишем объемы испарившегося и сконденсировавшегося хладона за 1 с. Эти процессы будут зависеть от коэффициента диффузии фреона *k1* (показывает скорость его испарения), межтрубного пространства *Vf*. Для процесса конденсации будет происходить обратный процесс, поэтому укажем отрицательное выражение соотношению.

Используем блокировку $Lf_2(p)$ которая остановит конденсацию или испарение фреона в математической модели, если уровень приблизится к максимальному и минимальному значениям. Коэффициент k_1 обусловлен физическими свойствами фреона и показывает быстроту его испарения (конденсации). С учетом фактора атмосферного давления условие приводится к виду $Pr\ f(p_3) > p_2 + 101325$. Выражение $(1 - \frac{p_2 + 101325}{Pr\ f(p_3)})$ показывает интенсивность испарения. Чтобы найти текущие значения заполненного объема выполним $\frac{p_1}{100} \cdot Vf$.

Вышесказанное ложится в основу разработки аналитического выражения для объема испарившегося (сконденсировавшегося) хладона в м^3 за 1 секунду, представленного формулой:

$$Visp(p) = \begin{cases} Lf_2(p) \cdot k_1 \cdot (1 - \frac{p_2 + 101325}{Pr\ f(p_3)}) \cdot \frac{p_1}{100} \cdot Vf, ЕСЛИ\ Pr\ f(p_3) > p_2 + 101325 \\ -Lf_2(p) \cdot k_1 \cdot (1 - \frac{Pr\ f(p_3)}{p_2 + 101325}) \cdot \frac{p_1}{100} \cdot Vf\ ИНАЧЕ \end{cases},$$

где *k1* – коэффициент диффузии фреона;

Vf – объем межтрубного пространства конденсатора-испарителя, м^3.

Для дальнейших расчетов потребуется величина, равная произведению теплоемкости на массу для жидкого и газообразного фреона вместе, измеряемая в $\frac{Дж \cdot кг}{К}$.

$$Cpf(p, dm) = Cpfg(p_3) \cdot \left[Vf \cdot \frac{p_1}{100} \cdot pof(p_3, p_2) + Vf \cdot \frac{100 - p_1}{100} \cdot \frac{(p_2 + 101325) \cdot Mf}{10^5 \cdot R \cdot (273{,}15 + p_3)} + dm \right],$$

где *Mf* – молярная масса фреона, кг/моль;

dm – масса поступающего жидкого фреона, кг.

Поэтому, справедливо будет утверждать, что объемный приход хлора:

$$Gcond(p)=\begin{cases} k_3\cdot(1-\dfrac{\frac{Conc}{100}\cdot Prh(p_4)}{Ph+101325})\cdot Vh\cdot\dfrac{Conc}{100}, & ЕСЛИ\ \dfrac{Conc}{100}\cdot Prh(p_4)<Ph+101325, \\ 0 & ИНАЧЕ \end{cases}$$

где *k3* – коэффициент диффузии хлора;

Conc – концентрация хлора в хлоргазе, %;

Ph – давление хлора в хлоргазе, Па;

Vh – Объем внутритрубного пространства, м^3.

Количество сконденсировавшегося хлора выразим в моль/с.

$$Vhg(p)=\frac{\left(\frac{Gh}{Mh}\right)\cdot R\cdot(p_4+273{,}15)}{(Ph+1)\cdot 101325},$$

где *Gh* – расход хлора, м^3/с;

Mh – молярная масса хлора, кг/моль;

R – универсальная газовая постоянная, R = 8,314 Дж/(моль·К);

Vh – объем внутритрубного пространства, м^3.

Таким образом, на основании вышеизложенного, имеем полный базис зависимостей для определения уравнений, описывающих процессы в конденсаторе-испарителе

$$dL(p)=Lf_1(p)\cdot\frac{Gf\cdot a1}{Vf}-Visp(p),$$

$$dTf(p)=\frac{-Visp(p)\cdot pof(p_3,p_2)\cdot Cisp+(Tatm-p_3)\cdot Tp+(p_4-p_3)\cdot alfa\cdot S1}{Cpf(p,0)+Cp}+$$

$$+\frac{p_3\cdot Cpf(p,0)+Tf1\cdot Cpfg(Tf1)\cdot Gf\cdot a1\cdot pof(Tf1,Pf1)+p_3\cdot Cp}{Cpf(p,Gf\cdot a1\cdot pof(Tf1,Pf1))+Cp}-p_3,$$

$$dTf(p)=\frac{-Visp(p)\cdot pof(p_3,p_2)\cdot Cisp+(Tatm-p_3)\cdot Tp+(p_4-p_3)\cdot alfa\cdot S1}{Cpf(p,0)+Cp}+$$

$$+\frac{p_3\cdot Cpf(p,0)+Tf1\cdot Cpfg(Tf1)\cdot Gf\cdot a1\cdot pof(Tf1,Pf1)+p_3\cdot Cp}{Cpf(p,Gf\cdot a1\cdot pof(Tf1,Pf1))+Cp}-p_3,$$

$$dTh(p)=\frac{-(p_4-p_3)\cdot alfa\cdot S1+Gcond(p)\cdot Ccondh(p_4)}{Cpgh\cdot\dfrac{(Ph+101325)\cdot Vh}{R\cdot(273{,}15+p_4)}}-\frac{Vhg(p)\cdot(p_4-Th1)}{Vh-Vhg(p)}.$$

В этих уравнениях:

- dL(p) – уровень жидкого фреона в конденсаторе-испарителе, %;
- dTf(p) – температура фреона в конденсаторе-испарителе,°С;

- dP(p) – давление паров фреона в конденсаторе-испарителе, Па;
- dTf(p) – температура хлора в конденсаторе-испарителе,°С;
- Gf – Расход жидкого фреона на конденсатор-испаритель, $м^3/с$;
- a1 – Степень открытия клапана на подачу жидкого фреона, %;
- a2 – Степень открытия клапана на выход паров фреона, %;
- Gp – Расход газообразного хлора на конденсатор-испаритель, $м^3/с$;
- R – Универсальная газовая постоянная, Дж/(моль·К);
- Vf – Объем межтрубного пространства конденсатора-испарителя, $м^3$;
- k1 – Коэффициент диффузии фреона;
- Mf – Молярная масса фреона, кг/моль;
- bf – Коэффициент сжатия фреона;
- Cisp – Теплота конденсации хлора, Дж/кг;
- Tf1 – Температура жидкого фреона на вход в конденсатор-испаритель,°С;
- Pf1 – Давление жидкого фреона на вход в конденсатор-испаритель, Па;
- Pf2 – Давление паров фреона перед компрессором, Па;
- Cp – Теплоемкость стенок аппарата, Дж/(кг·К);
- k2 – Пропускная способность штуцера фреона из аппарата;
- Tatm – Температура окружающего воздуха,°С;
- Tp – Теплопотери при перепаде в 1 °С, Дж/(К);
- S1 – Площадь теплопередачи от фреона к хлору, м2;
- alfa – Коэффициент теплопроводности, Дж/(м2·К);
- Th1 – Температура хлора на вход в аппарат,°С;
- Vh – Объем внутритрубного пространства, %;
- Ph – Давление хлора в системе, Па;
- k3 – Коэффициент диффузии хлора;
- Conc – Концентрация хлора в хлоргазе, %;
- Mh – Молярная масса хлора, кг/моль.

Модель описывает ключевые процессы в аппарате: испарение фреона, конденсация хлора, изменение уровня фреона и давления в аппарате. В основу модели положены уравнения, характеризующие вышеописанные процессы, что позволяет использовать ее для проектирования и расчета аппаратов теплопереноса через стенку с фазовыми переходами теплоносителей различных характеристик.

Библиографический список

1 Зависимость температуры кипения фреонов от давления [Электронный ресурс] – URL: http://www.xiron.ru/content/view/10/27/ (дата обращения: 05.03.2017).

2 Теплопроводность, теплоемкость, свойства фреона [Электронный ресурс] – URL: http://thermalinfo.ru/svojstva-gazov/organicheskie-gazy/teploprovodnost-teploemkost-svojstva-freona-22 (дата обращения: 05.03.2017).

Сведения об авторах

Муравьева Елена Александровна, заведующая кафедрой филиала ФГБОУ ВО «Уфимский государственный нефтяной технический университет» в г. Стерлитамаке, доктор технических наук, доцент. E-mail: muraveva_ea@@mail.ru.

Соловьев Константин Андреевич, аппаратчик синтеза ООО «Газпром нефтехим Салават». E-mail: vecarc@mail.ru.

Григорьев Егор Сергеевич, студент филиала ФГБОУ ВО «Уфимский государственный нефтяной технический университет» в г. Стерлитамаке. E-mail: vecarc@mail.ru.

УДК 519.61:544.4

Муллаянова А.Ф., Кузина Л.Г., Берестова Т.В., Губайдуллин И.М.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ПОГЛОЩАЮЩИХ ЧАСТИЦ В РАСТВОРЕ

В работе приведен алгоритм определения числа поглощающих частиц, находящихся в растворе.

Ключевые слова: математическое моделирование, химическая реакция, спектрофотометрия.

Mullayanova A.F, Kuzina L.G., Berestova T.V., Gubaidullin I.M.

DETERMINATION OF THE NUMBER OF ABSORPTION PARTICLES IN SOLUTION

In this work we present the algorithm for determining the number of absorbing particles in solution.

Key words: mathematical modeling, chemical reaction, spectrophotometry.

Для определения химической модели реакции, необходимо информация о количестве и природе различных химических частиц, находящихся в растворе.

Методы определения общего числа частиц, находящихся в равновесном растворе, основаны на измерении какого либо физического параметра, зависящего от числа молекул данного типа. Каждая частица должна вносить свой вклад в наблюдаемый параметр с присущим ей так называемым фактором интенсивности. Наиболее часто для этих целей используется спектрофотометрия [1].

Спектофотометрия имеет дело со светопоглощением, которое является линейной функцией концентрации данной формы при определенной длине волны. Светопоглощение раствора характеризуется законом Бера, который можно представить в виде уравнения:

$$A^{\lambda} = \varepsilon_1^{\lambda} c_1 l + \varepsilon_2^{\lambda} c_2 l + \ldots + \varepsilon_n^{\lambda} c_n l \qquad (1)$$

где A^{λ} – светопоглощение на единицу толщины поглощающего слоя при длине волны λ, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ – молярные коэффициенты погашения частиц $1,2,\ldots,n$ при длине волны λ, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – концентрация форм. Если ε^{λ} данной частицы равен нулю, то эта частица не погло-

© Муллаянова А.Ф., Кузина Л.Г., Берестова Т.В., Губайдуллин И.М, 2017

щает в выбранной области спектра, следовательно, не вносит вклад в значение A^{λ}. Известно несколько способов получения таких данных.

Если число поглощающих частиц меньше или равно трем, то могут применяться графические методы. Для равновесий, включающих более трех поглощающих частиц, необходимо применять расчетные методы определения ранга матрицы.

В данной работе выбранный метод описывается следующим образом: матрица светопоглощения **A** преобразовывается с помощью ряда элементарных операций до преобразованной эквивалентной матрицы, в которой самые большие элементы находятся на главной диагонали, а все элементы ниже ее равны нулю. Ранг этой матрицы определяется числом элементов на диагонали, не равных нулю.

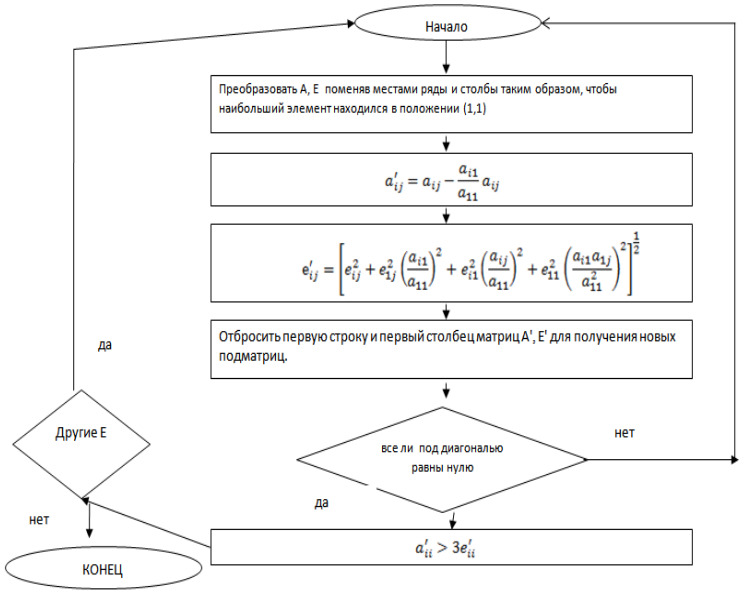


Рис. 1. Блок схема алгоритма

В реальных системах отличие элементов на диагонали от нуля может находиться в пределах случайных ошибок. Этого можно избежать, если преобразовать по той же схеме матрицу ошибок **E**, которая составлена из величин ожидаемых ошибок. Величины соответствующих элементов матриц **A** и **E** можно сравнивать, при этом используют

критерий, который заключается в том, что элемент матрицы **A** можно считать отличным от нуля, если он в три раза больше, чем соответствующий элемент матрицы **E**[2]. Если используют диапазон значений E, то изменение полученного ранга в зависимости от ошибки указывает на надежность, с которой определено число форм в растворе.

Для проведения такого расчета была составлена программа на языке C++ в среде Visual Studio 2010. Ожидаемая ошибка оценена в 0,002 единицы светопоглощения. Блок схема представлена на рис 1. Планируется усовершенствовать алгоритм для реакций с множественным количеством стадий на основе параллельной технологии MPI.

Библиографический список

1. Васильев В.П., Бородин В.А., Козловский Е.В.. Применение ЭВМ в химико-аналитических расчетах. – М.: Высшая школа, 1993. – 110 с.

2. Хартли Ф., Бёргес К., Олкок Р.. Равновесия в растворах. – М.: Мир, 1980. – 360 с..

Сведения об авторах

Муллаянова Алина Фиратовна, аспирант 2-го года обучения лаборатории математической химии ИНК РАН. E-mail: alina316396@yandex.ru.

Кузина Людмила Георгиевна, к.х.н., доцент кафедры физической химии и химической экологии БашГУ. E-mail: alina316396@yandex.ru.

Берестова Татьяна Вячеславовна, к.х.н., доцент кафедры физической химии и химической экологии БашГУ. E-mail: berestova@gmail.com.

Губайдуллин Ирек Марсович, д.ф.-м.н., доцент, с.н.с. лаб. математической химии ИНК РАН. E-mail: mailto:irekmars@mail.ru.

УДК 004.42

Мухаметшин А.И., Нафиков В.Р., Нафикова А.Р.

РАЗРАБОТКА И АВТОМАТИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ОЦЕНКИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ РЕГИСТРАТОРОВ МЕДИЦИНСКОГО ЦЕНТРА ООО «ГИППОКРАТ»

В данной работе разработана автоматизированная система оценки деятельности регистраторов медицинского центра ООО «Гиппократ» с использованием прикладных программ MySQL, Deiphi 7, FastReport.

Ключевые слова: персонал, оценка персонала, мотивация, информационные технологии, автоматизация.

Mukhametshin A.I., Nafikov V.R., Nafikova A.R.

DEVELOPMENT AND AUTOMATION OF SYSTEM OF AN ESTIMATION OF ACTIVITY OF THE REGISTRARS OF THE MEDICAL CENTER OF LLC GIPPOKRAT

In this work an automated system for evaluating the performance of the registrars of the medical center of LLC Gippokrat with the use of the application MySQL, Deiphi 7, FastReport.

Key words: personnel, personnel evaluation, motivation, information technology, automation.

Во все времена деятельность любой организации всегда обеспечивали трудовые ресурсы данной организации или персонал.

Персонал (от лат. persona – личность) – коллектив работников или совокупность лиц, осуществляющих трудовые функции на основе трудового договора (контракта).

В условиях современного бизнеса факторы, которые оказывают влияние на функционирование и развитие предприятий, являются нестабильными. В данной ситуации продуктивный персонал начинает занимать первостепенную позицию и становится единственным, что может уберечь бизнес от кризиса.

Продуктивность сотрудников в организации может обеспечить лишь хорошо построенная система мотивации.

Мотивация – это внешнее воздействие на трудовое поведение человека для достижения личных, групповых и общественных целей.

© Мухаметшин А.И., Нафиков В.Р., Нафикова А.Р., 2017

Разработка правильной системы мотивации базируется на качественной оценке персонала, которая, в свою очередь, должна являться объективной.

С развитием информационных технологий, которые позволили бизнесу выйти на новый уровень, обеспечить объективность оценки деятельности персонала стало проще. Данный факт основывается исключительно на работе того или иного сотрудника и на том, какую пользу он приносит организации. Однако не стоит исключать и личные качества сотрудника, которые также сегодня можно определить с помощью современных технологий.

ООО «Гиппократ» – это центр, предоставляющий широкий спектр услуг в области медицины, расположенный в г. Стерлитамак. Успешность деятельности данного центра во многом зависит от работы подразделения медицинских регистраторов, осуществляющих свою деятельность в call-центре и регистратуре. Именно данные сотрудники являются первыми, кто устанавливает связь с потенциальными клиентами медицинского центра (МЦ).

Исходя из вышесказанного, можно определить высокую степень важности соответствующей категории работников МЦ.

Таким образом, разработка системы мотивации для медицинских регистраторов центра является неотъемлемой частью успешной деятельности компании.

Первым этапом стало определение критериев оценки работы регистраторов в зависимости от места их функционирования.

Так, в call-центре были установлены следующие критерии:

1) количество принятых звонков (за час отработанного времени);

2) количество времени, потраченного на один разговор (в среднем);

3) количество записанных на прием пациентов (за час отработанного времени);

4) количество времени, которое потенциальный клиент провел в ожидании ответа (в среднем на одного пациента);

5) загруженность регистратора call-центра (определяется как отношение отработанного времени на количество принятых звонков).

Данные для вычисления коэффициентов критериев call-центра поступают из АТС-компании в формате Excel. Для того, чтобы выгрузить информацию в базу данных MySQL, была разработана дополнительная программа в среде программирования Delphi 7 [1], позволяющая совершить вышеуказанную операцию.

Приведем критерии оценки деятельности работы в регистратуре:

1) количество записанных пациентов (за час отработанного времени);

2) количество оформленных пациентов (за час отработанного времени);

3) количество пациентов, оформленных по ДМС;

4) количество пациентов, оформленных по внутренним услугам;

5) загруженность регистратора регистратуры (определяется как отношение отработанного времени на количество оформленных пациентов).

Информация для определения коэффициентов критериев регистратуры берется напрямую из информационной системы МЦ.

Вторым этапом является расчет коэффициентов по всем отмеченным критериям, который осуществляется раз в месяц.

Для реализации данного этапа был написан SQL-запрос, по результатам выполнения которого определяются данные для объективной оценки работы персонала.

Однако ранее было отмечено, что необходимо также учитывать личные качества сотрудников и уровень их компетенции. С этой целью в программном продукте Delphi 7 был разработан тест на основании должностных инструкций медицинских регистраторов, состоящий из 25 вопросов и имеющий ограничение по времени выполнения. Данный тест необходимо проводить раз в полгода. Стоит отметить, что с течением времени тест может быть скорректирован и дополнен.

Следующим этапом работы стала разработка системы мотивации, состоящая из следующих элементов:

1) внедрение стимулирующей части заработной платы;

2) определение работника месяца и, соответственно, лучшего работника года.

Экономическим отделом ООО «Гиппократ» было решено выделить 1,4 % от общей выручки компании на стимулирующую часть заработной платы для подразделения медицинских регистраторов. Данная часть формируется, исходя из результатов расчетов критериев.

Так, каждый вышеотмеченный критерий имеет собственную стоимость в денежном выражении, которая зависит от степени значимости данного критерия.

Таким образом, во время расчетного периода регистраторы получают фиксированный оклад и стимулирующую часть заработной платы. Последняя зависит от того, насколько эффективно работал сотрудник в течение месяца.

Результирующие данные отображаются в отчете, который формируется средствами генератора FastReport [2].

Отметим, что на основании полученных данных также определяется лучший работник месяца call-центра и регистратуры. В конце календарного года, на общем собрании – лучший работник года, который получает соответствующее вознаграждение от компании.

Подводя итоги, отметим, что был разработан дополнительный модуль к информационной системе МЦ, позволяющий оценивать работу медицинских регистраторов. Также была создана система мотивации, благодаря которой повышается уровень продуктивности сотрудников данного подразделения, что оказывает положительное влияние на эффективность работы МЦ в целом.

Библиографический список

1. Нафикова А.Р., Нафиков В.Р. Разработка приложений баз данных в среде Delphi: учеб. пособие. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2015. – 95 с.

2. Нафикова А.Р., Нафиков В.Р. Разработка отчетов средствами генератора FastReport в среде Delphi. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – 144 с.

Сведения об авторах

Мухаметшин Артур Ирикович, студент экономического факультета СФ БашГУ. E-mail: artur-muhametshin@yandex.ru.

Нафиков Венер Радикович, инженер-программист ООО «Гиппократ». E-mail: maestrostr@gmail.com.

Нафикова Альбина Ринатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования СФ БашГУ. E-mail: albinabikbaeva@gmail.com.

УДК 517.984.5

Набиев И.М.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

В работе рассматривается краевая задача, порожденная уравнением Штурма-Лиувилля и неразделенными граничными условиями, одно из которых квадратично зависит от спектрального параметра. Приведена теорема единственности, составлен алгоритм решения обратной задачи восстановления краевых задач по спектральным данным.

Ключевые слова: неразделенные граничные условия, собственные значения, обратная задача, теорема единственности.

Nabiev I.M.

AN INVERSE PROBLEM FOR THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH A SPECTRAL PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITION

In this paper a boundary value problem is considered generated by the Sturm-Liouville equation and non-separated boundary conditions, one of which quadratically contains a spectral parameter. We give a uniqueness theorem, develope an algorithm for solving the inverse problem of reconstruction of boundary value problem with spectral data.

Key words: non-separated boundary conditions, eigenvalues, inverse problem, uniqueness theorem.

Краевые задачи с полиномиальным вхождением спектрального параметра в граничные условия часто возникают в теории колебаний, геофизике, электродинамике, акустике, квантовой механике и других областях естествознания (см., например, [1, 6, 7] и литературу там). В соответствующих обратных задачах требуется восстановить коэффициенты в уравнении и граничных условиях по некоторым спектральным данным. В случае разделенных граничных условий некоторые варианты прямых и обратных задач для операторов Штурма-Лиувилля исследованы в [4, 6] и других работах. Вопросы восстановления задач с неразделенными граничными условиями, зависящими от спектрального параметра изучены в [1–3, 7–8].

В настоящей работе исследуется обратная спектральная задача восстановления оператора Штурма-Лиувилля с неразделенными граничными условиями, одно из которых квадратично зависит от спек-

© Набиев И.М., 2017

трального параметра. Приведена теорема единственности, и получен алгоритм решения обратной задачи. В качестве основных спектральных данных берутся спектр одной краевой задачи и некоторая последовательность знаков.

Рассмотрим краевую задачу вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y,\ x \in [0,\pi], \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &y'(0) + \left(m\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta\right)y(0) + \omega y(\pi) = 0, \\ &y'(\pi) + \gamma\, y(\pi) - \omega y(0) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $q(x)$ – вещественная функция, принадлежащая пространству $L_2[0,\pi]$, λ – спектральный параметр, m, α, ω, β, γ – вещественные числа, причем $m \neq 0$, $\omega \neq 0$. Спектр этой задачи совпадает с множеством нулей целой функции экспоненциального типа

$$\delta(\lambda) = 2\omega - \eta(\pi,\lambda) + \omega^2 s(\pi,\lambda) + \left(m\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta\right)\sigma(\pi,\lambda) \tag{3}$$

где $\eta(\pi,\lambda) = c'(\pi,\lambda) + \gamma\, c(\pi,\lambda)$, $\sigma(\pi,\lambda) = s'(\pi,\lambda) + \gamma\, s(\pi,\lambda)$, а $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям $c(0,\lambda) = s'(0,\lambda) = 1$, $c'(0,\lambda) = s(0,\lambda) = 0$. Используя асимптотические свойства функций $c(\pi,\lambda)$, $c'(\pi,\lambda)$, $s(\pi,\lambda)$ и $s'(\pi,\lambda)$ [5] и теорему Пели-Винера, легко устанавливается, что для функции $\delta(\lambda)$ имеет место следующее представление:

$$\begin{aligned} \delta(\lambda) = 2\omega + m\lambda^2 \cos\lambda\pi + \lambda\left[(1+mB)\sin\lambda\pi + \alpha\cos\lambda\pi\right] + \\ + \alpha B\sin\lambda\pi + (\beta - B - m\gamma A)\cos\lambda\pi + m\lambda f(\lambda) + g(\lambda), \end{aligned} \tag{4}$$

где $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ – целые функции экспоненциального типа не выше π, принадлежащие пространству $L_2(-\infty,\infty)$, $A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(x)dx$ и $B = A + \gamma$. Стандартным методом можно показать, что для собственных значений $\gamma_k\ (k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ краевой задачи (1), (2) при $|k| \to \infty$ имеет место асимптотическая формула:

$$\gamma_k = k - \frac{1}{2}\operatorname{sign} k + \frac{(-1)^k M}{k\pi} + \frac{\tau_k}{k}, \text{ где } M = B + \frac{1}{m}, \quad \{\tau_k\} \in l_2.$$

Легко заметить, что квадраты нулей $\nu_k\ (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ функции $\sigma(\lambda)$ являются собственными значениями краевой задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями

$y(0)=y'(\pi)+\gamma\, y(\pi)=0$. Числа ν_k при $|\kappa|\to\infty$ подчиняются асимптотике $\nu_k=k-\frac{1}{2}\operatorname{sign}k+\frac{B}{k\pi}+\frac{\xi_k}{k}$, где $\{\xi_k\}\in l_2$. Обозначим $\sigma_k=\operatorname{sign}\left[1-|\omega s(\pi,\nu_k)|\right]$.

Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача. Даны последовательности $\{\gamma_k\}$, $\{\sigma_k\}$ и числа β, ω, построить коэффициент $q(x)$ уравнения (1) и параметры m,α,γ граничных условий (2).

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. *Задание величин* $\{\gamma_k\}$, $\{\sigma_k\}$, β, ω *однозначно определяет функцию* $q(x)$ *и параметры* m,α,γ. *Решение обратной задачи может быть получено по следующему алгоритму.*

Алгоритм. 1) По последовательности $\{\gamma_k\}$ построим функцию $\delta(\lambda)$ в виде бесконечного произведения.

2) С помощью соотношения (4) определим параметры m и α по формулам $m=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\delta(2k)}{4k^2}$ и $\alpha=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\delta(2k)-2\omega-4mk^2}{2k}$.

3) Построим функцию $\sigma(\pi,\lambda)=\dfrac{\delta(\lambda)-\delta(-\lambda)}{2\alpha\lambda}$, согласно формуле (3) и находим нули ν_k этой функции.

4) Восстановим функцию $h_+(\lambda)=-\eta(\pi,\lambda)+\omega^2 s(\pi,\lambda)+$ $+\left(m\lambda^2+\alpha\lambda+\beta\right)\sigma(\pi,\lambda)$ по формуле $h_+(\lambda)=\delta(\lambda)-2\omega$ (см. (3)).

5) Находим значение функции $h_-(\lambda)=-\eta(\pi,\lambda)-\omega^2 s(\pi,\lambda)+$ $+\left(m\lambda^2+\alpha\lambda+\beta\right)\sigma(\pi,\lambda)$ в точках ν_k следующим образом: $h_-(\nu_k)=(-1)^k\sigma_k\sqrt{h_+^2(\nu_k)-4\omega^2}$.

6) С помощью $\sigma(\pi,\lambda)$ и $h_+(\nu_k)$ восстановим функцию

$$g(\lambda)=h_+(\lambda)-h_-(\lambda)-2\omega^2\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} \qquad (5)$$

по интерполяционной формуле $g(\lambda)=\sigma(\pi,\lambda)\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\dfrac{g(\nu_k)}{(\lambda-\nu_k)\dot{\sigma}(\pi,\nu_k)}$,

где $g(\nu_k)=h_+(\nu_k)-(-1)^k\sigma_k\sqrt{h_+^2(\nu_k)-4\omega^2}-2\omega^2\dfrac{\sin\nu_k\pi}{\nu_k}$, а точка над функцией означает дифференцирование по λ.

7) Определим $h_-(\lambda)$ из (5).

8) Характеристическую функцию $s(\pi,\lambda)$ краевой задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями Дирихле $y(0)=y(\pi)=0$, определим по формуле $s(\pi,\lambda)=\dfrac{1}{2\omega^2}\left[h_+(\lambda)-h_-(\lambda)\right]$.

9) По последовательностям нулей функций $s(\pi,\lambda)$ и $\sigma(\pi,\lambda)$ построим коэффициент $q(x)$ и параметр γ по известной процедуре (см., например, [5]).

Библиографический список

1. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.
2. Ахтямов А.М., Кумушбаев Р.Р. Идентификация полинома в нераспадающихся краевых условиях по одному собственному значению // Дифференц. уравн., 2016. – Т. 52, № 5. – С. 692–695.
3. Ibadzadeh Ch.G., Nabiev I.M. An inverse problem for Sturm-Liouville operators with non-separated boundary conditions containing the spectral parameter // J. of Inverse and Ill-posed Problems, 2016. – Vol. 24, № 4. –P. 407–411.
4. Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р. Об одной краевой задаче со спектральным параметром в граничных условиях // Сиб. матем. журн., 1999. – Т. 40, № 2. –С. 325–335.
5. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 332 с.
6. Moller M., Pivovarchik V. Spectral Theory of Operator Pencils, Hermite-Biehler Functions, and their Applications. – Birkhauser: Cham, 2015. – 412 pp.
7. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратная задача Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. – М.: Изд-во МГУ, 2009. – 184 с.
8. Freiling G., Yurko V. Recovering nonselfadjoint differential pencils with non-separated boundary conditions // Applicable Anal. – 2015. – Vol. 94, № 8. – P. 1649–1661.

Сведения об авторе

Набиев Ибрагим Маил оглы, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бакинского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики и механики НАН Азербайджана, профессор кафедры математики Университета Хазар, Азербайджан. E-mail: nabievim@yahoo.com.

УДК 004.42

Наумов С.Н., Болтачев Э.Ф., Нафикова А.Р.

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА ЗАПОЛНЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ КАРТОЧКИ

В данной работе разработана автоматизированная информационная система заполнения статистической карточки с использованием прикладных программ SQL Server Management Studio, SQL Server Business Intelligence Development Studio, Delphi XE3.

Ключевые слова: компьютерные технологии, информационные технологии, бизнес-процессы, статистическая карточка, форма.

Naumov S.N., Boltachev E.F., Nafikova A.R.

AUTOMATED INFORMATION SYSTEM FOR FILLING OUT A STATISTICAL CARD

In this work an automated information system for filling out a statistical card has been developed using application programs SQL Server Management Studio, SQL Server Business Intelligence Development Studio, Delphi XE3.

Key words: computer technologies, information technologies, business processes, statistical card, form.

Современные компании и организации действуют в условиях большого объема информации, которую постоянно необходимо обрабатывать, анализировать и принимать решения. В наше время активно развиваются компьютерные и информационные технологии. Поэтому развитие информационных систем в настоящее время становится необходимым процессом. Приоритетное место занимают современные информационные технологии, которые направлены на получение огромного конкурентоспособного преимущества. Все это возможно лишь в том случае, когда уровень развития информационной системы удовле-

© Наумов С.Н., Болтачев Э.Ф., Нафикова А.Р., 2017

творяет уровню развития компании или организации. Путем следования вышеописанного равенства улучшается инвестиционная привлекательность компании или организации, главные бизнес-процессы становятся понятными, четкими, а главное прозрачными. В связи с этим для их контроля и управления, исключаются ошибки, а самое главное исключаются потери времени и средств. Исходя из этого, создание информационных систем представляет собой серьезную задачу, решение которой требует использования специальных методик и систем.

Актуальность и важность информационной системы определяется необходимостью изучения теоретических положений, которые связаны с нормативно-техническими свойствами, предназначенные для разработки и проектирования, управления жизненным циклом и архитектурой, внедрением и сопровождением информационной системы [1].

Для разработки информационной системы заполнения статистической карточки преступлений, были изучены такие пункты, как:

1) основные понятия технологии проектирования информационной системы;

2) процессы и модели жизненного цикла;

3) методология проектирования информационной системы.

Практическая реализация автоматизированной информационной системы включает в себя следующие этапы (рис. 1):

1) сбор информации;
2) анализ информации;
3) создание базы данных;
4) создание формы статистической карточки в Delphi XE3;
5) связка базы данных с формой.

Первым этапом стал сбор необходимой информации, в которую входят:

1) справочники (16 штук). Сам справочник представляет собой набор кодов из шестизначного числа и его расшифровку;

2) формы статистической карточки (5 штук).

В дальнейшем был реализован этап перевода всей собранной информации (свыше 5 тысяч записей) из формата doc в формат xlsx и параллельное создание базы данных «Справочник», в которой содержится 16 таблиц. Все это было реализовано путем использования среды SQL Server Management Studio. Так как информация содержит большой объем данных, была использована среда SQL Server Business Intelligence Development Studio для автоматического заполнения таблиц, что позволило сократить время заполнения [2].

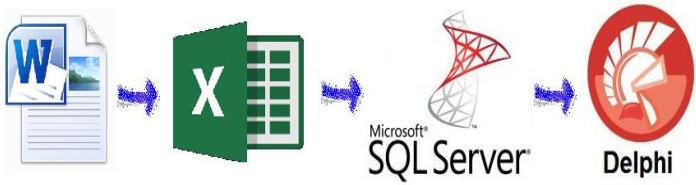


Рис. 1. Этапы разработки автоматизированной информационной системы заполнения статистической карточки преступлений

Заполнив таблицы, в которых содержатся данные из справочников, был реализован набор форм из пяти штук в программном продукте Delphi XE3 [3]. Сама форма представляет собой статистическую карточку. Каждая карточка представляет собой определенный этап выявления и расследования преступления.

Заполнив и проставив все нужные кодировки из справочника путем выпадающего списка, сотруднику Управления МВД облегчается работа заполнения статистической карточки. Это позволит сократить время заполнения статистической карточки и перейти к следующей. Также благодаря автоматизированной информационной системе заполнения статистической карточки, больше нет необходимости носить с собой справочники на бумажном носителе, которые являются достаточно объемными и массивными. В конце заполнения статистической карточки при необходимости имеется возможность сформировать отчет статистической карточки [4], распечатать его или в электронном виде отправить по электронной почте или внутренней сети.

Библиографический список

1. Коцюба И.Ю., Чунаева А.В., Шиков А.Н. Основы проектирования информационных систем. Учебное пособие – СПб: Университет ИТМО, 2015. – 206 с.

2. Нафикова А.Р. Практическое руководство по Microsoft SQL Server: Учеб. пособие. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2014. – 137 с.

3. Нафикова А.Р., Нафиков В.Р. Разработка приложений баз данных в среде Delphi: Учеб. пособие. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2015. – 95 с.

4. Нафикова А.Р., Нафиков В.Р. Разработка отчетов средствами генератора FastReport в среде Delphi. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – 144 с.

Сведения об авторах

Наумов Сергей Николаевич, студент экономического факультета СФ БашГУ. E-mail: nsnserg4@gmail.com.

Болтачев Эльдар Филаридович, начальник штаба Управления МВД России по г. Стерлитамак, подполковник внутренней службы. E-mail: eboltachiov@mvd.ru.

Нафикова Альбина Ринатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования СФ БашГУ. E-mail: albinabikbaeva@gmail.com.

УДК 519.63:517.958

Нафикова А.Р., Кризский В.Н., Паскалов Д.И.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА РАДОНА В ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДАХ

В работе представлены результаты математического моделирования процессов переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями.

Ключевые слова: радон, диффузия-адвекция, анизотропная среда, математическое моделирование.

Nafikova A.R., Krizsky V.N., Paskalov D.I.

TO A RESEARCH OF PROCESSES OF TRANSFER OF RADON IN GEOLOGICAL MEDIA

In work results of mathematical modeling of processes of transfer of radon in piecewise and constant anisotropic layered media with inclusions are presented.

Key words: radon, diffusion and advection, anisotropic medium, mathematical modeling.

Моделирование процессов переноса радона в геологических средах, максимально приближенных при их описании к реальным, является сложной задачей, поскольку геологическая среда является неоднородной, слоистой с заметно различающимися физико-геологическими характеристиками [1].

© Нафикова А.Р., Кризский В.Н., Паскалов Д.И., 2017

Следует отметить, что до сих пор среди специалистов нет единого мнения о механизмах формирования радоновых полей, о параметрах, характеризующих радоновое поле и подлежащих измерению. Одни считают, что основную информацию о возмущающих объектах и геологических структурах несет концентрация радона в почвенном (подпочвенном) и / или атмосферном воздухе, другие – что только поток радона через дневную поверхность способен дать необходимую и достоверную информацию об источниках радона и глубинных структурах, через которые проходит радон и которые формируют радоновые аномалии [2].

Математическое моделирование процессов распределения радона в грунте и его стока в приземный слой атмосферы связано с решением параболических краевых задач математической физики. Разработка математических моделей, алгоритмов решения и программ расчета процессов распространения радона – актуальная задача, имеющая практическое значение во многих научных направлениях и областях.

Обзор литературы по теме исследования показывает достаточно большое количество работ, посвященных построению и исследованию математических моделей процессов переноса радона. Большинство из них основано только на одномерных диффузионных или диффузионно-конвективных математических моделях в однородных геологических средах. Однако сейчас уже можно встретить ряд публикаций по расчету функции объемной активности радона для трехмерной математической модели, что еще раз подтверждает значимость и актуальность научных исследований в области радоновой тематики.

Так, в работе [3] построена математическая модель трехмерной задачи диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных слоистых средах с включениями, учитывающая анизотропию диффузионных свойств подобластей геологической среды (1):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial A_{i.j}(P,t)}{\partial t} = div(D_{i.j}\overline{\nabla}A_{i.j}(P,t)) + \nu_{i.j}\frac{\partial A_{i.j}(P,t)}{\partial z} - \lambda(A_{i.j}(P,t) - A_{i.\infty}), \\
P = P(x,y,z) \in \Omega_{i.j},\ i = \overline{0,N},\ j = \overline{0,M_i}; \\
((D_{i.0}\overline{\nabla}A_{i.0}(P,t),\overline{n}) + \nu_{i.0}A_{i.0}(P,t))\Big|_{\gamma_{i.0}} = ((D_{i+1.0}\overline{\nabla}A_{i+1.0}(P,t),\overline{n}) + \\
+ \nu_{i+1.0}A_{i+1.0}(P,t))\Big|_{\gamma_{i.0}},\ i = \overline{0,N-1}; \\
A_{i.0}(P,t)\Big|_{\gamma_{i.0}} = A_{i+1.0}(P,t)\Big|_{\gamma_{i.0}},\ i = \overline{0,N-1};
\end{gathered} \qquad (1)$$

$$((D_{i.j}\overline{\nabla}A_{i.j}(P,t),\overline{n})+\nu_{i.j}A_{i.j}(P,t))\Big|_{\gamma_{i.j}}=(D_{i.0}\overline{\nabla}A_{i.0}(P,t),\overline{n})+\nu_{i.0}A_{i.0}(P,t))\Big|_{\gamma_{i.j}},$$

$$i=\overline{0,N},\ j=\overline{1,M_i};$$

$$A_{i.j}(P,t)\Big|_{\gamma_{i.j}}=A_{i.0}(P,t)\Big|_{\gamma_{i.j}},\ i=\overline{0,N},\ j=\overline{1,M_i};$$

$$\lim_{z\to\infty}A_{N.0}(P,t)=A_{N.\infty},\ \lim_{z\to-\infty}A_{0.0}(P,t)=0;$$

$$\lim_{P\in\Omega_{i.j},\sqrt{x^2+y^2}\to\infty}A_{i.0}(P,t)=A_i(P,t),\ i=\overline{0,N};$$

$$A_{i.j}(P,0)=0,\ i=\overline{0,N},\ j=\overline{0,M_i}.$$

Здесь $A_{i.j}(P,t)$ – функция объемной активности радона (ОАР) в грунте, $A_{i.j}(P,t)\in C_P^2(\Omega)\cap C_P^1(\gamma_{i.j})\cap C_t^1(\Omega)$; λ – постоянная распада радона; $A_{i.\infty}$ – ОАР, находящегося в радиоактивном равновесии с радием (^{226}Ra) на заданной глубине в грунте i-го слоя, которая равна $A_{i.\infty}=K_{i.em}A_{i.Ra}\rho_{i.s}(1-\eta_i)$, где $K_{i.em}$ – коэффициент эманирования радона, $A_{i.Ra}$ – удельная активность ^{226}Ra, $\rho_{i.s}$ – плотность твердых частиц, η_i – пористость грунта, $A_i(P,t)$ – нормальное поле радона, описывающее диффузию-адвекцию радона в слоистой среде в предположении отсутствия включений; $\gamma_{i.0}=\left\{\gamma_{i.0}\,(x,y)\,\middle|\,\gamma_{i.0}\to z_i\ при\ \sqrt{x^2+y^2}\to\infty\right\}\left(i=\overline{0,N}\right)$ – гладкие параметрические заданные границы горизонтально-слоистой среды разделенной ими на горизонтальные слои $\Omega_{0.0},\Omega_{1.0},\ldots,\Omega_{N.0}$, заполненные веществом, диффузионные свойства которого описываются постоянными симметричными тензорами $D_{i.0}=\begin{pmatrix}d_{xx}^{i.0} & d_{xy}^{i.0} & d_{xz}^{i.0}\\ d_{xy}^{i.0} & d_{yy}^{i.0} & d_{yz}^{i.0}\\ d_{xz}^{i.0} & d_{yz}^{i.0} & d_{zz}^{i.0}\end{pmatrix}$ и скоростями адвекции $\nu_{0.0},\nu_{1.0},\ldots,\nu_{N.0}$ соответственно. Каждый слой $\Omega_{i.0}$ содержит M_i локальных включений $\Omega_{i.j}$ ($j=\overline{1,M_i}$) с границами $\gamma_{i.j}$, заполненных веществом, физические свойства которого

описываются постоянными симметричными тензорами диффузии $D_{i.j} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i.j} & d_{xy}^{i.j} & d_{xz}^{i.j} \\ d_{xy}^{i.j} & d_{yy}^{i.j} & d_{yz}^{i.j} \\ d_{xz}^{i.j} & d_{yz}^{i.j} & d_{zz}^{i.j} \end{pmatrix}$ и скоростями адвекции $v_{i.j}, i = \overline{0,N}, j = \overline{1,M_i}$. Если область $\Omega_{0.0}$ – приземный слой атмосферы, то в задаче (1) следует положить $A_{0.\infty} = 0$. При $M_0 > 0$ включения $\Omega_{0.1},\ldots,\Omega_{0.M_0}$ могут описывать жилые и производственные сооружения. Переменная $t \geq 0$ – время.

Описан способ ее решения, основанный на сочетании методов интегральных преобразований Лапласа, интегральных представлений по формуле Остроградского с построением функции Грина в слоистой среде без включений и интегральных уравнений Фредгольма II рода, возникающих по границам раздела сред.

В соответствии с предложенным способом решения задачи средствами компьютерной системы Maple разработаны программы, реализующие численные алгоритмы нахождения функции нормального поля радона, функции Грина в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоскопараллельными границами, обращения интегрального преобразования Лапласа и функции аномального поля радона, учитывающей влияние включений [4].

В работе [5] представлены результаты сравнительного сопоставления данных вычислительного и натурного экспериментов по исследованию процессов переноса радона в кусочно-однородных горизонтально-слоистых средах, которые показали адекватность и достоверность предложенных модели и метода решения задачи.

С помощью разработанного программного комплекса также проведены вычислительные эксперименты по исследованию процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями и взаимному влиянию параметров математической модели. Выявлено, что учет анизотропии при моделировании процессов переноса радона в геологических средах приводит к существенному изменению поля объемной активности радона и является значимым фактором, необходимым при описании математической модели поля в реальных геологических средах [6].

Предложенные комбинированные методы и алгоритмы являются развитием теории решения краевых задач для уравнений тепломассопереноса в кусочно-постоянных анизотропных средах и позволяют решать практические задачи по исследованию процессов переноса радона в трехмерных кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с анизотропными включениями. В настоящий момент проводятся расчеты плотности потока радона, а также ведутся обсуждения об использовании разработанного алгоритма при решении обратной граничной задачи в вариационных процедурах поиска аппроксимированных сплайнами границ геологической среды как экстремалей регуляризирующего функционала А.Н. Тихонова.

Библиографический список

1. Яковлева В.С. Диффузионно-адвективный перенос радона в многослойных геологических средах // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 315, № 2. – С. 67–72.

2. Хайкович И.М. Математическое моделирование процессов миграции радона // Аппаратура и новости радиационных измерений (АНРИ). – 1996/97. – № 3 (9). – С. 99–107.

3. Кризский В.Н., Нафикова А.Р. Математическое моделирование процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями // Вестник ЮУрГУ. Математическое моделирование и программирование. – 2014. – № 2. – С. 38–45.

4. Нафикова А.Р., Кризский В.Н., Султанов Л.З. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015660698 «Исследование процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-анизотропных слоистых средах с включениями», 06.10.2015 г. // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (РосПатент).

5. Нафикова А.Р., Кризский В.Н., Козлова И.А., Юрков А.К. Сравнительное сопоставление данных вычислительного и натурного экспериментов по исследованию процессов переноса радона в кусочно-однородных горизонтально-слоистых средах // АНРИ. – 2016. – № 4 (87). – С. 67–72.

6. Нафикова А.Р., Кризский В.Н. Математическое моделирование процессов переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – 87 с.

Сведения об авторах

1. Нафикова Альбина Ринатовна, кандидат физико-математических наук, доцент Стерлитамакского филиала БашГУ. E-mail: albinabikbaeva@gmail.com.

2. Кризский Владимир Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор Стерлитамакского филиала БашГУ. E-mail: krizsky@rambler.ru.

3. Паскалов Денис Иовович, магистрант Стерлитамакского филиала БашГУ. E-mail: paskalov-d@mail.ru.

УДК 004.42

Негодин М.И., Нафиков В.Р., Нафикова А.Р.

РАЗРАБОТКА САЙТА НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

В статье описываются этапы создания web-сайта для научных конференций. Приводится пример разработанного сайта.

Ключевые слова: web-сайт, научная конференция, разработка.

Negodin M.I., Nafikov V.R., Nafikova A.R.

DEVELOPMENT OF THE WEBSITE OF THE SCIENTIFIC-PRACTICAL CONFERENCE

In article stages of creation of the website for scientific conferences are described. The example of the designed website is given.

Keywords: web site, conference, development.

Конференция является отличной возможностью донесения важных сведений до целевой аудитории, проанализировав выбранную тему со всех аспектов и промотивировать слушателей на какие-либо действия. При проведении подобных мероприятий необходимо учитывать все нюансы (способы представления информации, подготовленность участников, а также не забыть об организационных и подготовительных мерах).

Качество проведения таких мероприятий большей степенью определяется техническими и вспомогательными программными средствами, которые зачастую используют их организаторы.

К основным задачам относят типовые информационные процессы:

© Негодин М.И., Нафиков В.Р., Нафикова А.Р., 2017

– подготовка веб-сайта конференции и управление его содержанием;
– регистрация заявок участников;
– рецензирование и отбор докладов;
– формирование и публикация программы конференции;
– формирование сборника трудов конференции.

Следует отметить, что любая проводимая когда-либо конференция имеет свои особенности, и поэтому требования к информационному сопровождению могут различаться.

Рассмотрим различные системы поддержки проведения научных конференций, относящиеся к классу систем управления содержимым, такие как CMS (Content Management Systems):
– WCMS – системы управления web-содержимым;
– ECMS – системы управления корпоративным содержимым;
– DMS – системы управления документами;
– MCMS – системы для управления содержимым, которые используются для мобильных устройств [1].

Анализ представленных выше систем показывает необходимость в разработке и содержании следующих страниц Web-сайта конференции:
1) регистрационные заявки участников;
2) рецензии членов программного комитета.

При этом задачи управления содержимым страниц первого вида относят к WCMS, а второго вида – к DMS.

Для создания типового сайта конференции необходима стандартная функциональность WCMS-систем: добавление / редактирование рубрик сайта, добавление статей / тезисов, выбор шаблона оформления, управление содержимым. По мере разработки программы конференции возникает необходимость в ее публикации, что заставляет регулярно обновлять список зарегистрированных участников, а также список принятых докладов с разбиением по секциям и с возможностью просмотра тезисов для различных групп. Чаще всего, встречаемое решение состоит в разработке web-сайта конференции в виде статичной html-страницы [2].

1. Регистрация заявок на участие.

Говоря о регистрации, необходимо заполнить фиксированную форму с традиционным списком полей (ФИО, место работы, должность, ученая степень и др.). Пример формы регистрации заявок на участие в конференции представлен на рис. 1.

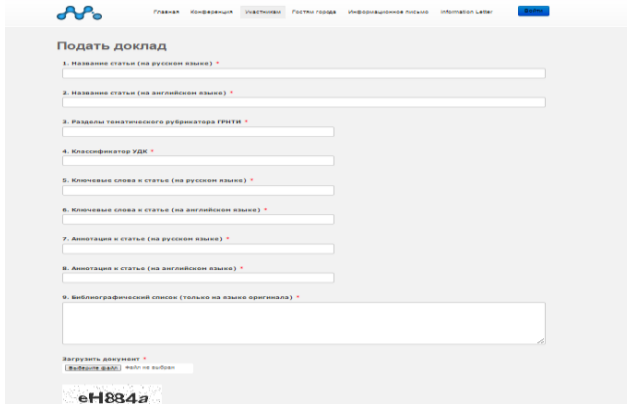


Рис. 1. Форма регистрации заявок на участие

Наиболее существенной для информационного обеспечения конференции является возможность опубликования списков участников и докладчиков, указав ту организацию, от которой они будут принимать участие (рис. 2).

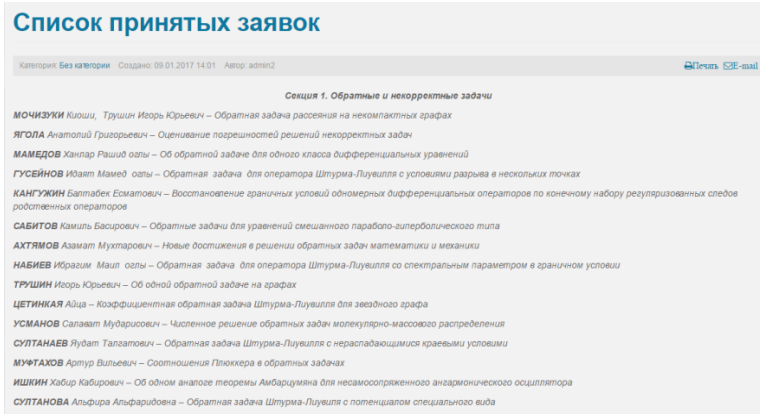


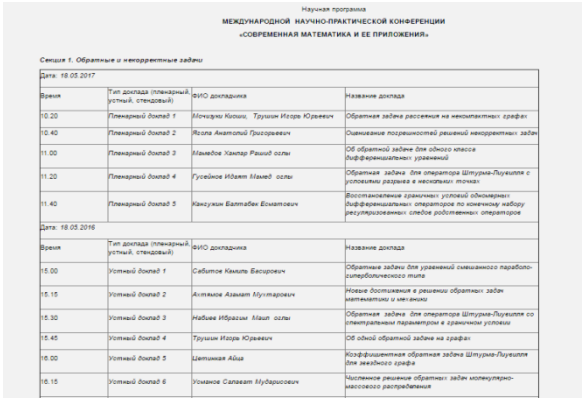
Рис. 2. Список принятых заявок

2. Формирование программы конференции.

При завершении процедуры регистрации заявки перед организаторами встает еще одна задача – формирование программы конференции (рис. 3) по списку принятых заявок. Как правило, используются два подхода к проведению рецензирования:

– программный комитет принимает к участию все формально подходящие заявки;

– члены программного комитета проводят экспертизу заявок, в результате которой для каждой заявки определяются рекомендуемая секция и формат выступления.



Научная программа

МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»

Секция 1. Обратные и некорректные задачи

Дата: 16.05.2017			
Время	*Тип доклада (пленарный, устный, стендовый)*	*ФИО докладчика*	*Название доклада*
10.20	*Пленарный доклад 1*	*Мочизуки Кисин, Трушин Игорь Юрьевич*	*Обратная задача рассеяния на некомпактных графах*
10.40	*Пленарный доклад 2*	*Ягола Анатолий Григорьевич*	*Оценивание погрешностей решений некорректных задач*
11.00	*Пленарный доклад 3*	*Мамедов Ханлар Рашид оглы*	*Об обратной задаче для одного класса дифференциальных уравнений*
11.20	*Пленарный доклад 4*	*Гусейнов Идрет Мамед оглы*	*Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля с условиями разрыва в некоторых точках*
11.40	*Пленарный доклад 5*	*Кангужин Балтабек Есматович*	*Восстановление граничных условий обыкновенных дифференциальных операторов по конечному набору регуляризованных следов родственных операторов*
Дата: 16.05.2016			
Время	*Тип доклада (пленарный, устный, стендовый)*	*ФИО докладчика*	*Название доклада*
15.00	*Устный доклад 1*	*Сабитов Камиль Басирович*	*Обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа*
15.15	*Устный доклад 2*	*Аитмов Азамат Муктарович*	*Новые достижения в решении обратных задач математики и механики*
15.30	*Устный доклад 3*	*Набиев Ибрагим Маш оглы*	*Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии*
15.45	*Устный доклад 4*	*Трушин Игорь Юрьевич*	*Об одной обратной задаче на графах*
16.00	*Устный доклад 5*	*Цетинкая Айша*	*Коэффициентная обратная задача Штурма-Лиувилля для экзотического графа*
16.15	*Устный доклад 6*	*Усманов Салават Мударисович*	*Численное решение обратных задач молекулярно-массового распределения*

Рис. 3. Формирование программы конференции

Для создания типового Web-сайта конференции наиболее предпочтительной CMS является Joomla. Более того, она является бесплатной программой с огромным количеством расширений, модулей и плагинов [3, 4].

Приведем основные характеристики и возможности CMS Joomla:

– полностью основанный на БД движок с использованием PHP / MySQL [5];

– модуль безопасности для многоуровневой аутентификации пользователей / администраторов;

– секции новостей, продукции или услуг легко редактируемы и управляемы;

– разделы тем могут быть добавлены авторами;

– полностью настраиваемые схемы расположения элементов, включая левый, правый и центральный блоки меню;

– загрузка изображений при помощи браузера в вашу собственную библиотеку – для последующего использования с любого места сайта;

– форумы / опросы / голосования для эффективной обратной связи;

– работа под Linux, FreeBSD, MacOSX, Solaris, AIX, SCO, Windows и Windows Server;

– возможность создавать неограниченное количество страниц;

– четкая организация структуры сайта;

– для каждой динамической страницы можно создать свое описание и ключевые слова в целях повышения рейтинга в поисковых системах;

– начало и окончание публикации любых материалов можно запрограммировать по календарю;

– возможность ограничить доступ к определенным разделам сайта только для зарегистрированных пользователей;

– наличие различных модулей: последние новости, счетчик посещений, подробная статистика посещений, гостевая книга, форум и т.д.;

– возможность создания не одной, а нескольких форм обратной связи для каждого контакта;

– изменение порядка объектов, включая новости, вопросы, статьи и т.д.;

– наличие генератора показа случайных новостей;

– наличие модуля приёма от удалённых авторов новостей, статей и ссылок;

– библиотека изображений позволит хранить все GIF- и JPEG-файлы под рукой для лёгкого доступа;

– менеджер рассылки новостей позволит выбирать из более чем 360 служб рассылки новостей по всему миру;

– менеджер архива позволит помещать старые статьи в архив, чем просто удалять их;

– возможность распечатать или отправить другу на e-mail любую статью с сайта;

– выбор из трех визуальных редакторов, что упрощает редактирование материалов до уровня редактирования текста в программе MS Word;

– предварительный просмотр перед окончательным размещением;

– возможность легкой смены дизайна;

– экономное использование места на сервере за счет использования базы данных MySQL;

– возможность использования адресов страниц, адаптированных к лучшей индексации всеми поисковыми системами.

Библиографический список

1. Граф Х., Баскинов А. 10 легких шагов к освоению Joomla! 3 [Электронный ресурс] – URL: http://joomla-book.ru/download/books/beginners-guide-joomla-3-book#files.

2. Берри Н. Joomla! Практическое руководство. – СПб.: Символ-Плюс, 2008. – 448 с.

3. Макфарланд Д.С. Большая книга CSS3. – СПб.: Питер, 2016. – 608 с.

4. Горнаков С.Г. Осваиваем популярные системы управления сайтом (CMS). – М.: ДМК Пресс, 2009. – 336 с.

5. Колисниченко Д. Движок для вашего сайта. CMS Joomla!, Slaed, PHP-Nuke. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 357 с.

Сведения об авторах

Негодин Михаил Иванович, студент факультета математики и информационных технологий СФ БашГУ. E-mail: forever-besss@yandex.ru.

Нафиков Венер Радикович, инженер-программист ООО «Гиппократ». E-mail: maestrostr@gmail.com.

Нафикова Альбина Ринатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования СФ БашГУ. E-mail: albinabikbaeva@gmail.com.

УДК 532.5.013.4

Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В работе рассмотрена задача об устойчивости ламинарного течения термовязкой жидкости.

Ключевые слова: термовязкая жидкость, модифицированное уравнение Орра-Зоммерфельда, гидродинамическая устойчивость.

Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F.

INVESTIGATION OF THE THERMOVISCOUS LIQUID FLOWS IN A PLANE CHANNEL

The problem of the stability of laminar thermoviscous liquid flow has been considered in the paper.

Keywords: a thermoviscous liquid, the modified Orr-Sommerfeld equation, a hydrodynamic stability.

Для изучения вопроса о гидродинамической устойчивости важен процесс нахождения условий смены режима течения жидкости.

Хорошо исследована задача об устойчивости ламинарного течения несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью, которая описывается классическим уравнением Орра-Зоммерфельда [1–2]. Однако, вопрос об устойчивости течения термовязкой жидкости остается до сих пор малоизученным. Важно заметить, что при двухслойном течении термовязких жидкостей неустойчивость течения одной жидкости не обязательно порождает неустойчивость течения второй. Данное утверждение доказано экспериментально [3].

В данной работе рассмотрена проблема об устойчивости однослойного и двухслойного течений жидкостей с температурной зависимостью вязкости.

Рассмотрим течение несжимаемой термовязкой жидкости в плоском канале с неоднородным температурным полем. Математическая модель данного течения в безразмерном виде представлена формулой (1) с граничными условиями (2).

Предполагаем, что течение плоскопараллельное, то есть вертикальная компонента скорости равна нулю и начальная температура имеет линейное распределение по сечению канала.

© Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф., 2017

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(T)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mu(T)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right], \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(T)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mu(T)\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\right], \\ \dfrac{\partial T}{\partial t}+u\dfrac{\partial T}{\partial x}+v\dfrac{\partial T}{\partial y}=\dfrac{1}{Pe}\left[\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right], \end{cases} \quad (1)$$

где u, v – компоненты скорости, p – давление, T – температура, $\mu(T)$ – вязкость, Re – число Рейнольдса, Pe – число Пекле.

$$u(-1)=u(1)=0,$$
$$T(-1)=0,\ T(1)=2, \quad (2)$$

где промежуток [-1;1] в безразмерном виде является высотой канала.

Далее необходимо определить вид зависимости вязкости от температуры. Рассмотрим линейную и экспоненциальную зависимости:

$$\mu(T)=1-\alpha T, \quad \mu(T)=e^{-\alpha T}. \quad (3)$$

Затем находим профиль скорости течения в невозмущенном состоянии [4]. Это можно сделать аналитически или численно.

Линеаризуя уравнения Навье–Стокса, уравнение неразрывности и уравнение сохранения энергии и заменяя инфинитезимальные возмущения в виде бегущей волны, получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \mu_0\left[\varphi^{IV}-2k^2\varphi''+k^4\varphi\right]-ik\,\mathrm{Re}\left[(u_0-c)(\varphi''-k^2\varphi)-u_0''\varphi\right]+ \\ +2\mu_0'\cdot\left(\varphi'''-k^2\varphi'\right)+\mu_0''\varphi''-ik\left[\mu_0'\cdot\beta''+\mu_0''\cdot\beta'+\mu_0'''\cdot\beta\right]=0, \\ \left(\theta''-k^2\theta\right)-ik\mathrm{Pe}(u_0-c)\theta-\mathrm{Pe}\varphi T_0'=0,. \end{gathered} \quad (4)$$

где $\varphi(y),\theta(y)$ – амплитуды возмущений скорости и температуры, k>0– волновое число, c – собственное значение, $u_0(y),T_0(y),\mu_0(y)$ – невозмущенные скорость, температура, вязкость, $\beta=\theta\cdot u_0''$, i – мнимая единица.

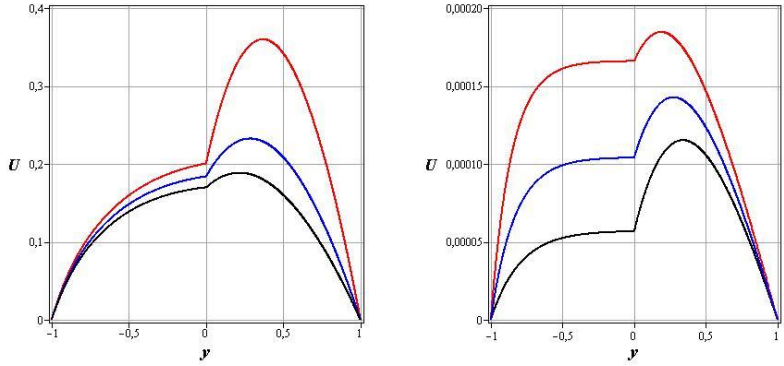
Граничные условия для данной системы (4) имеют следующий вид:

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0,\ \varphi'(-1) = \varphi'(1) = 0, \qquad (5)$$
$$\theta(-1) = \theta(1) = 0.$$

Для нахождения условий смены режима течения термовязкой жидкости достаточно решить модифицированное уравнение Орра-Зоммерфельда (4)–(5), то есть найти все не тривиальные собственные значения c.

Для задачи об устойчивости двухслойного течения термовязких жидкостей проводятся аналогичные однослойному течению исследования.

По результатам проведенной работы на рис. 1 представлены профили скоростей двухслойного течения термовязких жидкостей.



а) *б)*

Рис. 1. Профили скоростей для а) – линейной: a_2=200, b_2=250, a_1=5, b_1=10 (верхняя кривая), a_1=10, b_1=20 (средняя кривая), a_1=15, b_1=30 (нижняя кривая) и б) – экспоненциальной зависимостей вязкости от температуры: a_1=1, b_1=10, b_2=2000, a_2=7 (верхняя кривая), a_2=6 (средняя кривая),a_2=5 (нижняя кривая)

Для однослойного течения термовязкой жидкости были также найдены профили скоростей и области неустойчивости (рис 2).

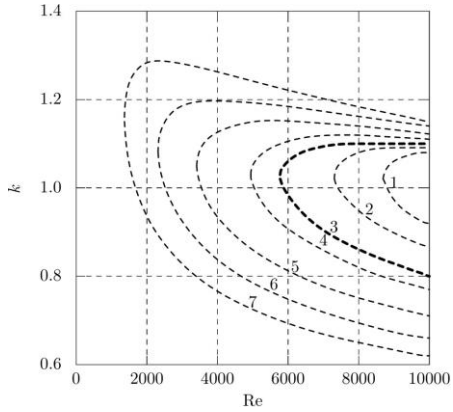


Рис. 2. Области неустойчивости для профиля Пуазейля с постоянной вязкостью (3) и термовязкого профиля скорости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры: α = 0,15 (1), α = 0,25 (2), α = 0,5 (4), α = 0,75 (5), α = 1 (6), α = 1,5 (7).

Библиографический список

1. Orszag S.A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // Journal of Fluid Mechanics, 1971. – Vol. 50. – Part 4. – P. 689–703.

2. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. – М.: Физматлит, 2005. 288 с.

3. Гужов А.И. Совместный сбор и транспорт нефти и газа. – М.: Недра, 1973. – 280 с.

4. Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф. Некоторые точные решения стационарной системы уравнений для стратифицированного течения двух термовязких жидкостей // Вестник УГАТУ. – 2016. – Т. 20. – № 2 (72). – С. 90–95.

Сведения об авторах

Низамова А.Д., молодой ученый ИМех УНЦ РАН. E-mail: adeshka@yandex.ru.

Киреев В.Н., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной физики БашГУ. E-mail: kireev@anrb.ru.

Урманчеев С.Ф., доктор физико-математических наук, профессор. E-mail: said@anrb.ru.

УДК 517.95

Николаев В.Г.

О ДВУХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе изучена следующая задача: найти две голоморфные в плоской области функции, значения которых на границе области заданы функциональным уравнением. Сформулированы три теоремы существования и единственности решения этой задачи. Построены непостоянные решения однородной задачи.

Ключевые слова: голоморфная функция, контур Ляпунова, жорданов базис.

Nikolaev V.G.

ON TWO BOUNDARY PROBLEMS FOR SCALAR FUNCTIONAL EQUATIONS

The following problem was studied: find two holomorphic in a flat region of the function whose values on the boundary of the region specified functional equation. Formulated three theorems on existence and uniqueness of the solution of this problem. Constructed irregular solutions of the homogeneous problem.

Key words: holomorphic function, the contour of the Lyapunov, Jordan basis.

Пусть число $\lambda \in C, \quad Im\,\lambda \neq 0.$ Приведем следующее

Определение 1. *Скалярную функцию* $f_\lambda = f_\lambda(z) \in C^1(D)$, *для которой в плоской области* $D \subset R^2$ *выполнено уравнение*

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

будем называть λ*-голоморфной в области* D.

Аналогично определяются μ-голоморфные функции $g_\mu = g_\mu(z)$, где $Im\,\mu \neq 0.$

Обозначим $\lambda = a + bi, \quad a, b \in \mathsf{R}, \quad b \neq 0.$ Несложно показать, что голоморфная $(\lambda = i)$ функция $f(x, y)$ становится λ-голоморфной $f_\lambda(x', y')$ в результате линейного обратимого преобразования $x = x' + ay', \quad y = by'.$ Поэтому свойства λ-голоморфных функций

© Николаев В.Г., 2017

тождественны свойствам обычных голоморфных функций. Но есть некоторые интересные непринципиальные отличия. Например, если λ -голоморфную функцию разложить в ряд, то он будет сходиться не в круге, а в эллипсе.

Всюду ниже будем обозначать через $\Gamma = \partial D$ контур Ляпунова. Так же будем предполагать, что комплексная граничная функция $\varphi(t) \in H^{\sigma}(\Gamma), \quad \sigma \in (0,1),$ то есть принадлежит классу Гельдера с показателем σ.

Пусть 2×2 -матрица J имеет разные собственные числа $\lambda \neq \mu,$ где $Im\,\lambda,\ Im\,\mu \neq 0,$ и пусть $Q = (x,y)$ – жорданов базис J, где собственный вектор у *не кратен вещественному.* Сопоставим матрице J следующую скалярную граничную задачу:

$$g_{\mu} + \overline{f}_{\lambda} + l \cdot f_{\lambda}\,|_{\Gamma} = \varphi(t), \qquad f_{\lambda},\ g_{\mu} \in H^{\sigma}(\overline{D}),$$

$$l = \frac{det\ (x,\overline{y})}{det\ (x,y)} \in C. \qquad (2)$$

Пусть теперь 2×2 -матрица J имеет кратное собственное число $\lambda,$ где $Im\,\lambda \neq 0.$ Пусть $Q = (x,y)$ – жорданов базис J, где вектор y – собственный и *не кратный вещественному.* Сопоставим матрице J следующую скалярную граничную задачу:

$$l_1 \cdot y\frac{\partial f_{\lambda}}{\partial x} + \overline{f}_{\lambda} + F_{\lambda}\,|_{\Gamma} = \varphi(t), \quad f_{\lambda}; \quad l_1 \cdot y\frac{\partial f_{\lambda}}{\partial x} + F_{\lambda} \in H^{\sigma}(\overline{D}),$$

$$l_1 = \frac{det\ (\overline{y},y)}{det\ (x,y)} \in C. \qquad (3)$$

Замечание 1. Имеет место следующее «круговое свойство»: задачи (2) и (3) разрешимы или нет одновременно для всех чисел l, l_1 с одинаковым модулем. Поэтому *не умаляя общности числа* l, l_1 *в* (2), (3) *можно заменить на их модули.*

Можно показать, что задачи (2) и (3) равносильны краевой задаче Шварца для эллиптических систем первого порядка в частных производных для соответствующей матрицы J и соответствующих классов функций. Задача Шварца, в свою очередь, равносильна задаче Дирихле для многих эллиптических систем второго порядка. Поэтому изучение уравнений (2) и (3) имеет еще и прикладной интерес.

Изложим результаты, которые удалось получить на настоящий момент.

1°. *Задача* (2). Если $|l|=1$, тогда собственный вектор x – вещественный. В этом случае имеет место

Теорема 1. *Пусть граничная функция* $\varphi(t)\in C^{1,\sigma}(\Gamma)$. *Тогда решение задачи* (2) *существует и единственно* (*с точностью до постоянной*) *в классах функций* $f_\lambda, g_\mu \in C^{1,\sigma}(\overline{D})$.

Если $l=0$, тогда вектор $x=\overline{y}$. В этом случае имеет место следующий результат, полученный А.П. Солдатовым.

Теорема 2. [1] *Если* $(Im\ \lambda)\cdot(Im\ \mu)>0$, $l=0$, *то задача* (2) *имеет единственное* (*с точностью до постоянной*) *решение для любой граничной функции* $\varphi(t)\in H^{\sigma}(\Gamma)$, *в классах функций* $f_\lambda, g_\mu \in H^{\sigma}(\overline{D})$.

Таким образом, при $l=\{0;1\}$ *однородная* задача (2) имеет только постоянные решения в классах $H^{\sigma}(\overline{D})$. Однако, например, при $l=5$ это не так. Именно, положим $\mu=2i$, $\lambda=i$, а также пусть

$$g_\mu(z)=-3i(x+2iy)^2, \quad f_\lambda(z)=i(x+iy)^2-\varepsilon^2 i. \qquad (4)$$

Тогда функции $g_\mu(z)$ и $f_\lambda(z)$ в (4) при $l=5$ будут решением *однородной* задачи (2) на эллипсах Γ: $x^2+8y^2=4\varepsilon^2$, $\varepsilon\in R$, $\varepsilon\neq 0$.

▷ Действительно, подстановка (4) в (2) при $l=5$, $\varphi\equiv 0$ дает равенство

$$g_\mu+\overline{f}_\lambda+5\cdot f_\lambda=(x^2+8y^2-4\varepsilon^2)i. \qquad \triangleleft$$

2°. *Задача* (3). Здесь случай $l_1=0$ сводился бы к теореме 2. Но он невозможен, так как ему соответствует вещественный вектор y. Поэтому в (3) всегда $l_1\neq 0$, что делает эту задачу достаточно сложной. Здесь имеет место

Теорема 3. [2] *Пусть* 2×2 *матрица* $J=A+Bi$, *где* A,B – *вещественные матрицы,* $\det B\neq 0$. *Матрица* J *имеет собственное число* $\lambda=i$ *кратности два, а ее собственный вектор* y *не кратен*

вещественному. Пусть число l_1 *в* (3) *найдено по* J. *Тогда однородная* $(\varphi \equiv 0)$ *задача* (3) *для произвольного круга* K *имеет только тривиальные решения.*

Покажем, что для эллипсов теорема 3 в общем случае не верна. Действительно, пусть в (3) $l_1 = 6i,\ \lambda = i,$ а также положим:

$$f(z) = -\frac{i}{6}(x+iy)^2 + \frac{i}{6}, \quad F(z) = \frac{7i}{6}(x+iy)^2 - \frac{i}{6}. \qquad (5)$$

Подстановка (5) в (3) при $l_1 = 6i,\ \varphi \equiv 0$ дает равенство

$$6i \cdot y\frac{\partial f(z)}{\partial x} + \overline{f}(z) + F(z) = \frac{i}{3}(4x^2 + 2y^2 - 1).$$

Следовательно, функции $f(z)$ и $F(z)$ в (5) при $l_1 = 6i$ будут решением *однородной* задачи (3) на эллипсе $\Gamma : 4x^2 + 2y^2 = 1.$

Библиографический список

1. Николаев В.Г., Солдатов А.П. О решении задачи Шварца для J-аналитических функций в областях, ограниченных контуром Ляпунова // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 7. – С. 965–969.

2. Николаев В.Г. Единственность решения задачи Шварца в некоторых специальных случаях // Научные ведомости БелГУ. Серия «Математика, физика». – 2013. – Т. 26 (169), вып. 33. – С. 35–42.

Сведения об авторе

Николаев Владимир Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии НовГУ. E-mail: vg14@inbox.ru

УДК 517.9

Оспанов К.Н.

ОЦЕНКИ РАЗДЕЛИМОСТИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ СМЕЩЕНИЕМ

В работе получены коэрцитивные оценки решения сингулярного дифференциального уравнения высокого порядка с неограниченными промежуточными коэффициентами.

Ключевые слова: сильное решение, весовая оценка, резольвента, компактность

Ospanov K.N.

SEPARABILITY ESTIMATES FOR SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH UNBOUNDED DRIFT

Coercive estimates of the solution of the high order singular differential equation with unbounded intermediate coefficients has been received in the paper.

Key words: strong solution, weighted estimate, resolvent, compactness.

В работе изучается следующее уравнение

$$Ly := y^{(2n)} + a_1 y^{(2n-1)} + a_2 y^{(2n-2)} + \ldots + a_{2n} y = f(x). \qquad (1)$$

где $f \in L_2(-\infty, +\infty)$, а коэффициенты a_k $(k = 1,2,\ldots,2n)$ - функции от $x \in (-\infty, +\infty)$.

Функция $y \in L_2(-\infty, +\infty)$, для которой найдется последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, такая, что $\|y_n - y\|_2 \to 0$, $\|L_0 y_n - f\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$, называется решением уравнения (1). Здесь $\|\cdot\|_2$ – норма в $y \in L_2(-\infty, +\infty)$.

Для заданных непрерывных функций g и $h > 0$ положим

$$\alpha_{g,h_l}(t) = \|g\|_{L_2(0,t)} \left\| \theta^{l-1} h^{-1}(\theta) \right\|_{L_2(t,+\infty)} \quad (t > 0),$$

$$\beta_{g,h_l}(t) = \|g\|_{L_2(\tau,0)} \left\| \theta^{l-1} h^{-1}(\theta) \right\|_{L_2(-\infty,\tau)} \quad (\tau < 0),$$

$$\gamma_{g,h_l} = \max\left(\sup_{t>0} \alpha_{g,h_l}(t), \sup_{\tau<0} \beta_{g,h_l}(\tau) \right) \quad (l = 1,2,\ldots,2n-1).$$

© Оспанов К.Н., 2017

Теорема. Пусть $a_j \in C_{loc}^{(2n-j)}(R)$ $(j=1,2,\ldots,2n)$ и выполнены следующие условия:

$$|a_1| \geq 1,\ \gamma_{1,(\sqrt{|a_1|})_{2n-1}} < \infty,\ \gamma_{a_k,(\sqrt{|a_1|})_{k-1}} < +\infty\ (k=2,3,\ldots,2n),$$

$$c^{-1} \leq \frac{a_1(x)}{a_1(\eta)} \leq c \text{ для всех } x,\eta \in R : |x-\eta| \leq 1,\quad c>1.$$

Тогда для любой правой части $f \in L_2(-\infty,+\infty)$ существует единственное решение y уравнения (1), притом для y имеет место оценка

$$\left\|y^{(2n)}\right\|_2 + \sum_{j=1}^{2n} \left\|a_j y^{(2n-j)}\right\|_2 \leq c_1 \|f\|_2 .$$

Если, кроме того

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha_{a_{2n},(a_1)_{2n-1}} = 0,\ \lim_{\tau\to-\infty} \beta_{a_{2n},(a_1)_{2n-1}} = 0,$$

то оператор L^{-1}, обратный к L, является вполне непрерывным в пространстве $L_2(-\infty,+\infty)$.

Свойства решений сингулярного уравнения (1) и соответствующего ему дифференциального оператора L ранее изучались во многих работах (см., например, [1–3] и приведенную в них литературу). Однако в [1, 2] считается, что рост промежуточных коэффициентов a_k $(k=1,2,\ldots,2n-1)$ не выше, чем рост некоторой степени $|a_{2n}|$. Близкое условие приводится в [3]. В отличие от результатов [1–3] теорема 1 допускает быстрый рост промежуточных коэффициентов.

Библиографический список

1. Наймарк М. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1964.

2. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983.

3. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Тр. МИАН СССР, 1984. –Т. 170. –С. 37–76.

Сведения об авторе

Оспанов Кордан Наурызханович, доктор физико-математических наук, профессор Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан E-mail: kordan.ospanov@gmail.com.

УДК 539.3

Ошхунов М.М., Джанкулаева М.М.

О МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОВОГО РАСШИРЕНИЯ В МНОГОСЛОЙНЫХ КАБЕЛЬНЫХ ИЗОЛЯЦИЯХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе предлагается алгоритм существенного уменьшения времени варьирования при нахождении минимума функционала методом локальных вариаций. В качестве приложения рассматривается задача оптимального выбора коэффициента теплового расширения в многослойных кабельных изоляциях.

Ключевые слова: метод локальных вариаций, минимизация функционала, вариация, метод конечных элементов, коэффициент теплового расширения.

Oshkhunov M.M., Dzhankulaeva M.A.

ABOUT MODIFICATION OF THE METHOD OF LOCAL VARIATIONS FOR OPTIMAL CONTROL COEFFICIENT OF THERMAL EXPANSION IN MULTILAYER CABLE INSULATION BY FINITE ELEMENTS METHOD

In this paper, we propose an algorithm for significantly reducing the time of variation when finding the minimum of the functional by the method of local variations. As an application of these problem of the optimal choice of the coefficient of thermal expansion in multilayer cable insulation is considered.

Keywords: the method of local variations, minimizing the functional, variation, finite element method, the thermal expansion coefficient.

Метод локальных вариаций, как простой метод минимизации функционала, широко используется для решения различных задач науки и техники [4]. Недостатком этого метода является резкое увеличение времени обхода узлов сетки конечных элементов при значительном уменьшении шага варьирования.

Рассмотрим основные идеи метода на примере минимизации функционала теории упругости. Пусть

$$\Phi(u_i) = \iiint\limits_V \left(\frac{K\theta^2 + 2Ge_{ij}e_{ij}}{2} - X_i u_i \right) dV - \iint\limits_S \sigma_i^0 u_i dS \,. \qquad (1)$$

© Ошхунов М.М., Джанкулаева М.А., 2017

Здесь G, K – модуль сдвига и объемного сжатия, $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – средняя деформация, e_{ij} – девиатор тензора деформации, X_i – объемные силы по трем направлениям, σ_i^0 – заданные поверхностные силы. По повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 3, а компоненты тензора деформации вычисляются через перемещения по формулам

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \qquad (2)$$

Минимум функционала (1) можно найти по следующему алгоритму. Выбираем начальное значение u_k^0 (k – количество узлов) для всех точек сетки конечных элементов. При отсутствии всякой предварительной информации о решении задачи можно выбрать во всех узлах нули за исключением точек, попавших на границу области с условиями типа

$$u_{i|_{S_1}} = u_i^0. \qquad (3)$$

Заметим, что граничные условия второго рода

$$\sigma_{ij} n_{i|_{S_2}} = \sigma_i^0 \qquad (4)$$

выполняются за счет третьего члена функционала (1).

Осуществляем обход всех узлов сетки конечных элементов с шагом h, т.е. присваиваем новое значение перемещения в зависимости от того, какое значение из вариантов

$$u_k^0 \pm h \qquad (5)$$

уменьшает величину функционала (1).

Такой обход всех узлов совершается многократно, пока значение функционала не перестает меняться. Затем шаг варьирования уменьшается вдвое и процедура повторяется.

Численные эксперименты показывают существенное увеличение числа обходов узлов с уменьшением шага варьирования. Заметим, что при изменении узлового значения перемещения в функционале (1) изменяются только слагаемые, окружающие данный узел, что значительно упрощает процедуру варьирования и обхода узлов методом локальных вариаций.

Чтобы избежать увеличения времени варьирования при очень малых значениях шага предлагается следующий простой алгоритм.

Так как уменьшение шага варьирования вдвое предполагает убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$, то предлагается оценить поправку к значению перемещения после некоторого цикла варьирования по формуле

$$\Delta u_k = \frac{u_k^{(n)} q}{1-q}. \qquad (6)$$

Здесь $u_k^{(n)}$ – значения перемещения после (n) этапов варьирования. Тогда окончательное значение перемещений оценивается по формуле

$$u_k^{(n)} + \Delta u_k. \qquad (7)$$

Численные эксперименты подтвердили высокую эффективность оценки (7) путем сравнения с прямым методом варьирования по описанному алгоритму: время нахождения минимума функционала (1) методом локальных вариаций иногда уменьшалось на два порядка.

Данный алгоритм использовался для подбора коэффициента теплового расширения в многослойных кабельных изоляциях при коротком замыкании.

Известно, что кольцевое напряжение $\sigma_{\theta\theta}$, возникающее под действием заданного температурного поля $T = T(r)$, $a \le r \le b$, имеет вид [3]

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{r^2}\left[\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2}\int_a^b \alpha T r dr + \int_a^r \alpha T r dr - \alpha T r^2\right] \qquad (8)$$

Здесь E – модуль Юнга, α – коэффициент теплового расширения.

Задача состояла в подборе таких значений $\alpha(r)$ при заданной функции $T(r)$, чтобы $\frac{d\sigma_{\theta\theta}}{dr} = 0$, что привело бы к минимальным колебаниям кольцевых напряжений по своду кабельной изоляции. Численное решение поставленной задачи методом конечных элементов приведено в работах [1, 2].

На рис. 1 представлены три варианта подбора коэффициента теплового расширения $\alpha(r)$ по описанному алгоритму.

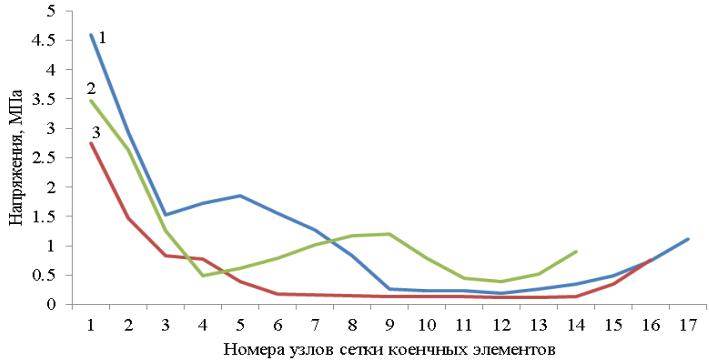


Рис. 1. Распределение напряжений по своду многослойных кабельных изоляций на основе ПВХ-пластиката

Из рисунка видно, что наилучшим вариантом является третий, т.к. вариативность напряжений в многослойной изоляции является наименьшей, что, естественно, будет удлинять срок эксплуатации подобных кабельных систем.

Библиографический список

1. Ошхунов М.М., Борукаев Т.А., Микитаев А.К., Лигидов М.Х., Джанкулаева М.А. Об оптимальном выборе закона изменения коэффициента линейного расширения в полых цилиндрах при нагревании // Материаловедение. – М., 2014. – № 8. – С. 3–5.

2. Ошхунов М.М., Джанкулаева М.А., Башоров М.Т. Моделирование температурных нагрузок трехслойных кабельных изоляций из ПВХ-пластиката // Новые полимерные композиционные материалы: Материалы XII Международной научно-практической конференции. – Нальчик: Изд-во «Принт Центр», 2016. – С. 246–247.

3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

4. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. М.: Наука, 1973. – 240 с.

Сведения об авторах

Ошхунов Муаед Музафарович, доктор технических наук, профессор кафедры Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик. E-mail: muaed@inbox.ru.

Джанкулаева Мадина Амерхановна, старший преподаватель кафедры Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик. E-mail: madina.dzhan@gmail.com.

УДК 517.957

Панов Е.Ю.

О ПОВЕДЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВЯЗКОСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

Показано, что периодическое вязкостное решение уравнения Гамильтона-Якоби при больших временах асимптотически сходится к бегущей волне. Указаны свойства предельной волны и условия стабилизации решения.

Ключевые слова: Уравнения Гамильтона-Якоби, вязкостные решения, энтропийные решения законов сохранения, бегущие волны, стабилизация.

Panov E.Yu.

ON LONG TIME BEHAVIOR OF PERIODIC VISCOSITY SOLUTIONS TO HAMILTON-JACOBI EQUATIONS

We show that a periodic viscosity solution of a Hamilton-Jacobi equation asymptotically converges, for large time, to a traveling wave. Properties of the limit wave and conditions for decay of the solution are indicated.

Key words: Hamilton-Jacobi equations, viscosity solutions, entropy solutions of conservation laws, traveling waves, decay.

В полуплоскости $\Pi = \{ (t,x) \in R^2 \mid t > 0 \}$ рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона-Якоби

$$u_t + f(u_x) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x), \qquad (1)$$

в котором гамильтониан $f(v) \in C(R)$ лишь непрерывен, а начальная функция $u_0(x)$ – непрерывная периодическая функция. Не умаляя общности, будем считать, что период равен 1: $u_0(x+1) \equiv u_0(x)$. Будем также предполагать, что $f(0) = 0$ (общий случай сводится к рассматриваемому с помощью замены $u \to u - f(0)t$). Напомним понятие вязкостного решения (viscosity solution) задачи (1). Определим супердифференциал $D^+u(t,x)$

© Панов Е.Ю., 2017

(субдифференциал $D^-u(t,x)$) функции $u(t,x)$ как множество градиентов $(q,p)=\nabla\varphi(t,x)$ функций $\varphi\in C^1(\Pi)$, таких что (t,x) является точкой локального максимума (соответственно – локального минимума) разности $u-\varphi$. Пусть $\overline{\Pi}=[0,+\infty)\times R$ – замыкание области Π.

Определение 1. Ограниченная непрерывная функция $u=u(t,x)\in C_b(\overline{\Pi})$ называется вязкостным субрешением задачи (1), если

$$q+f(p)\le 0 \quad \forall(q,p)\in D^+u(t,x),(t,x)\in\Pi$$

и $u(0,x)\le u_0(x)$. Функция $u=u(t,x)\in C_b(\overline{\Pi})$ называется вязкостным суперрешением задачи (1), если

$$q+f(p)\ge 0 \quad \forall(q,p)\in D^-u(t,x),(t,x)\in\Pi$$

и $u(0,x)\ge u_0(x)$. Наконец, функция $u=u(t,x)\in C_b(\overline{\Pi})$ называется вязкостным решением задачи (1), если она является вязкостным суб- и суперрешением этой задачи одновременно.

Известно (см. [1–2]), что задача (1) имеет единственное периодическое по пространственной переменной вязкостное решение $u(t,x)$ (более обще, верен принцип сравнения для периодических вязкостных суб- и суперрешений). Если начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то и решение $u(t,x)$ также удовлетворяет этому условию. В этом случае хорошо известно, что обобщенная производная $v=u_x(t,x)\in L^\infty(\Pi)$ является энтропийным решением задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка (закона сохранения)

$$v_t+f(v)_x=0 \qquad (2)$$

с начальным условием

$$v(0,x)=v_0(x)=u_0'(x) \qquad (3)$$

в смысле С.Н. Кружкова [3]. Заметим, что $v_0(x)$ – периодическая функция с нулевым средним: $\int_0^1 v_0(x)dx = 0$. Пусть (a,b) – наибольший из интервалов со свойствами:

$$-\infty \le a < 0 < b \le +\infty, \quad \exists c \in R \quad f(v) = cv \ \forall v \in (a,b) \quad (4)$$

Если таких интервалов нет (то есть, если функция $f(v)$ не линейна ни в какой окрестности нуля), то положим $a = b = 0$, $(a,b) = \{0\}$.

Как следует из результатов [4], энтропийное решение задачи (2), (3) асимптотически сходится при $t \to +\infty$ к бегущей волне. Точнее, верна следующая

Теорема 1. Найдется такая 1-периодическая функция $w(y)$ *(профиль) и константа* c *(скорость), что*

$$\lim_{t \to +\infty} [v(t,x) - w(x - ct)] = 0 \text{ в } L^1([0,1]) \quad (5)$$

При этом, $\int_0^1 w(y)dy = 0$, $w(y) \in (a,b) \quad \forall y \in R$ *и* $f(v) = cv$ *на* (a,b). *В частности, при* $a = b = 0 \quad w(y) \equiv 0$ *и значит*

$$v(t,x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \text{ в } L^1([0,1]) \text{ (свойство стабилизации).}$$

Положим при $T > 0 \quad p(T,y) = u(T,y) + \int_0^y w(s)ds$, так что $p_y'(T,y) = w(y) \in (a,b)$. Ясно, что $p(T,y)$ – периодическая функция переменной y и бегущие волны $u = p(T, x - ct) \pm \delta_T$ являются вязкостными решениями уравнения (1). Здесь ввиду (5)

$$\delta_T = \| v(T,x) - w(x - ct) \|_{L^1([0,1])} \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0. \quad (6)$$

Очевидно, $p(T, x - cT) - \delta_T \le u(T,x) \le p(T, x - cT) + \delta_T$ и по принципу сравнения для всех $t > T$ $\| p(T, x - ct) - u(t,x) \|_\infty \le \delta_T$. Из этого неравенства и (6) легко

следует, что числовая направленность $u(T,0)=p(T,0)$, $T>0$ является направленностью Коши и потому сходится при $T\to+\infty$ к некоторой константе p_0. Соответствующая функция $p(y)=p_0+\int_0^y w(s)ds$ задает профиль предельной бегущей волны для решения $u(t,x)$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. Существует периодическая непрерывная функция $p(y)$ *и вещественная константа* c*, такие что*

$$u(t,x)-p(x-ct)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$$

равномерно на R*. При этом, функция* $p(y)$ *удовлетворяет односторонним условиям Липшица:* $\forall y_1,y_2\in R, y_2>y_1$

$$a(y_2-y_1)\le p(y_2)-p(y_1)\le b(y_2-y_1), \qquad (7)$$

где величины a,b *определены в (4), а гамильтониан* $f(v)=cv$ *на* (a,b) *В частности, если гамильтониан* $f(v)$ *не линеен ни в какой окрестности нуля (то есть,* $a=b=0$*), то* $p(y)\equiv p_0=const$.

Мы доказали Теорему 2 в случае непрерывной по Липшицу начальной функции. В общем случае $u_0(x)\in C(R)$ доказательство проводится с помощью равномерной аппроксимации начальной функции последовательностью непрерывных по Липшицу периодических функций и использования принципа сравнения для соответствующей последовательности вязкостных решений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 15-01-07650-а и Министерства образования и науки РФ, проект № 1.445.2016/ФПМ.

Библиографический список

1. Crandall M.G., Lions P.L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc., 1983. – Vol. 277 – pp. 1–42.

2. Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations // Trans. Amer. Math. Soc., 1984 – Vol. 282(2) – pp. 487–502.

3. Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменным // Матем. сб., 1970. – Т. 81. – № 2 – С. 228–255.

4. Панов Е.Ю. Об асимптотике при больших временах периодических обобщенных энтропийных решений скалярных законов сохранения // Матем. заметки, 2016 – Т. 100. Вып. 1. – С. 132–142.

Сведения об авторе

Панов Евгений Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник НИЦ НовГУ, г. Великий Новгород. E-mail: Eugeny.Panov@novsu.ru

УДК 681.5.033.5

Половинкина Ю.С., Щербинин Е.С.

ПРИНЦИП ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

В работе раскрыт принцип функционирования ОРПМ, представлена физическая модель подключения устройства к узлам энергосистемы для дальнейшего моделирования устройства на высокопроизводительном кластере.

Ключевые слова: энергетическая система, модель подключения регулятора потока мощности, системы управления.

Polovinkina Yu.S., Shcherbinin E.S.

THE PRINCIPLE OF OPERATION OF CONTROLLED SYSTEMS AC TRANSFER

The work discusses the principle of operation CPFR, a physical model of the connection between the device and nodes of the power system for further modeling of the device on a high performance cluster.

Key words: energy system, model connect controller of power flow, control systems.

Увеличение стоимости строительства новых высоковольтных линий электропередач привело к распространению технологии FACTS (гибкие передающие системы переменного тока). Подобные системы позволяют существенно увеличить пропускную способность линии, компенсировать потери и осуществлять управляемый контроль напряжения на всех участках энергосистемы без изменения её

© Половинкина Ю.С., Щербинин Е.С., 2017

структуры. Подобный современный подход к модернизации уже существующих энергосистем путем внедрения устройств с технологией FACTS является наиболее выгодным с экономической и практической точки зрения. Ряд стран (США, КНР, Бразилия) успешно применили устройства с технологией FACTS для модернизации своих существующих энергосистем, добившись существенного увеличения предела передаваемой мощности на 100–500 киловольт.

Наиболее универсальным среди устройств гибких линий электропередач переменного тока (ЛЭП), использующих силовую электронику для управления потоком мощности в энергосистемах, является объединенный регулятор потока мощности (ОРПМ). ОРПМ предназначен для контроля потока активной мощности, потока реактивной мощности, а также величины напряжения в узлах подключения устройства к сети переменного тока.

ОРПМ использует комбинацию преобразователя напряжения (ПН) соединенного параллельно с линией (ПН1), и преобразователя напряжения, последовательно соединенного с линией (ПН2), объединенных друг с другом через общую шину постоянного напряжения, как показано на рисунке 1.

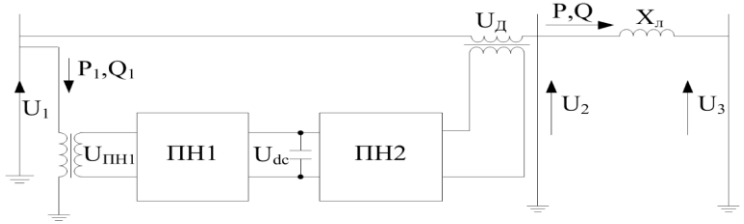


Рис. 1. Физическая модель подключения объединенного регулятора потока мощности к энергосети

ОРПМ может управлять активной и реактивной мощность, так как активная мощность может быть перемещена из ПН1 в ПН2 через шину постоянного напряжения. Помимо этого его ПН1 может управлять напряжением U_1, поглощая или генерируя реактивную мощность. В установившемся режиме напряжение $U_{ПН1}$ согласовано по фазе с U_1 так, чтобы преобразователь напряжения ПН1 генерировал только реактивную мощность, то есть $P_1=0$. Если напряжение $U_{ПН1}$ меньше, чем напряжение U_1, то ПН1 поглощает реактивную мощность Q_1. Если напряжение $U_{ПН1}$ больше, чем напряжение U_1, то ПН1 генерирует реактивную мощность Q_1.

Задача системы управления ПН1 заключается в регулировании реактивной мощности, выдаваемой или потребляемой устройством. Она включает в себя систему фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), систему широтно-импульсной модуляции (ШИМ), измеритель переменного напряжения, измеритель постоянного напряжения и измеритель тока. ФАПЧ обеспечивает высокую точность при несинусоидальном напряжения сети, отслеживая частоту сети. Система ФАПЧ формирует эталонный сигнал $\theta=\omega t$, который используется, чтобы вычислить составляющие напряжения и тока по продольной и поперечной оси. Измеритель переменного напряжения служит для измерений напряжения сети. Измеритель постоянного напряжения представляет собой устройство, аналогичное измерителю переменного напряжения, но объектом измерения в нем является постоянное напряжение (напряжение на накопительном конденсаторе). Измеритель тока служит для измерения составляющей тока в сети по продольной I_d и поперечной I_q осям. Система управления ПН1 представлена на рисунке 2.

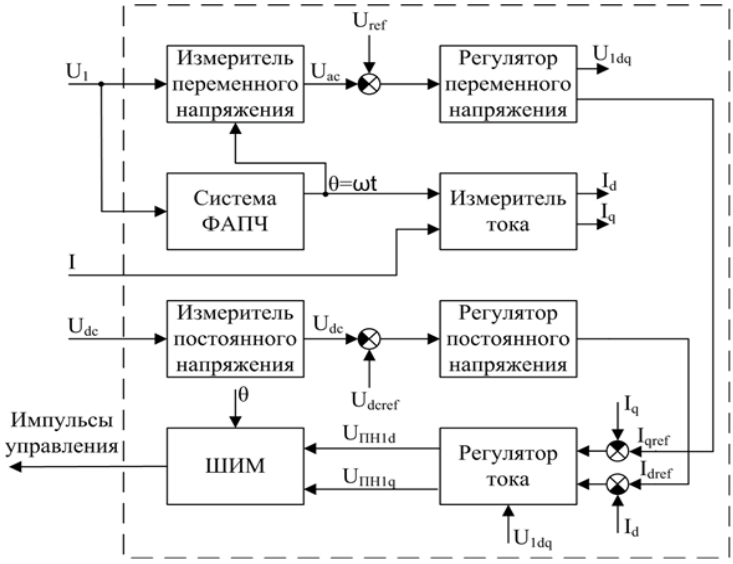


Рис. 2. Системы управления ПН1

Система управления ПН1 разделена на внешний и внутренний контур управления. Внешний контур регулирования состоит из регуля-

тора переменного напряжения и регулятора постоянного напряжения. Выходными сигналами регулятора переменного напряжения являются заданное значение тока I_{qref} для регулятора тока и составляющие напряжения по продольной и поперечной осям U_{1dq}, которые поступают на регулятор тока. Выходной сигнал регулятора постоянного напряжения – это заданное значение тока I_{dref} для регулятора тока. Значение I_d совпадает по фазе с напряжением U_1 и управляет потоком активной мощности. Во внутренний контур регулирования тока входит регулятор тока и широтно-импульсного модулятора (ШИМ). Регулятор тока управляет величиной и фазой напряжения ($U_{ПН1d}$ и $U_{ПН1q}$), поступающего на вход ШИМ, в зависимости от заданных токов I_{dref} и I_{qref}, произведенных, соответственно, регулятором постоянного напряжения и регулятором переменного напряжения (в режиме регулирования напряжения).

ПН2 используют для управления активной и реактивной мощностями. ПН2 может работать в двух режимах: управления потоком мощности в автоматическом режиме и ввод напряжение вручную.

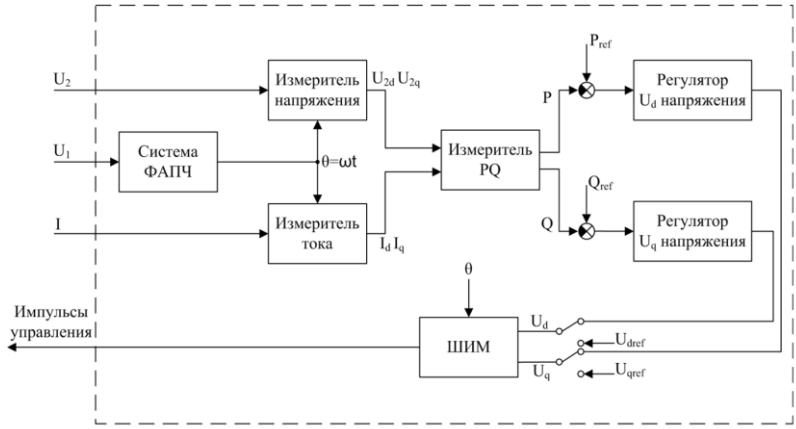


Рис. 3. Системы управления ПН2

В первом случае на вход системы управления поступают измеренные значения напряжения U_1, U_2 и тока I. Система ФАПЧ, отслеживая частоту сети, формирует эталонный сигнал $\theta=\omega t$, который используется для вычисления составляющих напряжения и тока по продольной и поперечной оси (U_{2d}, U_{2q}, I_d и I_q). Измеритель напряжения вычисляет фактические значения составляющих напряжения по продольной и поперечной оси U_{2d} и U_{2q}, Измеритель ток вычисляет фак-

тические значения составляющих тока по продольной и поперечной оси I_d и I_q. Полученные значения поступаю на измеритель PQ, выходные сигналы которого сравниваются с заданными значениями P_{ref} и Q_{ref} для нахождения ошибок. Сигналы ошибок поступают на регулятор составляющей напряжения по продольной и поперечной оси. В блок-схеме на рисунке 3 они соответственно названы регулятор U_d напряжения и регулятор U_q напряжения. Эти узлы вырабатывают командные сигналы U_q и U_d соответственно. Командные сигналы вместе с углом θ поступают на ШИМ для формирования импульсов управления, поступающих на ПН2. Во втором режиме работы на ШИМ напрямую поступают заданные значения составляющих добавляемого напряжения по продольной и поперечной оси U_{dref} и U_{qref}.

Итак, рассмотренный ОРПМ используется как базовый модуль при создании управляемых гибких ЛЭП тока. Поскольку стоимость создания новой линии электропередачи путем вставки ОРПМ составляет 10–30 процентов стоимости оборудования линии, идея гибкого управления ЛЭП становится привлекательной с экономических позиций, открывая новые технологические возможности усовершенствования существующих систем.

Библиографический список

1. Егоров И.С. Средства регулирования режимов электрических сетей на базе силовой электроники // Вестник ЮУрГУ. Серия «Энергетика». – 2012. – Вып. 18, № 37 (296). – С. 135–137.

2. Hingorani, Narain G. Understanding FACTS: concepts and technology of flexible AC transmission systems / Narain G. Hingorani, Laszlo Gyugyi. – NewYork: IEEE Press, 2000. – 432 p.

Сведения об авторах

Половинкина Юлия Станиславовна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и высокопроизводительных вычислений САФУ им. М.В. Ломоносова, высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, г. Архангельск. E-mail: u.polovinkina@narfu.ru.

Щербинин Евгений Сергеевич, магистрант второго курса кафедры прикладной математики и высокопроизводительных вычислений САФУ им. М.В. Ломоносова, высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, г. Архангельск. E-mail: shchevg1337@gmail.com.

УДК 517.98

Рахимова А.И., Напалков В.В.

СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ДАНКЛА

В работе рассматривается обобщенный оператор Данкла и его свойства. Изучается построенный по нему оператор свертки.

Ключевые слова: обобщенный оператор Данкла, оператор свертки Данкла, преобразование Данкла, собственная функция.

Rakhimova A.I., Napalkov V.V.

PROPERTIES OF THE GENERALIZED DUNKL OPERATOR

The paper considers the generalized Dunkl operator and its properties. We study the convolution operator constructed from it.

Keywords: generalized Dunkl operator, Dunkl convolution operator, Dunkl transform, eigenfunction.

Обобщенный оператор Данкла играет важную роль в математической физике. Его изучению посвящены множество работ, в том числе статьи [1], [2].

Введем следующие обозначения: $H(\mathbb{C})$ — пространство целых функций в комплексной плоскости C с топологией компактной сходимости, $H^*(C)$ — пространство, сопряженное к пространству $H(\mathbb{C})$. P_C — пространство целых функций экспоненциального типа.

Известно, что пространство $H^*(C)$ изоморфно пространству $H_0(\{\infty\})$ аналитических функций в окрестности точки $\{\infty\}$, обращающихся в этой точке в нуль [1].

Если $F(z)\in H^*(C)$ и $g_F(z)\in H_0(\{\infty\})$ — ассоциированная к нему функция, то действие функционала $F(z)$ на целую функцию $f(z)$ можно представить в виде:

$$\big(F(z),\, f(z)\big)=\frac{1}{2\pi i}\int_K f(z)g_F(z)dz,$$

где K — замкнутый спрямляемый контур, содержащий все особенности функции $g_F(z)$ и лежащий в области аналитичности этой функции.

Обобщенный оператор Данкла определяется следующим образом:

$$\Lambda f(z)= f'(z)+\frac{c}{z}\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_j f(\alpha_j z),\quad c>0,$$

© Рахимова А.И., Напалков В.В., 2017

где $\alpha_j = e^{\frac{2\pi ij}{m}}$, $j = (0; m-1)$.

Теорема [1]**.** Для оператора Λ выполняется соотношение $\Lambda f(z) = \frac{1}{z}\left(F_0(\xi), f(e^{\xi} z)\right)$, где функционал $F_0(z)$ такой, что ассоциированная к нему функция имеет вид

$$g_{F_0}(z) = \frac{1}{z^2} + c\sum_{j=0}^{m-1} \frac{e^{\frac{2\pi ij}{m}}}{z - \frac{2\pi ij}{m}}.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим действие оператора Λ на функцию $f(z)$, внутри суммы получим функцию $\phi(k)$, если действовать на нее прямым и обратным преобразованиями Лапласа, то результат не изменится. После прямого преобразования полученную функцию обозначим $g_{F_0}(z)$, функцию $f(z)$ можно заменить на функцию $f(e^{\xi} z)$, затем получается интеграл по контуру произведения этих функций, получается действие функционала $F_0(\xi)$ на функцию $f(e^{\xi} z)$.

$$\Lambda f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k-1} \left(k + c\sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi ij(k+1)}{m}} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sk} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sk} \left(k + c\sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi ij(k+1)}{m}} \right) dk ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k e^{sk} \left(\frac{1}{s^2} + c\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{s - \frac{2\pi ij(k+1)}{m}} \right) ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \int_K f(e^s z) g_{F_0}(s) ds = \frac{1}{z}\left(F_0(s), f(e^s z)\right) = \frac{1}{z}\left(F_0(\xi), f(e^{\xi} z)\right).$$

Теорема доказана.

Обозначим преобразование Лапласа функционала $F_0(z)$ через функцию $\phi(z)$: $\phi(z) = \hat{F}_0(z) = \left(F_0(\xi), e^{\xi z}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_K e^{\xi z} g_{F_0}(\xi) d\xi$.

С помощью вычислений получается, что эта функция определяется следующей формулой: $\phi(z) = z + c\sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j(z+1)}{m}}$.

Преобразование Данкла функционала $F(z) \in H^*(C)$ определяется соотношением $\breve{F}(\lambda) = \left(F(z), y(\lambda z)\right), \quad \lambda \in C$ [2].
Его можно записать в таком виде:

$$\breve{F}(\lambda) = (F(z), y(\lambda z)) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\phi(1)\phi(2)..\phi(n)} z^n,$$

где $b_n = (F(z), z^n), \quad n = (0;\infty).$

Как преобразование Лапласа, так и преобразование Данкла устанавливают изоморфизм между пространствами $H^*(C)$ и P_C [2].

Теорема. Собственная функция обобщенного оператора Данкла в общем случае имеет вид:

$$y(\lambda z) = c_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k z^k}{\phi(1)\phi(2)..\phi(k)}\right), \quad \forall c_0 \in C.$$

В дальнейшем везде рассматриваем случай с начальным условием $y(\lambda,0) = 1$, тогда получается, что собственная функция имеет постоянную величину $c_0 = 1$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\Lambda y(\lambda z) = \lambda y(\lambda z)$ и найдем функцию $y(\lambda z)$. Она должна быть целой функцией, поэтому можно написать $y(\lambda z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k z^k$. Приравниваем полученные суммы почленно и находим коэффициенты c_k функции $y(\lambda z)$.

$$\Lambda y(\lambda z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi(k) \lambda^k z^{k-1} = \lambda y(\lambda z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^{k+1} z^k.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi(k) \lambda^k z^{k-1} = \begin{vmatrix} n = k-1, \\ k = n+1. \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k = 1, n = 0, \\ k = \infty, n = \infty. \end{vmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \phi(n+1) \lambda^{n+1} z^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^{k+1} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{n+1} z^n.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\phi(n+1)\lambda^{n+1}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda^{n+1}z^n \Rightarrow c_{n+1}\phi(n+1) = c_n, \quad n=(0;\infty).$$

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{\phi(n+1)}, \quad n=(0;\infty).$$

$$c_0 = const, \quad c_0 \in C.$$

$$c_1 = \frac{c_0}{\phi(1)}, \quad c_2 = \frac{c_0}{\phi(1)\phi(2)}, \quad \dots \quad c_n = \frac{c_0}{\phi(1)\phi(2)..\phi(n)}, \quad \dots \ .$$

Таким образом, коэффициенты собственной функции имеют вид:

$$c_0 = const, \quad c_0 \in C, \ c_n = \frac{c_0}{\phi(1)\phi(2)..\phi(n)}, \quad n=(1;\infty).$$

Получается собственная функция:

$$y(\lambda z) = c_0\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k z^k}{\phi(1)\phi(2)..\phi(k)}\right), \quad \forall c_0 \in C\ .$$

Если есть начальное условие $y(\lambda,0)=1$, то $y(\lambda,0)=c_0=1$, значит, $c_0=1$.

$$y(\lambda,0)=c_0=1 \Rightarrow c_0=1.$$

Теорема доказана.

Библиографический список

1. Напалков В.В., Напалков В.В. (мл.) Операторы Данкла как операторы свертки // Доклады Академии наук. – 2008. – Т. 423. – № 3. – С. 300–302.

2. Карамов И.И., Напалков В.В. Обобщенный оператор Данкла // Уфимский математический журнал. – 2014. – Т. 6. – № 1. – С. 59–68.

Сведения об авторах

Рахимова Алсу Ильдаровна, аспирант БашГУ, E-mail: alsu1405@mail.ru.

Напалков Валентин Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник Института математики с вычислительным центром УНЦ РАН, E-mail: napalkov@matem.anrb.ru

УДК 517.95

Сабитов К.Б.

О ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛИКАЛОРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для неоднородного поликалорического уравнения установлена положительность решения в зависимости от знака правой части.

Ключевые слова: бикалорическое уравнение, поликалорическое уравнение, принцип максимума, знакоопределенность решения.

Sabitov K.B.

ON THE SIGNIFICANCE OF THE SOLUTION OF THE INHOMOGENEOUS POLYCALORIC EQUATION

For the inhomogeneous polycaloric equation, the positiveness of the solution is established depending on the sign of the right-hand side.

Key words: biccaloric equation, polycaloric equation, maximum principle, sign-definite solution.

1. Данная работа является продолжением исследований автора, опубликованной в [1], где установлена знакоопределенность решения полигармонического уравнения. Здесь, следуя [1–4] изучается знакоопределенность решения поликалорического уравнения.

Пусть Ω – ограниченная область R^n точек $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $n\ge 1$. Обозначим через Q цилиндр в пространстве R^{n+1}, у которого нижним основанием является область Ω, образующие параллельны оси Ot, а верхнее основание γ есть часть плоскости $t=T>0$, т.е. $Q=D\times(0,T)$. Пусть Σ – боковая поверхность цилиндра Q; ∂Q – вся граница области Q; $\Gamma=\partial Q\setminus\gamma$ – параболическая граница.

На множестве $Q\cup\gamma$ рассмотрим уравнение

$$T^m u(x,t)=(u_t-a^2\Delta u)^m = f(x,t), \qquad (1)$$

где $a=const>0$, m – любое натуральное число, Δu – оператор Лапласа по переменной x, $f(x,t)$ – заданная на $Q\cup\gamma$ функция, $T^1u(x,t)=Tu(x,t)\equiv u_t-a^2\Delta u$, $T^m u=T(T^{m-1}u)$.

Пусть $u(x,t)$ – решение уравнения (1) из класса

© Сабитов К.Б., 2017

$$u(x,t) \in C_{x,t}^{2m,m}(Q \cup \gamma) \cap C_{x,t}^{2m-2,m-1}(\overline{Q}), \tag{2}$$

удовлетворяющее граничным условиям на Γ:

$$u(x,t) = 0, Tu = 0, \ldots, T^{m-1}u = 0. \tag{3}$$

Отметим, что условия (3) равносильны следующим:

$$u = 0,\ \Delta u = 0,\ \ldots, \Delta^{m-1}u = 0 \ \text{ на } \ \Sigma,$$

$$u = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0,\ \ldots, \frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}} = 0 \ \text{ на } \ t = 0.$$

В начале рассмотрим случай, когда $m = 2$. Тогда будем иметь условия:

$$T^2 u = T(Tu) = f(x,t), \tag{4}$$

$$u(x,t) \in C_{x,t}^{2,4}(Q \cup \gamma) \cap Q_{x,t}^{2,1}(\overline{Q}), \tag{5}$$

$$u(x,t) = 0,\ x \in \Gamma, \tag{6}$$

$$Tu(x,t) = 0,\ x \in \Gamma. \tag{7}$$

Теорема 1. *Если выполнены условия* (4)–(7) *и* $f(x,t) > 0\ (< 0)$ *на* $Q \cup \gamma$, *то* $u(x,t) > 0\ (< 0)$ *на* $Q \cup \gamma$.

Доказательство. Задача (4)–(7) равносильна первой граничной задаче для системы уравнений теплопроводности

$$Tv = f(x,t),\ v|_{\Gamma} = 0, \tag{8}$$

$$Tu = v(x,t),\ u|_{\Gamma} = 0. \tag{9}$$

Из (8) видно, что функция $v(x,t)$ является решением неоднородного уравнения теплопроводности, для которого справедливы следующие известные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $v(x,t) \in C_{x,t}^{2,1}(Q \cup \gamma) \cap C(\overline{Q})$ *и* $Tv(x,t) \equiv f(x,t)$ *на* $Q \cup \gamma$. *Тогда если* $f(x,t) < 0\ (> 0)$ *на* $Q \cup \gamma$, *то* $v(x,t)$ *не может иметь точек локального максимума (минимума) на множестве* $Q \cup \gamma$ *и наибольшее (наименьшее) значение функции* $v(x,t)$ *по* $\overline{Q}$ *достигается только на параболической границе* Γ *области* Q.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и* $f(x,t) > 0\ (< 0)$ *на* $Q \cup \gamma$. *Тогда если* $v(x,t) = 0\ (< 0)$ *на* Γ, *то* $v(x,t) > 0\ (< 0)$ *на* $Q \cup \gamma$.

На основании этих утверждений $\min\limits_{\overline{Q}} v(x,t)$ достигается только на параболической границе Γ. По условию функция $v(x,t) = 0$ на Γ, следовательно $v(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Функция $u(x,t)$ в силу (9) является решением уравнения $Tu = v(x,t)$, у которого правая часть $v(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Тогда по лемме 1 наименьшее по $\overline{Q}$ значение функции $u(x,t)$ достигается только на Γ. По условию $u(x,t) = 0$ на Γ, следовательно, $u(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. ■

Естественно возникает вопрос: если $f(x,t) \geq 0$ и $f(x,t) \not\equiv 0$ на $Q \cup \gamma$, то останется ли справедливым утверждение теоремы 1?

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда если* $f(x,t) \leq 0$ (≥ 0) *на* $Q \cup \gamma$, *то* $v(x,t)$ *наибольшее (наименьшее) значения функции* $v(x,t)$ *по* $\overline{Q}$ *не может достигаться на множестве* $Q \cup \gamma$, *т.е. наибольшее (наименьшее) значение достигается только на параболической границе* Γ.

Доказательство леммы проводится аналогично работе [5, с. 259].

Следствие 2. *Пусть выполнены условия леммы* 2 *и* $f(x,t) \geq 0$ (≤ 0) *на* $Q \cup \gamma$. *Тогда если* $v(x,t) \geq 0$ (≤ 0) *на* Γ, *то* $v(x,t) > 0$ (< 0) *на* $Q \cup \gamma$.

В силу леммы 2 наименьшее на $\overline{Q}$ значение функции $v(x,t)$ достигается только на Γ. По условию (8) функция $v(x,t) = 0$ на Γ. Тогда на основании следствия 3 функция $v(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. В силу (9) функция $u(x,t)$ является решением уравнения $Tu(x,t) = v(x,t)$, где $v(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Тогда из следствия 1 вытекает, что $u(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$.

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (4)–(7) *и* $f(x,t) \geq 0$ (≤ 0) *и* $f(x,t) \not\equiv 0$ *на* $Q \cup \gamma$. *Тогда* $u(x,t) > 0$ (< 0) *на* $Q \cup \gamma$.

Теперь рассмотрим общий случай, т.е. когда m – любое натуральное число.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1)–(3) *и* $f(x,t) \geq 0$ (≤ 0) *и* $f(x,t) \not\equiv 0$ *на* $Q \cup \gamma$. *Тогда* $u(x,t) > 0$ (< 0) *на* $Q \cup \gamma$.

Доказательство. При $m \geq 2$ задача (1)–(3) равносильна первой начально-граничной задаче для системы из m уравнений теплопроводности:

$$Tv_1(x,t) = f(x,t), \quad v_1(x,t)|_\Gamma = 0, \tag{10}$$

$$Tv_2(x,t) = v_1(x,t), \quad v_2(x,t)|_\Gamma = 0, \tag{11}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$Tv_{m-1}(x,t) = v_{m-2}(x,t), \quad v_{m-1}(x,t)|_\Gamma = 0, \tag{12}$$

$$Tu(x,t) = v_{m-1}(x,t), \quad u(x,t)|_\Gamma = 0. \tag{13}$$

Рассмотрим задачу (10) и применяя к ней следствие 2, получим $v_1(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Затем, снова применив это утверждение к задаче (11), будем иметь $v_2(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Повторяя аналогичные рассуждения придем к задаче (12), у которой $v_{m-1}(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Тогда из последней задачи (13) на основании следствия 2 будет вытекать положительность решения задачи (1)–(3) на множестве $Q \cup \gamma$.

2. В этом пункте на множестве $Q \cup \gamma$ рассмотрим уравнение

$$S^m u(x,t) = (\Delta u - b^2 u_t)^m = g(x,t), \tag{14}$$

где $b = const > 0$, $g(x,t)$ – заданная на $Q \cup \gamma$ функция.

Пусть $u(x,t)$ – решение уравнения (14), удовлетворяющее условиям (2) и (3). Предварительно рассмотрим случай $m = 2$. Тогда функция $u(x,t)$ на $Q \cup \gamma$ удовлетворяет уравнению

$$S^2 u(x,t) = S(Su) = g(x,t) \tag{15}$$

и условиям (5)–(7).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (15), (5)–(7). *Тогда если* $g(x,t) \geq 0$ (≤ 0) *и* $g(x,t) \not\equiv 0$ *на* $Q \cup \gamma$. *Тогда* $u(x,t) > 0$ (< 0) *на* $Q \cup \gamma$.

Доказательство. Задача (15), (5)–(7) равносильна первой граничной задаче для системы уравнений второго порядка

$$Sv = g(x,t), \quad v|_\Gamma = 0, \tag{16}$$

$$Su = v(x,t), \; u|_\Gamma = 0. \tag{17}$$

В силу (16) функция $v(x,t)$ является решением неоднородного уравнения теплопроводности $Sv = g$, для которого правая часть $g(x,t) \ge 0$ на $Q \cup \gamma$. Тогда на основании следствия 2 функция $v(x,t) < 0$ на $Q \cup \gamma$. Функция $u(x,t)$ в силу (17) является уравнения $Su = v(x,t)$, у которого правая часть $v(x,t) < 0$ на $Q \cup \gamma$. Отсюда в силу следствия 1 функция $u(x,t) > 0$ на множестве $Q \cup \gamma$. ■

Отметим, что при $m = 1$ и из условия $g(x,t) \ge 0$ (≤ 0) на $Q \cup \gamma$ в силу следствия 2 получаем, что $u(x,t) < 0$ на $Q \cup \gamma$.

Теперь рассмотрим общий случай, когда $m \ge 2$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (14) *и* (2), (3). *Тогда если* $g(x,t) \ge 0$ (≤ 0) *и* $g(x,t) \not\equiv 0$ *на* $Q \cup \gamma$, *то* $u(x,t) < 0$ (> 0) *на* $Q \cup \gamma$ *при нечетном* m *и* $u(x,t) > 0$ (< 0) *на* $Q \cup \gamma$ *при четном* m.

Доказательство. При $m \ge 2$ задача (14), (2), (3) равносильна первой начальной граничной задаче для системы из m уравнений второго порядка:

$$Sv_1(x,t) = g(x,t), \ v_1(x,t)|_\Gamma = 0, \tag{18}$$

$$Sv_2(x,t) = v_1(x,t), \ v_2(x,t)|_\Gamma = 0, \tag{19}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$Sv_{m-1}(x,t) = v_{m-2}(x,t), \ v_{m-1}(x,t)|_\Gamma = 0, \tag{20}$$

$$Su(x,t) = v_{m-1}(x,t), \ u(x,t)|_\Gamma = 0, \tag{21}$$

Рассмотрим задачи (18) и (19) и применив к ним теорему 4, получим $v_2(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Повторяя аналогичные рассуждения при четном m придем к последней паре задач (20) и (21), где $v_{m-2}(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$. Отсюда в силу теоремы 4 следует, что $u(x,t) > 0$ на $Q \cup \gamma$.

Если m – нечетное число, то из задачи (20) следует, что $v_{m-1} > 0$ на $Q \cup \gamma$. Далее, применяя к задаче (21) следствие 1, получим, что $u(x,t) < 0$ на $Q \cup \gamma$.

Отметим, что в работах [6–8] для эллиптических уравнений высокого порядка, в частности, для полигармонического уравнения, установлены оценки решения задачи Дирихле через граничные функции или правую часть. Эти оценки названы принципом максимума, из которых не следует классический принцип максимума (максимум

решения не может достигаться внутри области), следовательно, и знакоопределенность решения.

Библиографический список

1. Сабитов К.Б. О положительности решения неоднородного полигармонического уравнения // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы V Всерос. науч.-практ. конф., приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова, 17–19 ноября 2016 г., г. Стерлитамак. Часть I. Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – С. 285–289.

2. Сабитов К.Б. О положительности решения неоднородного уравнения смешанного типа высшего порядка // Известия вузов. Математика. – 2016. – № 3. – С. 65–71.

3. Сабитов К.Б. О положительности решения неоднородного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа высокого порядка // Матем. заметки. – 2016. – Т. 100. – Вып. 3. – С. 433–440.

4. Сабитов К.Б. О знакоопределенности решения неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа высокого порядка // Известия вузов. Математика. – 2017. – № 7. – С. 57–66.

5. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с.

6. Agmon S. Maximum Theorems for Solutions of Higher Order Elliptic Equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. – Vol. 66. – № 2. – P. 77–80.

7. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда-Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // Math. Nachr. – 1978. – Bd. 81. – P. 25–82.

8. Pipher J., Verchota G.C. Maximum Principle for the Polyharmonic Equation on Lipschitz Domains // Potential Anal. – 1995. – Vol. 4. – № 6. – P. 615–636.

Сведения об авторе

Сабитов Камиль Басирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа факультета математики информационных технологий СФ БашГУ. E-mail: sabitov_fmf@mail.ru

УДК 517.95

Сабитова Ю.К.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

В данной статье доказана единственность решения первой граничной задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с нагруженными слагаемыми в прямоугольной области.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, единственность, граничная задача.

Sabitova Yu.K.

DIRIKHLE'S PROBLEM FOR THE LOADED EQUATION WITH THE OPERATOR LAVRENTYEVA-BITSADZE

In this article uniqueness of the solution of the first boundary problem for the equation of the mixed elliptico-hyperbolic type with loaded composed in rectangular area is proved.

Keywords: the loaded equation, uniqueness, a boundary problem.

Рассмотрим уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа с нагруженными слагаемыми

$$Lu = u_{xx} + (\operatorname{sgn} t)u_{tt} + b(t)u(x,d) = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) \mid 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, где α, β – заданные положительные числа;

$$b(t) = \begin{cases} b_1(t), & t > 0, \\ b_2(t), & t < 0, \end{cases}; \quad d = \begin{cases} d_1 \in (0,\beta), & t > 0, \\ d_2 \in (-\alpha,0), & t < 0, \end{cases}$$

d_1, d_2 – заданные положительные числа; $b_i(t), i = 1,2$ – заданные непрерывные функции, причем существуют конечные $b_1(0+0) = b_1(0)$, $b_2(0-0) = b_2(0)$ и числа $b_1(0)$ и $b_2(0)$ здесь не связаны никакими условиями. Пусть $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача Дирихле. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

© Сабитова Ю.К., 2017

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_+ \cup D_- ; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta ; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$.

Опираясь на работы [1], [2] построим решение задачи (2)–(5) и докажем ее единственность.

Пусть $u(x,t)$ – решения задачи (2)–(5). Рассмотрим следуя [1], функции

$$u_k(t) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx , \tag{6}$$

где $\lambda_k = \pi k, k \in \mathrm{N}$. На основании (6) введем функции

$$u_{k,\varepsilon}(t) = \sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x,t)\sin\lambda_k x dx , \tag{7}$$

здесь ε – достаточно малое положительное число. Дифференцируя равенство (7) по t два раза при $t \in (-\alpha,0)\cup(0,\beta)$ и учитывая уравнение (1). Затем проинтегрируем по частям два раза в интегралах, содержащих u_{xx}, и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (4), получим

$$u_k''(t) - \lambda_k^2 u_k(t) = -b_1(t)u_k(d_1), t > 0, \tag{10}$$

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = -b_2(t)u_k(-d_2), t < 0. \tag{11}$$

Дифференциальные уравнения (10) и (11) являются нагруженными, и они имеют общие решения

$$u_k(t) = \begin{cases} C_k e^{\lambda_k t} + D_k e^{-\lambda_k t} - \dfrac{u_k(d_1)}{\lambda_k} b_{1k}(t), t > 0, \\ A_k \cos\lambda_k t + B_k \sin\lambda_k t + \dfrac{u_k(-d_2)}{\lambda_k} b_{2k}(t), t > 0, \end{cases} \tag{12}$$

где $A_k,\ B_k,\ C_k,\ D_k$ – произвольные постоянные, $u_k(0+0),\ u_k(0-0),\ u_k(d_1),\ u_k(-d_2)$ – пока неизвестные постоянные,

$$b_{1k}(t)=\int_0^t b_1(s)sh[\lambda_k(t-s)]ds,\ \ b_{2k}(t)=\int_t^0 b_2(s)\sin[\lambda_k(t-s)]ds.$$

Теперь исходя из формулы (12), вычислим

$$u_k(0+0)=C_k+D_k,\ u_k(0-0)=A_k, \tag{13}$$

$$u_k(d_1)=\frac{C_k\lambda_k e^{\lambda_k d_1}+D_k\lambda_k e^{-\lambda_k d_1}}{\lambda_k+b_{1k}(d_1)}, \tag{14}$$

$$u_k(-d_2)=\frac{A_k\lambda_k\cos\lambda_k d_2-B_k\lambda_k\sin\lambda_k d_2}{\lambda_k-b_{2k}(-d_2)}, \tag{15}$$

когда при всех $k\in\mathrm{N}$

$$\lambda_k+b_{1k}(d_1)\neq 0,\ \lambda_k-b_{2k}(-d_2)\neq 0. \tag{16}$$

Для функций (12) в силу (2) выполнены условия сопряжения

$$u_k(0+0)=u_k(0-0),\ u_k'(0+0)=u_k'(0-0). \tag{17}$$

Условия (17) имеют место только в том случае, когда

$$C_k=(A_k+B_k)/2,\ D_k=(A_k-B_k)/2. \tag{18}$$

Подставляя (13)–(15) и (18) в формулу (12), получим

$$u_k(t)=\begin{cases}A_kM_{1k}(t)+B_kM_{2k}(t), & t>0,\\ A_kN_{1k}(t)+B_kN_{2k}(t), & t<0,\end{cases} \tag{19}$$

где

$$M_{1k}(t)=ch\lambda_k t-\frac{\tilde{M}_{1k}}{\lambda_k}b_{1k}(t),\quad \tilde{M}_{1k}=\frac{\lambda_k ch\lambda_k d_1}{\lambda_k+b_{1k}(d_1)},$$

$$M_{2k}(t)=sh\lambda_k t-\frac{\tilde{M}_{2k}}{\lambda_k}b_{1k}(t),\quad \tilde{M}_{2k}=\frac{\lambda_k sh\lambda_k d_1}{\lambda_k+b_{1k}(d_1)},$$

$$N_{1k}(t)=\cos\lambda_k t+\frac{\tilde{N}_{1k}}{\lambda_k}b_{2k}(t),\quad \tilde{N}_{1k}=\frac{\lambda_k\cos\lambda_k d_2}{\lambda_k-b_{2k}(-d_2)},$$

$$N_{2k}(t)=\sin\lambda_k t-\frac{\tilde{N}_{2k}}{\lambda_k}b_{2k}(t),\quad \tilde{N}_{2k}=\frac{\lambda_k\sin b\lambda_k d_2}{\lambda_k-b_{2k}(-d_2)}.$$

Для нахождения постоянных A_k, B_k воспользуемся граничными условиями (5) и формулой (6):

$$u_k(-\alpha)=\sqrt{2}\int_0^1 u(x,-\alpha)\sin\lambda_k x dx=$$
$$=\sqrt{2}\int_0^1 \psi(k)\sin\lambda_k x dx=\psi_k, \tag{20}$$

$$u_k(\beta)=\sqrt{2}\int_0^1 u(x,\beta)\sin\lambda_k x dx=\sqrt{2}\int_0^1 \varphi(k)\sin\lambda_k x dx=\varphi_k. \tag{21}$$

Удовлетворив функции (19) граничным условиям (20) и (21), получим систему

$$\begin{cases} A_k N_{1k}(-\alpha)+B_k N_{2k}(-\alpha)=\psi_k, \\ A_k M_{1k}(\beta)+B_k M_{2k}(\beta)=\varphi_k. \end{cases} \tag{22}$$

Если определитель системы (22) при всех $k\in\mathrm{N}$:

$$\Delta(k)=N_{1k}(-\alpha)M_{2k}(\beta)-N_{2k}(-\alpha)M_{1k}(\beta)=$$
$$=M_{2k}(\beta)\cos\lambda_k\alpha+M_{1k}(\beta)\sin\lambda_k\alpha+$$
$$+\left(\tilde{N}_{1k}b_{2k}(-\alpha)\right)\frac{M_{2k}(\beta)}{\lambda_k}+M_{1k}(\beta)\tilde{N}_{2k}b_{2k}(-\alpha)\neq 0, \tag{23}$$

то она имеет единственное решение

$$A_k=\frac{1}{\Delta(k)}\left[\psi_k M_{2k}(\beta)-\varphi_k N_{2k}(-\alpha)\right], \tag{24}$$

$$B_k=\frac{1}{\Delta(k)}\left[\varphi_k N_{1k}(-\alpha)-\psi_k M_{1k}(\beta)\right].$$

Подставляя (24) в (19), найдем окончательный вид функций

$$u_k(t)=\begin{cases} \frac{1}{\Delta(k)}\left[\psi_k C_{2k}(t)-\varphi_k D_{\beta k}(t)\right], & t>0, \\ \frac{1}{\Delta(k)}\left[\varphi_k A_{2k}(t)-\psi_k B_{\beta k}(t)\right], & t<0, \end{cases} \tag{25}$$

здесь

$$C_{\alpha k}(t)=N_{1k}(-\alpha)M_{2k}(t)-N_{2k}(-\alpha)M_{1k}(t),$$
$$D_{\beta k}(t)=M_{1k}(t)M_{2k}(\beta)-M_{1k}(\beta)M_{2k}(t),$$
$$A_{\alpha k}(t)=N_{1k}(-\alpha)N_{2k}(t)-N_{1k}(t)N_{2k}(-\alpha),$$
$$B_{\beta k}(t)=N_{1k}(t)M_{2k}(\beta)-N_{2k}(t)M_{1k}(\beta).$$

Теперь докажем единственность решения задачи (2)–(5) при выполнении условий (23) при всех $k \in \mathrm{N}$. Пусть $\varphi(x) = \psi(0) \equiv 0$. Тогда $\varphi_k = \psi_k \equiv 0$ и из формул (25) и (6) следует, что

$$\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx = 0,\ k = 1,2,\ldots .$$

Отсюда в силу полноты системы синусов $\left\{\sqrt{2}\sin\lambda_k x\right\}$ в пространстве $L_2[0,1]$ следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку в силу (2) функция $u(x,t)$ непрерывна на $\overline{D}$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Решение задачи (2)–(5) при выполнении условий (23) определяется рядом

$$u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\lambda_k x,$$

где $u_k(t)$ находятся по формуле (25).

Библиографический список

1. Сабитов К.Б., Мелишева Е.П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Известия вузов. Математика. – 2013. – № 7. – С. 62–76.

2. Сабитова Ю.К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнения смешанного типа с вырождением на переходной линии // Математические заметки. – 2015. – Т. 98. – № 3. – С. 393–406.

Сведения об авторе

Сабитова Юлия Камилевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа СФ БашГУ. E-mail: sabitovauk@rambler.ru.

УДК 517.95

Сабитова Ю.К., Зарипова Ф.Ф.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В работе доказывается теорема единственности решения задачи с нелокальными условиями для нагруженного уравнения эллиптического типа методом спектрального анализа.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, нелокальные условия, единственность.

Sabitova Yu.K., Zaripova F.F.

THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF NONLOCAL PROBLEM FOR LOADED ELLIPTIC EQUATION

In this paper we proved the theorem of uniqueness of the solution for nonlocal problem with boundary conditions for loaded equation of elliptic type.

Key words: loaded equation, nonlocal conditions, uniqueness.

Рассмотрим нагруженное уравнение эллиптического типа

$$Lu = u_{xx} + u_{yy} - b^2 u(x,y) + C(y)u(x,0) = 0, \qquad (1)$$

в прямоугольной области $D = \left\{ (x,y) \,\middle|\, 0 < x < 1, 0 < y < \beta \right\}$, где $C(y)$ – заданная непрерывная функция, $\beta > 0$, b > 0 – заданные действительные числа. Для уравнения (1) поставим следующую задачу.

Нелокальная задача. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D), \qquad (2)$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, (x,y) \in D, \qquad (3)$$

$$u(0,y) = u(1,y), u_x(0,y) = u_x(1,y), 0 \le y \le \beta, \qquad (4)$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), u(x,0) = \psi(x), \qquad (5)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Воспользуемся идеями работ [1]–[3] для доказательства единственности решения задачи (2)–(5).

© Сабитова Ю.К., Зарипова Ф.Ф., 2017

Теорема 1. Если существует решение задачи (2)–(5) для уравнения (1), то оно единственно.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ – решение задачи(2)–(5). Известно, что система функций

$$\left\{\sqrt{2}\cos(2\pi nx)\right\}_{n=1}^{\infty},1,\left\{\sqrt{2}\sin(2\pi nx)\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{6}$$

является ортонормированной, полной и образует базис в пространстве $L_2[0,1]$.

Рассмотрим функции

$$u_n(y)=\sqrt{2}\int_0^1 u(x,y)\cos\lambda_n x dx, n=1,2,\ldots, \tag{7}$$

$$u_0(y)=\int_0^1 u(x,y)dx, \tag{8}$$

$$v_n(y)=\sqrt{2}\int_0^1 u(x,y)\sin\lambda_n x dx, n=1,2,\ldots, \tag{9}$$

где $\lambda_n=2\pi n.$

Введем функцию $v_{n,\varepsilon}(y)=\sqrt{2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}u(x,y)\sin\lambda_n x dx, \varepsilon>0.$

Продифференцируем его дважды и с учетом уравнения (1), получим

$$v''_{\varepsilon,n}(y)=-\sqrt{2}C(y)\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}u(x,0)\sin\lambda_n x dx + \tag{10}$$

$$+\sqrt{2}b^2\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}u(x,y)\sin\lambda_n x dx-\sqrt{2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}u_{xx}\sin\lambda_n x dx.$$

Интегрируя по частям последний интеграл, перейдем к пределу $\varepsilon\to 0$ и учитывая первое нелокальное условие из (4), получим, что $v_n(y)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$v''_n(y)-\mu_n^2 v_n(y)=-C(y)v_n(0) \tag{11}$$

где $\mu_n^2 = b^2 + \lambda_n^2$, и краевым условиям

$$v_n(\beta) = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\sin\lambda_n x dx = \varphi_n, \tag{12}$$

$$v_n(0) = \sqrt{2}\int_0^1 \psi(x)\sin\lambda_n x dx = \psi_n. \tag{13}$$

Решение задачи (11)–(13) имеет вид

$$v_n(y) = \frac{\psi_n(\overline{C}_{1n}(y)sh\mu_n\beta + \overline{C}_{1n}(\beta)sh\mu_n y + sh\mu_n(\beta - y)) + \varphi_n sh\mu_n y}{sh\mu_n\beta}, \tag{14}$$

где $\overline{C}_{1n}(y) = \frac{1}{\mu_n}\int_0^y C(s)sh\mu_n(s-y)ds.$

Аналогично получим краевую задачу для функции $u_0(y)$:

$$u_0''(y) - b^2 u_0(y) = -C(y)u_0(0), \tag{15}$$

$$u_0(\beta) = \int_0^1 \varphi(x)dx = \varphi_0, \tag{16}$$

$$u_0(0) = \int_0^1 \psi(x)dx = \psi_0. \tag{17}$$

Задача (15)–(17) имеет единственное решение, и оно находится по формуле

$$u_0(y) = \frac{\psi_0(\overline{C}_{10}(y)shb\beta - \psi_0\overline{C}_{10}(\beta)shby + shb(\beta - y)) + \varphi_0 shby}{shb\beta}, \tag{18}$$

где $\overline{C}_{10}(y) = \frac{1}{b}\int_0^y C(s)sh\,b(s-y)ds.$

Функция $u_n(y)$ является решением задачи:

$$u_n''(y) - \mu_n^2 u_n(y) = -C(y)u_n(0), \tag{19}$$

$$u_n(\beta) = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\cos\lambda_n x dx = \varphi_{1n}, \tag{20}$$

$$u_n(0) = \sqrt{2}\int_0^1 \psi(x)\cos\lambda_n x dx = \psi_{1n}. \tag{21}$$

Решение задачи (19)–(21) имеет вид

$$u_n(y) = \frac{\psi_{1n}(\overline{C}_{1n}(y)sh\mu_n\beta - \overline{C}_{1n}(\beta)sh\mu_n y + sh\mu_n(y-\beta)) + \varphi_{1n}sh\mu_n y + 2\lambda_n \overline{C}_{2n}(y)(sh\mu_n\beta - sh\mu_n y)}{sh\mu_n\beta}, \tag{22}$$

где $\overline{C}_{2n}(y) = \frac{1}{\mu_n}\int_0^y v_n(s)sh\mu_n(s-y)ds.$

Из формул (22), (18), (14) следует единственность решения задачи (2)–(5), так как если $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ на [0, 1], то $u_n(y) = 0$, $u_0(y) = 0$, $v_n(y) = 0$ для $n = 1, 2, \ldots$ на $[0, \beta]$. Тогда из (7)–(9) имеем

$$\sqrt{2}\int_0^1 u(x,y)\cos\lambda_n x dx = 0, \ \int_0^1 u(x,y)dx = 0, \ \sqrt{2}\int_0^1 u(x,y)\sin\lambda_n x dx = 0,$$
$$n = 1,2,\ldots.$$

Отсюда в силу полноты системы (6) в пространстве $L_2[0,1]$ следует, что функция $u(x,y) \equiv 0$ в области D. Теорема доказана.

Единственное решение задачи (2)–(5) для уравнения (1) представимо в виде суммы ряда

$$u(x,y) = u_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)\cos\lambda_n x + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)\sin\lambda_n x,$$

где функции $u_0(y), u_n(y), v_n(y)$ определены по формулам (18), (22), (14) соответственно.

Библиографический список

1. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи. Дифференциальные уравнения, 1999. – Т. 35, № 8. – С. 1094–1100.

2. Сабитов К.Б., Мелишева Е.П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области. Известия вузов. Математика. – 2013. – № 7. – С. 62–76.

3. Сабитов К.Б., Сидоренко К.Б. Об однозначной разрешимости нелокальной задачи для вырождающегося эллиптического уравнения спектральным методом. Труды международной конференции «Спектральная теория дифференциальных операторов и родственных проблем». – Уфа: Гилем, 2003. – Т. 1. – С. 2013–2019.

4. Сабитова Ю.К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнения смешанного типа с вырождением на переходной линии // Математические заметки. – 2015. – Т. 98. – № 3. – С. 393–406.

Сведения об авторах

Сабитова Юлия Камилевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа факультета математики и информационных технологий СФ БашГУ. E-mail: sabitovauk@rambler.ru.

Зарипова Фания Фаритовна, магистрант 2 курса СФ БашГУ. E-mail: zaripova.faniya@yandex.ru.

УДК 517.97

Сабитова Ю.К., Нургалиева Ю.Ф.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

В данной статье построено решение граничной задачи с нелокальным условием для уравнения Лапласа в прямоугольной области. Доказана теорема единственности решения задачи методом спектрального анализа. Решение задачи представлено в виде суммы биортогонального ряда.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, граничная задача, нелокальное условие, спектральный метод, биортогональный ряд, единственность

Sabitova Yu.K., Nurgalieva Yu.F.

SOLUTION OF A NONLOCAL BOUNDARY TASK FOR LAPLACE EQUATIONS

In this paper we construct a solution of the boundary value problem with a nonlocal condition for the Laplace equation in a rectangular domain. The uniqueness theorem for the solution of the problem is proved by the method of spectral analysis. The solution of the problem is represented as the sum of a biorthogonal series.

Keywords: nonlocal condition, Laplace equation, boundary value problem, spectral method, biorthogonal series.

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $Q = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < T\}$ и для нее поставим следующую задачу.

Задача. *Найти в области* Q *функцию* $u(x, y)$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

$$u(x, y) \in C(\overline{Q}) \cup C^2(Q), \tag{2}$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad u_x(0, y) = 0, \tag{3}$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u(x, T) = \varphi(x), \tag{4}$$

где $\tau(x)$, $\varphi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции, причем* $\tau(0) = \tau(1)$, $\tau'(0) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = 0$.

© Сабитова Ю.К., Нургалиева Ю.Ф., 2017 г.

Опираясь на работы [1]–[4], докажем теоремы единственности и существования решения нелокальной задачи (2)–(4).

Теорема. *Если существует решение задачи* (2)–(4)*, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ – решение задачи (2)–(4). Воспользуемся полными и биортогональными в $L_2[0,1]$ системами функций [2]:

$$\{\cos(2\pi nx)\}_{n=1}^{\infty}, \quad 1, \quad \{x\sin(2\pi nx)\}_{n=1}^{\infty}, \tag{5}$$

$$\{4(1-x)\cos(2\pi nx)\}_{n=1}^{\infty}, \quad 2(1-x), \quad \{4\sin(2\pi nx)\}_{n=1}^{\infty}, \tag{6}$$

и рассмотрим функции

$$u_n(y) = 4\int_0^1 u(x, y)(1-x)\cos(2\pi nx)dx, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{7}$$

$$u_0(y) = 2\int_0^1 u(x, y)(1-x)dx, \tag{8}$$

$$v_n(y) = 4\int_0^1 u(x, y)\sin(2\pi nx)dx, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{9}$$

Продифференцируем дважды (9) по переменной y под знаком интеграла, учитывая уравнение (1), получим

$$v_n''(y) = -4\int_0^1 u_{xx}(x, y)\sin(2\pi nx)dx, \tag{10}$$

Проинтегрируем по частям 2 раза полученный интеграл

$$v_n''(y) = (2\pi n)^2 \cdot 4\int_0^1 u(x, y)\sin(2\pi nx)dx \Rightarrow v_n''(y) = (2\pi n)^2 \cdot v_n(y),$$

Отсюда заключаем, что $v_n(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $v_n''(y) - (2\pi n)^2 v_n(y) = 0$. Общее решение последнего уравнения принимает вид

$$v_n(y) = a_n e^{2\pi ny} + b_n e^{-2\pi ny}. \tag{11}$$

В силу условий (4) получим граничные условия

$$v_n(0) = 4\int_0^1 u(x,0)\sin(2\pi nx)dx = 4\int_0^1 \tau(x)\sin(2\pi nx)dx = \tau_n, \qquad (12)$$

$$v_n(T) = 4\int_0^1 u(x,T)\sin(2\pi nx)dx = 4\int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx = \varphi_n. \qquad (13)$$

Удовлетворяя общее решение (11) граничным условиям (12) и (13), найдем неизвестные постоянные a_n и b_n.

$$a_n = \frac{W_1}{W} = \frac{\tau_n e^{-2\pi nT} - \varphi_n}{-2sh(2\pi nT)}, \quad b_n = \frac{W_2}{W} = \frac{\varphi_n - \tau_n e^{2\pi nT}}{-2sh(2\pi nT)}. \qquad (14)$$

Тогда из общего решения (11) с учетом (14) найдем функции

$$v_n(y) = \varphi_n \frac{sh(2\pi ny)}{sh(2\pi nT)} + \tau_n \frac{sh(2\pi n(T-y))}{sh(2\pi nT)}. \qquad (15)$$

Найдем теперь $u_0(y)$. Дифференцируя (7) дважды по y и учитывая уравнение (1) имеем

$$u_0''(y) = -2\int_0^1 u_{xx}(x,y)(1-x)dx.$$

Интегрируя по частям полученный интеграл и удовлетворяя граничным условиям (3), получим следующую граничную задачу, решением которого будет функция $u_0(y)$:

$$u_0''(y) = 0, \qquad (16)$$

$$u_0(0) = 2\int_0^1 u(x,0)(1-x)dx = 2\int_0^1 \tau(x)(1-x)dx = \tau_0, \qquad (17)$$

$$u_0(T) = 2\int_0^1 u(x,T)(1-x)dx = 2\int_0^1 \varphi(x)(1-x)dx = \varphi_0. \qquad (18)$$

Решение задачи (16)–(18) единственно и имеет вид

$$u_0(y) = \tau_0 + \frac{\varphi_0 - \tau_0}{T} y. \qquad (19)$$

Аналогично получаем граничную задачу для $u_n(y)$:

$$u_n''(y) - (2\pi n)^2 u_n(y) = -4\pi n \cdot v_n(y) \qquad (20)$$

с граничными условиями

$$u_n(0) = 4\int_0^1 \tau(x)(1-x)\cos(2\pi nx)dx = \tau_{1n}, \qquad (21)$$

$$u_n(T) = 4\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\cos(2\pi nx)dx = \varphi_{1n}. \qquad (22)$$

Решение задачи (20)–(22) существует, единственно и с учетом (15) оно представимо в виде

$$u_n(y) = (\varphi_{1n} - \omega_n(T))\frac{sh(2\pi ny)}{sh(2\pi nT)} + \tau_{1n}\frac{sh(2\pi n(T-y))}{sh(2\pi nT)} + \omega_n(y). \qquad (23)$$

где

$$\omega_n(y) = \frac{\varphi_n}{sh(2\pi nT)}\left(\frac{1}{2\pi n}sh(2\pi ny) - y\cdot ch(2\pi ny)\right) +$$

$$+\frac{\tau_n}{sh(2\pi nT)}\left(y\cdot ch(2\pi n(T-y)) + \frac{1}{4\pi n}sh(2\pi n(T-y)) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4\pi n}sh(2\pi n(y+T))\right). \qquad (24)$$

Из формул (15), (19) и (23) следует единственность решения задачи (2)–(4), так как если $\tau(x)\equiv 0$, $\varphi(x)\equiv 0$ на $[0,1]$, то $u_n(y)\equiv 0$, $u_0(y)\equiv 0$, $v_n(y)\equiv 0$ для $n=1,2,\ldots$ на $[0,T]$. Тогда из (6)–(8) имеем

$$4\int_0^1 u(x,y)(1-x)\cos(2\pi nx)dx = 0, \quad n=1,2,\ldots,$$

$$2\int_0^1 u(x,y)(1-x)dx = 0, \quad 4\int_0^1 u(x,y)\sin(2\pi nx)dx = 0, \quad n=1,2,\ldots.$$

Отсюда в силу полноты системы (6) в пространстве $L_2[0,1]$ следует, что функция $u(x,y)\equiv 0$ в области $\overline{Q}$. Теорема доказана.

Единственное решение задачи (2)–(4) для уравнения (1) можно представить в виде суммы ряда

$$u(x,y) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)\cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)x\sin(2\pi nx), \qquad (25)$$

где функции u_0, u_n, v_n определяются по формулам (19), (23), (15) соответственно.

Библиографический список

1. Лернер М.Е., Репин О.А. Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметричного уравнения Гельмгольца // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 11 – С. 1562–1564.

2. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 8. – С. 1094–1100.

3. Сабитов К.Б., Сидоренко О.Г. Об однозначности разрешимости нелокальной задачи для вырождающегося эллиптического уравнения спектральным методом // Труды международной конференции «Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы», посвящ. 70-летию акад. Ильина В.А., АН РБ. Стерлитамак. – Уфа: Гилем, 2003. – Т. 1. – С. 213–219.

4. Сабитова Ю.К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Матем. заметки. – 2015. – Т. 98. – № 3. – С. 393–406.

Сведения об авторах

Сабитова Юлия Камилевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа факультета математики и информационных технологий СФ БашГУ. E-mail: sabitovauk@rambler.ru.

Нургалиева Юриза Фларитовна, магистрант кафедры математического анализа факультета математики и информационных технологий СФ БашГУ. E-mail: yurizka@yandex.ru.

УДК 517.927.25

Садыбеков М.А.

РЕГУЛЯРНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ВОЗМУЩЕННЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

В работе рассматривается оператор $\mathcal{L}_0$, порожденный линейным обыкновенным дифференциальным выражением n-го порядка на отрезке и регулярными краевыми условиями общего вида. Через $\mathcal{L}_1$ обозначается оператор с интегральным возмущением одного из краевых условий. В предположении, что невозмущенный оператор $\mathcal{L}_0$ обладает системой собственных и присоединенных функций, образующей безусловный базис в L_2 (0,1), строится характеристический определитель спектральной задачи для оператора $\mathcal{L}_1$. На основании полученной формулы делаются выводы об устойчивости свойств безусловной базисности системы собственных и присоединенных функций задачи при интегральном возмущении краевого условия.

Ключевые слова: базис, регулярные краевые условия, собственные значения, корневые функции, спектральная задача, интегральное возмущение краевого условия, характеристический определитель.

Sadybekov M.A.

REGULAR DIFFERENTIAL OPERATOR WITH A PERTURBED BOUNDARY CONDITION

This paper examines the operator $\mathcal{L}_0$ generated by a linear ordinary differential expression of n-th order on the interval and the regular boundary conditions of general form. By $\mathcal{L}_1$ we denote an operator with an integral perturbation of one of the boundary conditions. Under the assumption that the unperturbed operator $\mathcal{L}_0$ has a system of eigenfunctions and associated functions that forms an unconditional basis in $L_2(0,1)$, a characteristic determinant of the spectral problem for the operator $\mathcal{L}_1$ is built. Based on the obtained formulas we have conclusions about the stability of properties of the unconditional basis property of the system of eigenfunctions and associated functions of the problem with an integral perturbation of the boundary conditions.

Keywords: basis, regular boundary conditions, eigenvalues, root functions of a spectral problem, integral perturbation of boundary conditions, characteristic determinant.

В $L_2(0,1)$ рассмотрим оператор $\mathcal{L}_0$, порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

© Садыбеков М.А., 2017

$$\ell(u) = -u''(x) + q(x)u(x), \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

и краевыми условиями Самарского-Ионкина

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) = 0, \quad U_2(u) \equiv u(0) = 0. \tag{2}$$

Пусть $\mathcal{L}_1$ – оператор в $L_2(0,1)$, заданный выражением (19) и «возмущенными» краевыми условиями:

$$U_1(u) = 0,\ U_2(u) = \int_0^1 \overline{p(x)}u(x)dx, \quad p(x) \in L_2(0,1) \tag{3}$$

Вопрос о базисности системы собственных и присоединенных функций (СиПФ) оператора $\mathcal{L}_1$ с более общими интегральными краевыми условиями положительно решен в [1], где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности по Биркгофу краевых условий (2); а при дополнительном предположении усиленной регулярности – базисность Рисса СиПФ. Для невозмущенного оператора $\mathcal{L}_0$ базисность Рисса со скобками СиПФ в случае регулярных краевых условий установлена в [2]. Для уравнения второго порядка вопрос базисности Рисса СиПФ с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями рассматривался в [3].

В нашей работе [4] в предположении, что невозмущенный оператор $\mathcal{L}_0$ обладает системой собственных и присоединенных функций (СиПФ), образующей базис Рисса в $L_2(0,1)$, был построен характеристический определитель спектральной задачи для оператора $\mathcal{L}_1$.

Теорема 1. *Пусть задача (1),(2) обладает собственными значениями λ_k^0 кратности $m_k^0 + 1$ и СиПФ, образующими базис Рисса. Тогда характеристический определитель задачи (1),(3) с возмущенными краевыми условиями представим в виде* $\Delta_1(\lambda) =$

$$= \Delta_0(\lambda)\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{m_k^0}\overline{a_{kj}}\left(\sum_{r=0}^{m_k^0-j}\frac{(\lambda_k^0)^{\frac{n-1}{n}r}}{[\lambda-\lambda_k^0]^{r+1}}\overline{V_{2n-m+1}(v_{kj+r}^0)}\right)\right]\right),$$

где $\Delta_0(\lambda)$ – характеристический определитель невозмущенной задачи (1),(2); V_{2n-m+1} – линейные однородные формы, возникающие при построении краевых условий сопряженной невозмущенной задачи; $\{v_{kj}^0\}$ – СиПФ сопряженной невозмущенной задачи; a_{kj} – коэффициенты Фурье биортогонального разложения функции $p_m(x)$ по этой системе.

Для нашего конкретного случая формула Лагранжа имеет вид

$$\int_0^1 \ell(u)\overline{v(x)}dx - \int_0^1 u(x)\overline{\ell^*(v)}dx = [u'(0) - u'(1)]\overline{v(0)} +$$
$$u'(1)\left[\overline{v(0)} - \overline{v(1)}\right] - u(0)\overline{v'(0)} + u(1)\overline{v'(1)}$$

Поэтому

$U_1(u) = u'(0) - u'(1),\quad U_2(u) = u(0),\ U_3(u) = u'(1),\ U_4(u) = u(1)$

$V_4(v) = v(0),\quad V_3(v) = -v'(0),\ V_2(v) = v(0) - v(1),\ V_1(v) = v'(1).$

Следовательно, оператор $\mathcal{L}_0^*$, сопряженный оператору $\mathcal{L}_0$ задается дифференциальным выражением и краевыми условиями

$$\ell^*(v) = -v''(x) + \overline{q(x)}v(x),\ \ 0 < x < 1 \qquad (22)$$

$$V_1(v) \equiv v'(1) = 0,\quad V_2(v) \equiv v(0) - v(1) = 0. \qquad (23)$$

А оператор $\mathcal{L}_1^*$, сопряженный оператору $\mathcal{L}_1$ задается дифференциальным выражением

$$\ell^*(v) = -v''(x) + \overline{q(x)}v(x) - p(x)v'(0),\ \ 0 < x < 1$$

и краевыми условиями (23).

Из результатов [4] следует

Теорема 2. *Пусть задача (1),(2) обладает СиПФ, образующими базис Рисса. Тогда множество функций $p_m(x) \in L_2(0,1)$ таких, что система СиПФ задачи (1),(3) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_2(0,1)$.*

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 3. *Пусть задача (19),(20) обладает СиПФ, образующими базис Рисса. Тогда множество функций $p(x) \in L_2(0,1)$ таких, что система СиПФ задачи (19),(21) не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_2(0,1)$.*

Краткий ход доказательства. Пусть задача (19),(20) обладает системой СиПФ, образующей базис Рисса. Тогда собственные значения задачи – асимптотически двукратные и соответствующие им корневые подпространства состоят из одной собственной и одной присоединенной функций [3]. Асимптотическая двукратность собственных значений означает существование такого числа N_0, что все собственные значения λ_k с номерами $k > N_0$ будут двукратными. Пусть $\{v_{kj}(x), j = \overline{0, m_k^0}, k = \overline{1,\infty};\ m_k^0 = 1 \text{ для } k > N_0\}$ - система СиПФ задачи (22),(23).

Функцию $p(x)$ представим в виде ряда:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{N_0}\left[\sum_{j=0}^{m_k^0} a_{kj}\, v_{kj}^0(x)\right] + \sum_{k=N_0+1}^{\infty}\left[a_{k0}v_{k0}(x) + a_{k1}v_{k1}(x)\right]. \qquad (24)$$

Очевидно, что множество функций $p(x) \in L_2(0,1)$, представимых в виде ряда (24), коэффициенты которого асимптотически, то есть начиная с некоторого номера, обладают свойством $a_{k0} = 0$, $a_{k1} \neq 0$, будет плотным в $L_2(0,1)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что для таких функций $p(x)$ система СиПФ задачи (19),(21) не образует даже обычного базиса. Не уменьшая

общности, будем считать, что $a_{k0} = 0$, $a_{k1} \neq 0$ для всех $k > N_0$. Тогда функция $p(x)$ представима в виде ряда

$$p(x) = \sum_{k=1}^{N_0} \left[\sum_{j=0}^{m_k^0} a_{kj}\, v_{kj}^0(x)\right] + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} a_{k1}\, v_{k1}(x). \qquad (25)$$

Поэтому характеристический определитель задачи (1),(2) в нашем конкретном случае имеет вид:

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)\left(1 + \sum_{k=1}^{N_0}\left[\sum_{j=0}^{m_k^0} \overline{a_{kj}}\left(\sum_{r=0}^{m_k^0 - j} \frac{(\lambda_k^0)^{\frac{r}{2}}}{[\lambda-\lambda_k^0]^{r+1}}\, \overline{v'_{kj+r}(0)}\right)\right] + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \overline{a_{k1}}\, \frac{\overline{v'_{k1}(0)}}{\lambda-\lambda_k^0}\right). \qquad (25)$$

Пусть $c(x,\lambda), s(x,\lambda)$ – фундаментальная система решений уравнения $\ell(u) = \lambda u$ с условиями $c(0,\lambda) = s'(0,\lambda) = 1$, $c'(0,\lambda) = s(0,\lambda) = 0$. Стандартными вычислениями легко показать, что характеристический определитель невозмущенной задачи (19),(20) имеет вид $\Delta_0(\lambda) = 1 - s'(1,\lambda)$, а собственная функция равна $u_{k0}^0(x) = C_0 s(x,\lambda_k^0)$. Константа C_0 выбирается из условия нормировки собственных функций $\|u_{k0}^0(x)\| = 1$.

Так как все собственные значения $\lambda_k^0, k > N_0$ задачи (19), (20) – двукратные, то из (25) легко видеть, что $\Delta_1(\lambda_k^0) = 0$, то есть λ_k^0 также является собственным значением задачи (19),(21). При этом в силу того, что $a_{k1} \neq 0$ для всех $k > N_0$, собственные значения $\lambda_k^0, k > N_0$ задачи (19),(21) будут однократными.

Из условия биортогональности систем СиПФ сопряженных задач следует, что в этом случае $\int_0^1 \overline{p(x)}\, u_{k0}^0(x)\, dx = 0,\ \ k > N_0$. Поэтому собственные функции $u_{k0}^0(x)$ задачи (19),(20) при $k > N_0$ удовлетворяют краевым условиям (21) и, следовательно, являются собственными функциями задачи (19),(21). Таким образом, при $k > N_0$ собственные функции задачи (19),(21), имеют вид $u_{k0}^1(x) = C_0 s(x,\lambda_k^0)$. Далее строятся собственные функции сопряженной задачи, то есть оператора $\mathcal{L}_1^*$, соответствующие собственному значению $\overline{\lambda_k^0}, k > N_0$:

$$v_{k0}^1(x) = C_1\left\{\overline{c(x,\lambda)} - \overline{c'(1,\lambda_k^0)}\,\overline{s(x,\lambda)} + \frac{\overline{c'(1,\lambda_k^0)}}{A(\lambda_k^0)}\int_x^1 \left[\overline{c(x,\lambda_k^0)s(t,\lambda_k^0)} - \overline{c(t,\lambda_k^0)s(x,\lambda_k^0)}\right]p(t)\,dt\right\} \qquad (29)$$

При этом из асимптотики фундаментальной системы решений несложно получить, что $A(\lambda_k^0) = \left[1 + o\left(\frac{1}{\rho_k^0}\right)\|p(x)\|\right]$ и, следовательно,

$$\|v_{k0}^1(x)\| = |C_1|O(1) \tag{30}$$

Константу C_1 следует определять из условия биортогональности $\left(u_{k0}^1(x), v_{k0}^1(x)\right) = 1$. Подставляя сюда выражения (25.1) и (29), учитывая асимптотику C_0 и фундаментальной системы решений (26), стандартными вычислениями находим: $C_1 O\left(\frac{1}{\rho_k^0}\right) = 1$. Поэтому $C_1 = O(\rho_k^0)$ – является неограниченной величиной. Отсюда, учитывая нормированность собственной функции $u_{k0}^1(x)$ и оценку (30) для собственной функции $v_{k0}^1(x)$, получаем $\lim_{k\to\infty}\|u_{k0}^1(x)\| \cdot \|v_{k0}^1(x)\| = \infty$.

То есть не выполнено условие равномерной минимальности системы корневых функций оператора $\mathcal{L}_1$ и, следовательно, она не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$. Теорема 3 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 0824/ГФ4 Комитета науки МОН Республики Казахстан.

Библиографический список

1. Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. – 1982. – № 6. – С. 12–21.

2. Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // Успехи матем. наук. – 1979. – Т. 34, № 5. – С. 235–236.

3. Макин А.С. О спектральных разложениях, отвечающих несамосопряженному оператору Штурма-Лиувилля // ДАН. – 2006. – Т. 406, № 1. – С. 21–24.

4. Садыбеков М.А., Иманбаев Н.С. Регулярный дифференциальный оператор с возмущенным краевым условием, Математические заметки. – 2017. – Т. 101, № 5. – 768–778.

Сведения об авторе

Садыбеков Махмуд Абдысаметович, доктор физико-математических наук, Зав. отделом Института математики и матматического моделирования, Алматы, Казахстан. E-mail: sadybekov@math.kz.

УДК 517.52; 517.518

Садыгова С.Р., Гасанлы Р.Р., Джамил Караджам

О ПРОСТРАНСТВЕ μ-СТАТИСТИЧЕСКИХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе вводятся понятия μ-statistical точки разрывов первого и второго родов функции в некотором измеримом пространстве с мерой μ. Рассматривается пространство μ-statistical непрерывных на некотором отрезке функций, изучаются некоторые свойства функций из этого пространства. Изучаются взаимоотношения этого пространства с пространствами непрерывных и суммируемых по Лебегу функций в случае, когда μ есть мера Лебега.

Ключевые слова: μ-statistical точки разрыва, μ-statistical непрерывность, пространство μ-статистических непрерывных функций.

Sadigova S.R., Hasanli R.R., Cemil Karacam

ON A SPACE OF μ-STATISTICAL CONTINUOUS FUNCTIONS

The concepts of μ-statistical discontinuities of the first and second kind for the functions in some measurable space with the measure μ are introduced in this work. The space of μ-statistical continuous functions on some interval is considered, some properties of functions in this space are studied. The relationship between this space and the spaces of continuous and Lebesgue-summable funcrions in case where μ is a Lebesgue measure is also considered.

Key words: μ-statistical discontinuities, μ-statistical continuity, the space of μ-statistical contiunious functions.

В данной работе определяются μ-*stat* односторонние пределы в точке, μ-*stat* точки разрывов первого рода и второго рода в некотором измеримом пространстве с мерой. Рассматривается пространство $C_{st}[a,b]$ μ-*statistical* непрерывных на некотором отрезке $[a,b]$ функций. Доказывается, что пространство непрерывных функций строго вложено в него. Более того, показывается, что $C_{st}[a,b]$ не

© Садыгова С.Р., Гасанлы Р.Р., Джамил Караджам, 2017

вложено в лебегово пространство функций $L_p[a,b]$, при $\forall p \in (0,+\infty)$, т.е. $C_{st}[a,b] \setminus L_p(a,b) \neq \varnothing$. Сравнивается понятие μ-*stat* непрерывности в точке с ранее известным понятием аппроксимативной непрерывности (см. напр. [2]).

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями. N – натуральные числа; R – действительные числа; $\exists$ – существует; $\exists!$ – существует единственно; $\Rightarrow$ – следует; $\Leftrightarrow$ – эквивалентно. $I_a^{+\infty} \equiv [a;+\infty)$; $I_a^{-\infty} \equiv (-\infty;a]$.

Пусть $\left(I_a^{\infty};\mathbf{B};\mu\right)$ некоторые измеримые пространства с мерой $\mu:\mathbf{B} \to I_a^{\infty}$, где $\mathbf{B}$ σ-алгебра борелевых подмножеств в I_a. Будем предполагать, что мера μ σ-конечна и $\mu\left(I_a^{\infty}\right)=+\infty$. Для краткости меру множества $M \in \mathbf{B}$ будем обозначать через $|M|$, т.е. $|M| = \mu(M)$.

Нам понадобятся некоторые понятия и факты из работы [1].

Определение 1. *Будем говорить, что бесконечная удаленная точка* (∞) *является* μ *- stat точкой плотности множества* $M \in \mathbf{B}$, *если*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left|M \cap I_a^x\right|}{\left|I_a^x\right|} = 1,$$

где $I_a^x = [a,x]$, $\forall x \in I_a^{\infty}$.

Пусть $f: I_a^{\infty} \to R$ – некоторая $\mathbf{B}$-измеримая функция и $A \in R$ – некоторое число. Для заданного $\varepsilon > 0$ положим

$$A_{\varepsilon}(f) \equiv \left\{x \in I_a^{\infty} : |f(x) - A| \geq \varepsilon\right\}.$$

Определение 2. *Будем говорить, что* f *имеет* μ *-* $stat$ *предел* A *на бесконечности, если*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left|A_{\varepsilon}(f) \cap I_a^x\right|}{\left|I_a^x\right|} = 0, \forall \varepsilon > 0,$$

и его будем обозначать как μ *-* $st \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$

Нетрудно заметить, что (∞) является $\mu\text{-}stat$ точкой плотности M тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left|M^c\bigcap I_a^x\right|}{\left|I_a^x\right|}=0,$$

где $M^c=I_a^\infty\setminus M$. Оно следует непосредственно из соотношения $I_a^x=\left(M\bigcap I_a^x\right)\bigcup\left(M^c\bigcap I_a^x\right)$. Следовательно,

$$\mu\text{-}st\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\left|A_\varepsilon^c(f)\bigcap I_a^x\right|}{\left|I_a^x\right|}=1,\forall\varepsilon>0.$$

Класс всех множеств из I_a^∞, для которых (∞) является $\mu\text{-}stat$ точкой плотности, обозначим через I_{st}^∞.

Определение 3. *Будем говорить, что последовательность* $\{a_n\}_{n\in N}\subset I_a^\infty$ *имеет* $st\text{-}\lim$ *равный* (∞), *если*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{card(a_\varepsilon\bigcap e_n)}{n}=0,\forall\varepsilon>0,$$

где $e_n=\{1;\ldots;n\}$ *и* $a_\varepsilon\equiv\{k\in N:|a_k|<\varepsilon\}$, *и этот факт будем обозначать как* $a_n\overset{st}{\to}\infty, n\to\infty$, *или* $st\text{-}\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

Положим $a_\varepsilon^c=\{k\in N:|a_k|\ge\varepsilon\}$. Тогда из соотношения $e_n=(a_\varepsilon\bigcap e_n)\bigcup\left(a_\varepsilon^c\bigcap e_n\right)$ непосредственно следует, что

$$st\text{-}\lim_{n\to\infty}a_n=\infty\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{card\left(a_\varepsilon^c\bigcap e_n\right)}{n}=1,\forall\varepsilon>0.$$

Определение 4. *Будем говорить, что функция* $f:I_a^\infty\to R$ *имеет* $st\text{-}\lim$ *равный* $A\in R$, *если* $st\text{-}\lim_{n\to\infty}f(a_n)=A$ *для* $\forall\{a_n\}_{n\in N}\subset I_a^\infty: st\text{-}\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, *и это будем обозначать как* $st\text{-}\lim_{x\to\infty}f(x)=A$.

Нам понадобится понятие μ-*stat* фундаментальности, введенное в работе [2].

Определение 5. *Будем говорить, что* $\mathbf{B}$*-измеримая функция* $f: I_a^{\infty} \to R$ μ-*stat фундаментальна на бесконечности, если для* $\forall \varepsilon > 0, \exists x_{\varepsilon} \in I_a^{\infty}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left| X_f(\varepsilon) \cap I_a^x \right|}{\left| I_a^x \right|} = 0,$$

где $X_f(\varepsilon) \equiv \left\{ x \in I_a^{\infty} : \left| f(x) - f(x_{\varepsilon}) \right| \geq \varepsilon \right\}$.

Пусть $\mathbf{B}$ класс всех борелевых подмножеств R и $(R; \mathbf{B}; \mu)$ измеримое пространство с σ-конечной мерой $\mu: \mathbf{B} \to I_0^{\infty}$: $\mu((-\infty, a)) = \mu((a, +\infty)) = +\infty$, $\forall a \in R$. Пусть $E \in \mathbf{B}$ некоторое множество и x_0 его предельная точка. Положим

$$E(x_0) \equiv \left\{ x : \left(x_0 + \frac{1}{x} \right) \in E \right\},$$

и пусть

$$I_t(x_0) \equiv \begin{cases} I_a^{(t-x_0)^{-1}}, & (t - x_0)^{-1} \geq a, \\ I_{(t-x_0)^{-1}}^{a}, & (t - x_0)^{-1} < a. \end{cases}$$

Пусть $f: E \to R$ некоторая $(R; \mathbf{B})$ – измеримая функция.

Пусть $f: [a, b] \to R$ некоторая функция. Ясно, что если $f \in C[a, b]$, то $f(\cdot)$ является μ-*stat* непрерывной на $[a, b]$.

Линейное пространство μ-*stat* непрерывных на $[a, b]$ функций над полем K ($K \equiv C$ и R) обозначим через $C_{st}[a, b]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $(R; \mathbf{B}; \mu)$ *измеримое пространство с* σ*-конечной мерой* μ *на* σ*-алгебре борелевых множеств* $\mathbf{B}$ *и* $\mu((-\infty, x_0)) = \mu((x_0, +\infty)) = +\infty$ *при некотором* $x_0 \in R$. *Тогда имеют место:*

i) $C[a,b] \subset \left(C_{st}[a,b] \cap L_p(a,b)\right),\ \forall p \in (0,+\infty)$;

ii) $C[a,b] \subset \left(C_{st}^{\flat}[a,b] \subset L_p(a,b)\right),\ \forall p \in (0,+\infty)$;

причем эти включения строгие.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 2. *Пространство* $C_{st}^{\flat}[a,b]$ *относительно нормы* $\|\cdot\|_{\infty}$ *является банаховым.*

Библиографический список

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

2. Bilalov B.T., Sadigova S.R. On μ-statistical convergence // Proceedings of the American Mathematical Society, 2015. – Vol. 143, № 9. – P. 3869–3878.

Сведения об авторах

Садыгова Сабина Рагиб, ведущий научный сотрудник Института Математики и Механики Национальной Академии наук, Баку, Азербайджан. E-mail: s_sadigova@mail.ru.

Гасанлы Разия Рауф, Институт Математики и Механики Национальной Академии наук, Баку, Азербайджан. E-mail: kovser1305@gmail.com.

Джамил Каражам, Технический Университет Йылдыз, Стамбул, Турция. E-mail: cemil-karacam@hotmail.com.

УДК 517.518.42

Салманов В.Ф., Мирзоев В.С.

О БАЗИСНОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ С РАЗРЫВНОЙ ФАЗОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ КУСОЧНО-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается система экспонент с кусочно-линейной фазой. Найдено необходимое и достаточное условие базисности этой системы в пространстве Соболева кусочно-дифференцируемых функций.

Ключевые слова: базисность, система экспонент, пространство Соболева.

Salmanov V.F., Mirzoyev V.S.

ON BASICITY OF DISCONTINUOUS PHASE EXPONENTIAL SYSTEM IN THE SPACE OF PIECEWISE DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Piecewise linear phase exponential system is considered. Necessary and sufficient conditions for basicity of this system in the Sobolev space of piecewise differentiable functions are found.

Keywords: basicity, exponential system, Sobolev space.

При решении многих уравнений в частных производных методом Фурье возникают возмущенные системы экспонент вида

$$\left\{e^{i[nt+\gamma_1(t)]}; e^{-i[kt+\gamma_2(t)]}\right\}_{n;k\in N},$$

где $\gamma_i(t), i=1,2$ – вообще говоря, кусочно-непрерывные функции на сегменте $[-\pi,\pi]$ (N – натуральные числа). Обоснование метода диктует изучение базисных свойств подобных систем в соответствующих пространствах функций.

Видимо исследования базисных свойств возмущенных систем подобного вида берут свое начало из известных работ Пэли – Винера [1] и Н.Левинсона [2]. Базисные свойства систем вида (1) в лебеговых пространствах $L_p(-\pi,\pi)$ при $\gamma_i(t)=\beta t,\ i=1,2$, когда β действительный параметр, полностью изучены в работах [3]-[6], а в случае, когда β комплексный параметр, изучен в работе [7]. В общем случае, когда функции $\gamma_i(t), i=1,2$, являются кусочно-непрерывными

© Салманов В.Ф., Мирзоев В.С., 2017

или же просто измеримыми функциями базисные свойства систем вида (1) в $L_p(-\pi,\pi)$ изучены в работах [8–11].

Аналогичные вопросы в Соболевых пространствах $W_p^1(-\pi;\pi)$ изучены в работах [12;13]. Аппроксимативные свойства систем экспонент с разрывной фазой в пространстве кусочно-непрерывных функций с sup-нормой изучены в работах [14]–[15].

Определим пространство Соболева кусочно-дифференцируемых функций $KW_p^1(-\pi;\pi)$. Обозначим $I_1=(-\pi,0)$, $I_2=(0,\pi)$, и пусть $I=I_1\cup I_2$. Через $f/_M$ обозначим сужение функции f на множестве M. Положим

$$f\in KW_p^1(-\pi,\pi)\Leftrightarrow f/_{I_k}\in W_p^1(I_k),\ k=1,2.$$

Норму в $KW_p^1(-\pi;\pi)$ определим выражением

$$\|f\|_{KW_p^1(-\pi,\pi)}=\left(\|f\|^2_{W_p^1(I_1)}+\|f\|^2_{W_p^1(I_2)}\right)^{1/2},$$

где

$$\|f\|_{W_p^1(a,b)}=\|f\|_{L_p}+\|f'\|_{L_p},\ p>1.$$

Обозначим прямую сумму $L_p(-\pi,\pi)\oplus C^2$ через L_p, т.е.

$$\mathsf{L}_p=L_p(-\pi,\pi)\oplus C^2,$$

где C – комплексная плоскость. Норму в L_p определим выражением

$$\|\hat{u}\|_{\mathsf{L}_p}=\|u\|_p+|\lambda|+|\mu|,$$

где

$$\hat{u}=(u;\lambda;\mu)\in\mathsf{L}_p,\ \ p>1.$$

При получении основного результата, существенную роль играет следующая лемма.

Лемма. *Оператор*

$$A\hat{u}(t)=\begin{cases}\lambda+\int\limits_{-\pi}^{t}u(t)d\tau, & -\pi\le t<0,\\ \mu+\int\limits_{0}^{t}u(\tau)d\tau, & 0\le t\le\pi,\end{cases}$$

осуществляет изоморфизм между пространствами L_p *и* $KW_p^1(-\pi,\pi)$, *т.е. пространства* L_p *и* KW_p^1 *изоморфны.*

А теперь приведем основной результат работы.

Теорема. *Пусть* $-\frac{1}{q}<\frac{\beta_1-\beta_2}{\pi}<\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$ *и* $\omega=2\alpha+1+\frac{\beta_2-\beta_1}{\pi}$. *Тогда система*

$$e^{-}(\cdot)\cup e^{+}(\cdot)\cup\left\{e^{i[(n+\alpha\,sign\,n)t+\beta(t)]}\right\}_{n\in N},$$

образует базис в пространстве $KW_p^1(-\pi,\pi)$ *тогда и только тогда, когда имеет место неравенство*

$$-\frac{1}{q}<\omega<\frac{1}{p},$$

где

$$e^{-}(t)=\begin{cases}1, & -\pi\le t<0,\\ 0, & 0\le t\le\pi,\end{cases}\qquad e^{+}(t)=\begin{cases}0, & -\pi\le t<0,\\ 1, & 0\le t\le\pi,\end{cases}$$

$\alpha,\ \beta_i\in R,\ \alpha\notin\{-N\}$, $i=1,2$, *действительные параметры.*

Библиографический список

1. Винер Н., Пели Р. Преобразование Фурье в комплексной области. – М.: Наука, 1964. – 268 с.

2. Левинсон Н. Gap and density theorems // New York, Publ. Amer. Math.-Soc. – 1940. – P.123–128.

3. Билалов Б.Т. Базисность некоторых систем экспонент, косинусов и синусов // Диф. уравн. – 1990. – Т. 26, № 1 – С. 10–16.

4. Билалов Б.Т. Базис из некоторой системы экспонент в L_p // Докл. РАН. – 2003. – Т. 392, № 5. – С. 583–593.

5. Девдариани Г.Г. О базисности одной системы функций // Дифф. ур. – 1986. – Т. 22, № 1. – С. 170–171.

6. Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифф. ур. – 1987. – Т. 23, № 1. – С. 177–179.

7. Моисеев Е.И. О дифференциальных свойствах разложений по системе синусов и косинусов // Диф. ур. 1996. – Т. 32, № 1. – С. 117–126.

8. Салманов В.Ф. Полнота и минимальность системы экспонент в пространстве кусочно-непрерывных функций // The scientific and pedagogical news of Odlar Yurdu University, Baku. – 2005. – P. 42–45.

9. Седлецкий А.М. О сходимости негармонических рядов Фурье по системам экспонент, косинусов и синусов // ДАН СССР. – 1988. – Т. 301, № 5. – С. 501–504.

10. Bilalov B.T., Salmanov V.F. Uniform convergence of biorthogonal series on one system of exponents // Transactions of NAS of Azer. – 2003. – V. XXIII, № 4. – P.25–34.

11. Russell D.L. On exponential bases for the Sobolev spaces over an interval // Journal of Mathem. Anal. and Appl. –1982.– 87. – P. 528–550.

Сведения об авторах

Салманов Валид Фатали, доцент, старший научный сотрудник, ИММ НАН Азербайджана. E-mail: valid.salmanov@mail.ru.

Мирзоев Видади Султанага, доцент, ведущий научный сотрудник, ИММ НАН Азербайджана.

УДК 004.771:004.942:519.688.

Сахибгареева М.В., Глущенко Е.И.,
Еникеева Л.В., Шарипова Г.М.

О ТЕНДЕНЦИЯХ В СОЗДАНИИ НАУЧНЫХ ПРОГРАММНЫХ ИНСТРУМЕНТОВ В ВЕК ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В данной статье рассматривается экосистема современных программно-технических инструментариев для проведения научных исследований с использованием мощных высокопроизводительных ресурсов. В частности, проведен краткий обзор программных средств для математического моделирования механизмов химических превращений.

Ключевые слова: веб-сервисы, облачные вычисления, параллельные вычисления, SaaS, mathematicalchemistry.

SakhibgareevaM.V., GluschenkoE.I.,
Enikeeva L.V., Sharipova G.M.

ABOUT TRENDS IN DEVELOPMENT OF SCIENTIFIC PROGRAM INSTRUMENTS IN THE CENTURY OF HIGH-PERFORMANCE CALCULATIONS

This article is devoted to the review of a modern ecosystem of software and hardware tools for scientific research using powerful high-performance resources. In particular, the largest software tools for mathematical modeling of the mechanisms of chemical transformations are considered.

Key words: web-services, cloud computing, parallel computing, SaaS, mathematical chemistry.

В современной мировой науке практически по всем направлениям с каждым годом усиливается роль мощных вычислительных ресурсов в исследовательских работах. С повышением требований к качеству исследований, прикладные задачи становятся все более сложными и порождают все большее количество данных. Как следствие, необходимо постоянное повышение производительности вычислительных систем, разработка новых или развитие существующих программных инструментов. От современного научного инструментария ожидают уже не только вычислителей и инструментов построения моделей, но и предо-

© Сахибгареева М.В., Глущенко Е.И., Еникеева Л.В., Шарипова Г.М., 2017

ставления необходимых вычислительных ресурсов, либо масштабируемости на мощности исследовательского центра.

Потребность в вычислительных мощностях характерна и для области математической химии, в частности, кинетики многостадийных химических реакций. Это подтверждается данными опроса, проведенного авторами настоящей статьи, среди исследовательских коллективов России (осень 2016 г.), занимающихся кинетическим моделированием химических процессов. Опрос проводился путем личного интервьюирования участников тематических химических и математических конференций и email-анкетирования докторов физико-математических и химических наук. Среди опрошенных коллективов большинство подтвердили проблему нехватки вычислительных ресурсов, что выражается в отсутствии выхода на кластеры или в длительных очередях задач на них. Часть призналась в трудностях при освоении работы с кластерами и/или распараллеливании расчетов. Некоторые испытывают потребность в более качественных методах решения обратных задач для построения кинетических моделей и/или в проблемно-ориентированно программном обеспечении. Также, часть опрошенных высказала потребность в инструментах совместного ведения исследований.

Стремительное развитие компьютерных технологий породило различные подходы к решению проблемы нехватки вычислительных мощностей. На текущий момент уже сформировалась некая экосистема современных наукоемких программно-технических средств, ознакомление с которой будет полезным при выборе оптимального инструментария для той или иной прикладной задачи.

Рассмотрим пример экосистемы (рис. 1) в области математического моделирования механизмов химических превращений. На рисунке показаны представители одних из самых распространенных программно-технических сред. Их оценка проводилась по двум характеристикам: 1) способу решения проблемы нехватки вычислительных мощностей и 2) порогу входа пользователя-химика для применения их к задачам химической кинетики.

Ось абсцисс характеризует сложность освоения инструментария. Чем левее расположен рассматриваемый инструмент, тем больше усилий придется потратить пользователю для решения своей задачи с использованием данного продукта. Ось ординат характеризует предоставление вычислительных ресурсов, которые могут быть задействованы для решения прикладной задачи.

Рис. 1. Экосистема наукоемких программно-технических средств

Так, в правом нижнем углу располагаются узкоспециализированные локальные desktop-программы, которые требуют от пользователя самообеспечения вычислительными ресурсами. Для задач химической кинетики можно выделить: KinFitSim (США/Канада), KinTek (США), DynaFitBioKin (США), ChemicalWorkbench и Khimera от KintechLaboratory (Россия).

Соответственно, в левом верхнем углу располагаются облачные платформы, предоставляющие вычислительные сервисы, хранилища данных, инструменты для разработчиков и пр. Среди них можно выделить MicrosoftAzure, AmazonWebServices, GoogleCloudPlatform, Heroku и др. Эффективное (в том числе с финансовой точки зрения) использование таких платформ требует от пользователя технической подготовленности и навыков программирования и администрирования.

В данную экосистему входят высокоуровневые языки и интерактивные среды для программирования, численных расчетов и визуализации результатов, такие как MatLab, WolframMathematica, Maple и др. Часть из них имеют веб-версии и предоставляют вычислительные ресурсы. Например, MatLab и WolframMathematica в различных комплектациях предоставляют до 16 ядер на каждого пользователя. MatLab так же предоставляет вычислительные ресурсы через MicrosoftAzure. Однако, использование данных средств представляет трудность для недостаточно подготовленных пользователей, желающих решать узкоспециализированные задачи.

Более близким к потребностям ученых с навыками программирования является сравнительно молодой проект FlyElephant, развиваемый стартапом из Украины. Это облачная платформа для ученых,

инженеров и исследователей, которая предоставляет доступ к различным облакам (Azure, AWS) или кластерам HPC, а также к программному обеспечению Ansys. Имеется поддержка различных языков программирования, например, R, Python, Java, C/C++ и т. д., а также инструментов и библиотек Hadoop, Spark, Anaconda, Octave, MatLab, Tensorflow, Theano, Caffe и др.

Для таких областей науки, как фармацевтика и биотехнологий существует облачный сервис ScienceCloud. Это гибрид социальной сети для ученых, специализированных приложений для сбора, организации, поиска и анализа информации озвученных областей, системы хранения данных и учета химических веществ предприятий, и средств ведения исследований в виде проектов.

Ansys и Wolfram имеют серию специализированных пакетов под различные инженерные расчеты и научные направления, включая область химических превращений. Данные продукты тоже становятся веб-ориентированными.

В целом направление облачных вычислений (CloudComputing) стало одной из характерных тенденций развития современных информационных технологий. Суть облачных вычислений заключается в предоставлении вычислительных служб (серверов, хранилищ, баз данных, сетевого оборудования, программного обеспечения и т. д.) через Интернет. Это направление перспективно для развития дистанционного обучения, а также для компьютерного моделирования. Уже сегодня можно наблюдать массовое появление облачных Web-ресурсов, а также перевод существующих крупных программных продуктов на web-технологии.

Помимо рассмотренных в экосистеме веб-ресурсов существует ряд разработок, создаваемых под собственные нужды научных учреждений и не открытых для общего пользования в сети Интернет. Среди отечественных разработок имеются проблемно-ориентированные веб-сервисы для научной аналитики по физической химии радикальных жидкофазных реакций [1] и моделирования нанокомпозитных материалов [2], совместно создаваемые Институтом проблем химической физики и Институтом экспериментальной минералогии РАН. Данные сервисы, по большей части, организуют доступ через web к различным прикладным пакетам.

В Уральском федеральном университете ведется разработка специализированного веб-портала для удаленных вычислений на многопроцессорных вычислительных системах с модулями для решения задач гравиметрии и магнитометрии [3].

Авторами настоящей работы разрабатывается веб-сервис «Galo GO» [3], предназначенный для научных исследователей, занимающихся математическим моделированием механизмов и кинетики химических процессов. В сервисе интегрируются математические методы, система хранения данных исследований и расчетов и кластеры HPC с автоматизацией запуска расчетов на них.

Библиографический список

1. Прохоров А.И., Варламов Д.А., Амосова Е.С., Соловьева М.Е., Туманов В.Е., Берзигияров П.К. Инфраструктура веб-сервиса интеллектуальной проблемно-ориентированной системы научной аналитики по физической химии радикальных жидкофазных реакций в интернет // Научный сервис в сети Интернет: труды XVII Всероссийской научной конференции (21–26 сентября 2015 г., г. Новороссийск). – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2015. – С. 298–302.

2. Волохов В.М., Варламов Д.А., Волохов А.В., Прохоров А.И., Покатович Г.А. Построение среды компьютерного моделирования нанокомпозитных материалов на базе комплекса вычислительных сервисов и высокоуровневых веб-интерфейсов // Научный сервис в сети Интернет: труды XVII Всероссийской научной конференции (21–26 сентября 2015 г., г. Новороссийск). – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2015. С. 63–68.

3. Akimova E.N., Misilov V.E., Skurydina A.F., Martyshko M.P. Specialized Web Portal for Solving Problems on Multiprocessor Computing Systems // Proceedings of the 1st Ural Workshop on Parallel, Distributed, and Cloud Computing for Young Scientists (Ural-PDC 2015). – Yekaterinburg, 2015. – P. 123–129.

4. Сахибгареева М.В., Еникеева Л.В., Глущенко Е.И. Применение облачных технологий при математическом моделировании кинетики химических реакций // Материалы V Всерос. науч.-практ. конф. «Математическое моделирование процессов и систем» (г. Стерлитамак, 17–18 ноября 2016 г.). – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – Ч. III, – С. 108–112.

Сведения об авторах

Сахибгареева Маргарита Владимировна, кандидат физико-математических наук, специалист, проектная группа «GaloGO», г. Уфа, Margarita.vl2011@gmail.com.

Глущенко Екатерина Игоревна, специалист, проектная группа «GaloGO», г. Уфа.

Еникеева Лениза Васимовна, специалист, проектная группа «GaloGO», г. Уфа.

Шарипова Гульназ Маратовна, специалист, проектная группа «GaloGO», г. Уфа.

УДК 517.95

Сафина Р.М.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Рассмотрена первая граничная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в прямоугольной области. Установлен критерий единственности решения задачи. Решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответсвующей одномерной спектральной задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, сингулярный коэффициент, задача Дирихле, единственность, существование.

Safina R.M.

THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE MIXED TYPE EQUATION WITH A SINGULAR COEFFICIENT

The first boundary value problem for a mixed-type equation with a singular coefficient in a rectangular domain is considered. A criterion for the uniqueness of the solution of the problem is established. The solution is constructed as the sum of a series in the system of eigen functions of the corresponding one-dimensional spectral problem.

Key words: equation of mixed type, singular coefficient, Dirichlet problem, spectral method, uniqueness, existence.

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Su \equiv u_{xx} + (sgn\, y)u_{yy} + \frac{k}{x}u_x - c^2 u = 0 \qquad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $k < 1$, $c > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, l – заданные действительные числа.

Задача Дирихле. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^1(D) \cap C^2\left(D^+ \cup D^-\right) \qquad (2)$$

$$Su(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D^+ \cup D^-, \qquad (3)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (4)$$

$$u(l, y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta, \qquad (5)$$

$$u(0, y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta, \qquad (6)$$

© Сафина Р.М., 2017

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$,

$D^+ = D \cap \{y > 0\}$, $D^- = D \cap \{y < 0\}$.

Ранее первая граничная задача для уравнения (1) при $k = c = 0$ изучена в работах [1–3], а в работах [4–6] при $k = 0$ и $c \neq 0$.

В работах [7, 8] методом спектрального анализа для уравнения (1) исследована первая граничная задача в прямоугольной области D при некоторых значениях $k \neq 0$ и $c = 0$.

В данной работе, следуя [9–12], доказаны теоремы единственности и существования решения задачи (2)–(6) при всех $k < 1$ и $c > 0$.

Решение задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи

$$u(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{l} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \frac{x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x)}{\left| J_{\frac{3-k}{2}}(\lambda_n l) \right|}, \qquad (7)$$

где

$$u_n(y) = \begin{cases} \Delta^{-1}(n)(\varphi_n(\cos p_n \alpha shp_n y + \sin p_n \alpha chp_n y) + \psi_n shp_n(\beta - y)), & y > 0, \\ \Delta^{-1}(n)(\varphi_n \sin p_n(y + \alpha) + \psi_n(shp_n \beta \cos p_n y - chp_n \beta \sin p_n y)), & y < 0. \end{cases}$$

$J_\nu(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода, $\lambda_n = \frac{\mu_n}{l}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, μ_n – корень уравнения $J_{\frac{1-k}{2}}(\mu_n) = 0$, при условии, что выражение

$$\Delta(n) = chp_n \beta \sin p_n \alpha + shp_n \beta \cos p_n \alpha \neq 0,\ n \in N.$$

Возникает вопрос о нулях выражения $\Delta(n)$. Для этого выражение $\Delta(n)$ представим в виде

$$\Delta(n) = \sqrt{ch2p_n\beta}\, \sin(p_n \alpha + \theta_n) = \sqrt{ch2p_n\beta}\, \sin(\tilde{\mu}_n \tilde{\alpha} + \theta_n), \qquad (8)$$

где

$$p_n \alpha = \sqrt{c^2 + \lambda_n^2}\, \alpha = \alpha \sqrt{c^2 + \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2} = \frac{\alpha}{l} \mu_n \sqrt{1 + \left(\frac{cl}{\mu_n}\right)^2} = \tilde{\alpha} \mu_n \tilde{p}_n = \tilde{\alpha} \tilde{\mu}_n,$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{l},\ \tilde{\mu}_n = \mu_n \tilde{p}_n,\ \theta_n = \arcsin \frac{ch\lambda_n \beta}{\sqrt{ch2\lambda_n \beta}} \to \frac{\pi}{4} \text{ при } n \to +\infty .$$

Из представления (8) видно, что выражение $\Delta(n) = 0$ относительно $\tilde{\alpha}$ только в том случае, когда

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{\tilde{\mu}_n}(\pi z - \theta_n), \quad z = 1,2,\ldots.$$

Установлен критерий единственности решения задачи (2)–(6).

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2)–(6), то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия* $\Delta(n) \neq 0$ *при всех* $n \in \mathrm{N}$.

При обосновании сходимости построенного ряда возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость этого ряда. В связи с этим для доказательства равномерной сходимости ряда установлена оценка об отделенности от нуля малого знаменателя с соответствующей асимптотикой, которая позволила доказать существование регулярного решения уравнения (1).

Лемма. *Если* $\tilde{\alpha} = p/q,\ p,q \in N, (p,q) = 1$ *и* $k \neq \frac{1}{p}(4r + q - 4qd)$ *при* $r = 1,\ldots,q-1,\ d \in Z$ *то существуют положительные постоянные* C_0 *и* $n_0 \in N$, *такие, что при всех* $n > n_0$ *справедлива оценка*

$$|\Delta(n)| \geq C_0 e^{p_n \beta}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы и* $\varphi(x), \psi(x) \in C^3[0,l]$ *и* $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi'(0) = \psi'(0) = \varphi''(0) = \psi''(0) = 0$, $\varphi(l) = \psi(l) = \varphi'(l) = \psi'(l) = \varphi''(l) = \psi''(l) = 0$. *Тогда если* $\Delta(n) \neq 0$ *при всех* $n = \overline{1, n_0}$, *то существует единственное решение задачи и это решение определяется рядом (7); если* $\Delta(n) = 0$ *при некоторых* $n = m_1, m_2, \ldots, m_h \leq n_0$, *то задача разрешима только тогда, когда выполняются условия*

$$\psi_s ch\lambda_s \beta - \varphi_s \cos \lambda_s \alpha = 0, \quad s = m_1, m_2, \ldots, m_h,$$

и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда

$$u(x,y)=\frac{\sqrt{2}}{l}\left(\sum_{n=1}^{m_1-1}+...+\sum_{n=m_{h-1}+1}^{m_h-1}+\sum_{n=m_h+1}^{+\infty}\right)u_n(y)\frac{x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x)}{\left|J_{\frac{3-k}{2}}(\lambda_n l)\right|}+\frac{\sqrt{2}}{l}\sum_s \tilde{u}_s(y)\frac{x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_s x)}{\left|J_{\frac{3-k}{2}}(\lambda_s l)\right|},$$

где в последней сумме s *принимает значения* $m_1, m_2, ..., m_h$, *функция* $\tilde{u}_s(y)$ *определяется по формуле*

$$\tilde{u}_s(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{ch\lambda_s\beta}\left[\varphi_s ch\lambda_s y - d_s sh\lambda_s(\beta-y)\right], & y>0\\ \dfrac{1}{ch\lambda_s\beta}\left[\varphi_s\cos\lambda_s y - d_s\left(sh\lambda_s\beta\cos\lambda_s y - ch\lambda_s\beta\sin\lambda_s y\right)\right], & y<0,\end{cases}$$

$d_s \neq 0$ *– произвольная постоянная; если в конечных суммах в правой части верхний предел меньше нижнего, то их следует считать равными нулю.*

Библиографический список

1. Вахания И.Н. Об одной особой задаче для уравнения смешанного типа // Тр. АН ГрузССР, 1963. – № 3. – С. 69–80.

2. Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinius coefficient. Ann. Math. pura ed Appl., 1963. – Vol. 62. – PP. 371–377.

3. Жегалов В.И. Нелокальная задача Дирихле для уравнения смешанного типа // Неклассические уравнения матем. физики. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1985. – С.168–172.

4. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М: Наука, 2006. – 287 с.

5. Хачев М.М. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольнике // Дифференциальные уравнения, 1978. – Т. 14. – № 1. – С. 136–139.

6. Сабитова Ю.К., Бахристова А.А. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе // Труды Стерлитамакского филиала АН РБ. Серия «Физико-математические и технические науки». – 2009. – Вып. 6. – С. 103–110.

7. Сафина Р.М. Задача Дирихле для уравнения Пулькина в прямоугольной области // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучн.серия. – 2014. – № 10. – С. 91–101.

8. Сафина Р.М. Задача Келдыша для уравнения Пулькина в прямоугольной области // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучн.серия. – 2015. – № 3. – С. 53–64.

9. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. – 2007. – Т. 413. – № 1. – С. 23–26.

10. Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 4. – С. 45–53.

11. Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 11. – С. 43–52.

12. Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. – № 1. – С. 68–78.

Сведения об авторе

Сафина Римма Марселевна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры физико-математических дисциплин и информационных технологий ФГБОУ ВО «Поволжская ГАФКСиТ». E-mail: rimma77705@mail.ru.

УДК 004.42

Сафина К.Р., Болтачев Э.Ф., Нафикова А.Р.

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА И ВИЗУАЛИЗАЦИИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ В ПРАВООХРАНИТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В данной работе разработан программный продукт для анализа и визуализации социально-экономических факторов в правоохранительной деятельности при помощи пакета Microsoft Excel и среды программирования Delphi 7.

Ключевые слова: эконометрика, информационные технологии, статистический анализ.

Safina K.R., Boltachev E.F., Nafikova A.R.

SOFTWARE DEVELOPMENT FOR ANALYSIS AND VISUALIZATION OF SOCIO-ECONOMIC FACTORS IN LAW ENFORCEMENT ACTIVITIES

In this work the software product is developed for the analysis and visualization of socio-economic factors in law-enforcement activity by means of the Microsoft Excel package and the Delphi 7 programming environment.

Key words: econometrics, information technology, statistical analysis.

В век компьютеризации и информатизации информационные технологии захватывают практически все сферы жизнедеятельности и расширяют возможность обработки данных с помощью эконометрических методов. На сегодняшний день трудно представить какую-либо научную или исследовательскую работу, которую методологии и современные средства построения моделей обошли стороной.

Эконометрика представляет собой науку, исследующую количественные и качественные закономерности и взаимосвязи между различными факторами в экономике и других областях при помощи математических и статистических методов и моделей [1].

Анализ социально-экономических факторов в правоохранительной деятельности позволит своевременно выявить закономерности и корреляцию между различными факторами, которые могу влиять на возникновение социальных проблем.

© Сафина К.Р., Болтачев Э.Ф., Нафикова А.Р., 2017

Анализ различной статистической информации можно упростить до минимума, избегая рутинных ручных вычислений. Существует множество программ для статистической обработки данных, таких как SPSS Statistics, SYSTAT (универсальная статистическая система), STADIA (отечественный статистический пакет), а также STADGRAPHICS 5.1.

Правоохранительная деятельность самым непосредственным образом связана с охраной права. Правоохранительные органы очень остро нуждаются в специализированном программном обеспечении, которое поможет своевременно выявить существующие проблемы в преступной среде и рационально распределить силы и средства органов внутренних дел [2].

Актуальность и важность темы исследования заключается в необходимости разработки и создания такого программного обеспечения, которое будет отличным помощником в противодействии преступности правоохранительным органам г. Стерлитамака.

Практическая реализация программного обеспечения включает в себя следующие этапы:

1) сбор исходных данных для предварительного анализа и проведения расчетов при помощи пакета Microsoft Excel;

2) применение статистических методов обработки и классификации анализируемых данных;

3) выявление уровней зависимости противоправных действий от выбранных социально-экономических факторов;

4) создание программного обеспечения в Delphi 7, реализующего алгоритм выявления зависимостей факторов.

Среда разработки Delphi является одним из популярнейших инструментов разработки прикладных программ. Она поддерживает так называемую быструю разработку, основанную на технологии визуального проектирования и событийного программирования, суть которой состоит в том, что среда разработки берет на себя большую часть рутины, оставляя программисту работу по созданию диалоговых окон (визуальное проектирование) и процедур обработки событий (событийное программирование) [3, 4].

На первом этапе произведен сбор необходимой информации, а именно: социально-экономическая статистика г. Стерлитамак за период с 2007 по 2016 года.

На втором этапе осуществлен перевод собранных показателей в удобный для анализа формат из *.doc в *.xlsx. Также была создана база данных формата *.xlsx, состоящая из 64-х факторов социально-

экономического положения г. Стерлитамак, способных оказать влияние на преступную обстановку в городе.

После заполнения таблиц данными из официального источника были произведены статистические расчеты в пакете Microsoft Excel, а именно: построение корреляционной зависимости, оценка полученных результатов с помощью t-критерия Стьюдента и F-критерия Фишера по всем моделям, сравнивая их с табличным значением. Далее были выявлены наиболее сильно, умеренно или слабо зависимые факторы с учетом влияния социально-экономических факторов.

Следующим этапом идет разработка программного обеспечения в среде визуального программирования Delphi для анализа и визуализации социально-экономических факторов и выявления зависимостей в криминогенной обстановке города Стерлитамака.

Данный программный продукт автоматизирует процесс выявления корреляционной зависимости между правонарушениями и социальными факторами, с целью предоставления сведений о закономерностях в среде криминогенной обстановки города.

Библиографический список

1. Бородич С.А. Эконометрика: учебное пособие / – 2-е изд., испр. – Мн.: Новое знание, 2004. – 416 с.

2. Гуценко К.Ф., Ковалев М.А. Правоохранительные органы: Учебник для юридических вузов и факультетов. – М.: ЗЕРЦАЛО-М, 2005. – 440 с.

3. Нафикова А.Р., Нафиков В.Р. Разработка приложений баз данных в среде Delphi: Учеб. пособие. – Стерлитамак: СФ БашГУ, 2015. – 95 с.

4. Нафикова А.Р., Нафиков В.Р. Разработка отчетов средствами генератора FastReport в среде Delphi. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – 144 с.

Сведения об авторах

Сафина Камилла Рустамовна, студентка экономического факультета СФ БашГУ. E-mail: scrcami@gmail.com.

Болтачев Эльдар Филаридович, начальник штаба Управления МВД России по г. Стерлитамак, подполковник внутренней службы. E-mail: eboltachiov@mvd.ru.

Нафикова Альбина Ринатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования СФ БашГУ. E-mail: albinabikbaeva@gmail.com.

УДК 51-77

Святкина С.А., Беляева М.Б.

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ ВЕЙВЛЕТОВ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

В статье рассматривается понятие вейвлет-преобразования, а также алгоритм применение непрерывного вейвлет-преобразования в анализе коротких временных рядов.

Ключевые слова: вейвлет, вейвлет-преобразование, карта преобразований, периодичность, тренд, локальные преобразования.

Svyatkina S.A., Belyaeva M.B.

ALGORITHM APPLICATION WAVELETS FOR TIME SERIES FORECASTING

The article discusses the concept of the wavelet transform, and the algorithm application of continuous wavelet transform to analyze the short time series.

Keywords: wavelet, wavelet transform, map changes, the frequency of the trend, local transformation.

В настоящее время существует множество способов анализа и прогнозирования временного ряда. Одной из самых главных проблем при оценке ряда является наличие в нём случайных значений. Наличие шумовой составляющей увеличивает сложность прогнозирования. Существуют разные способы очистки ряда от шумовых компонент. Одним из наиболее эффективных, является применение вейвлет-преобразования.

С помощью вейвлет-анализа удобно решаются многие практические задачи. В основном вейвлет-преобразования используют для анализа и обработки сигналов и функций, которые нестационарны во времени или неоднородны в пространстве, когда в результате должны получиться расчеты которые содержат как сведения о частоте сигнала, так и данные об определенных локальных местах, где частотные составляющие сигнала быстро меняются.

Вейвлет функции базиса позволяют локализовать особенности анализируемых процессов, которые не могут быть выявлены с помощью традиционных преобразований Фурье и Лапласа. Вейвлет представление сигнала на разных уровнях разложения заключается в раз-

© Святкина С.А., Беляева М.Б., 2017

делении функций приближения к сигналу на две части: аппроксимирующую – огрубленнную, с достаточно медленной временной динамикой изменений, и детализирующую – с локальной и быстрой динамикой изменений на фоне плавной динамики, с последующим их разбиением и детализацией на других уровнях декомпозиции сигнала. Это возможно как во временной, так и в частотной области представления сигналов вейвлет разложениями.

Вейвлет-преобразование - преобразование, схожее с преобразованием Фурье с совершенно иной оценочной функцией. Основное различие состоит в том, что преобразование Фурье раскладывает сигнал на составляющие в виде синусов и косинусов, а вейвлет-преобразование использует функции, локализованные как в реальном, так и в Фурье-пространстве. [1] Вейвлет-преобразование одномерного сигнала – это представление его в виде обобщенного ряда Фурье или его интеграла по системе базисных функций $\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{|a|}\right)$, построенных из исходного вейвлета $\psi(t)$,также называемого материнским, обладающего определенными свойствами из-за операций сдвига во времени (b) и изменения временного масштаба (a). Множитель $1\sqrt{a}$ обеспечивает независимость нормы этих функций от масштабирующего числа a.

Смысл непрерывного вейвлет-преобразования состоит в вычислении скалярного произведения (данная величина показывает схожесть двух составляющих) исследуемых данных с различными сдвигами определенного вейвлета на различных масштабах. В результате имеем определенный набор коэффициентов, которые показывают схожесть поведения процесса в данной точке на поведение вейвлета на определенном масштабе.

В общем виде для прогнозирования производится вейвлет-преобразование исходного временного ряда, в результате чего получим набор вейвлет-коэффициентов (вейвлет-спектр) *W(a,b)* в широком диапазоне масштабов.

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \qquad (1)$$

где $a, b \in R$, $a>0$

Используем МНАТ – вейвлет, задаваемый двухкратным дифференцированием функции Гаусса:

$$\varphi(t) = \frac{d^2}{dt^2}e^{-t^2/2} = (1-t^2)e^{-t^2/2} \qquad (2)$$

Преобразование Фурье этого вейвлета имеет вид:

$$\varphi(\omega) = \sqrt{2\pi\omega^2 e^{-\omega^2/2}}$$

Компоненты вейвлет-преобразования модельного ряда *Y(t)* представляют собой сумму шумовой компоненты $Yc(t)$, осциллирующей компоненты $Ys(t)$, и линейного тренда $Y(t)$ [3].

$$Y(t) = Y_ç(t) + Y_s(t) + Y_\tau(t) \quad (3)$$

Компоненты вейвлет-спектра каждого масштаба (экстраполируются в будущий период времени. Причем для каждого из масштабов вейвлет-спектра применяется соответствующее отображение – предиктор *F*.[2]

Для крупномасштабных (низкочастотных) компонентов, которые, как предполагается, ответственны за трендовую часть временного ряда, используется линейная или полиноминальная экстраполяция. В общем виде записываем: $F: W(a,b) \to W_s(a',b')$, (4)

где $W_s(a',b')$ – набор прогнозных вейвлет – коэффициентов.

$$f(t) = \frac{1}{C_v}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(a,b)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{dadb}{a^2},$$

где $c_v = \int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2\,|\omega|^{-1}d\omega$ – нормирующий коэффициент.

Компоненты a', b' выбираются исходя из горизонта прогнозирования. Крупномасштабные вейвлет-компоненты описываются уравнением:

$$Y(t) = a_0 + a_1 t + \frac{a_2}{2}t^2 + \cdots + \frac{a_p}{p!}t^p + \xi \quad (5)$$

Для аппроксимации оказывается возможным применить набор экспоненциальных средних k-того порядка:

$$S^{[k]}(t) = a\sum_{i=0}^{n}(1-a)S^{[k]}(t-\Delta t) \quad (6)$$

где для нахождения $S^{[k]}(t)$ нужно воспользоваться формулой Брауна-Майера: $S^{[k]}(t) = a\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{a_p\alpha\beta}{p!(k-1)}\sum_{j=0}^{\infty}j^p\beta^j\frac{(p-1+j)!}{j!}$.

Для среднемасштабных (среднечастотных) компонент вейвлет-спектра, для которых характерна осцилляция вокруг некоего среднего, можно использовать авторегрессионые методы.

Мелкомасштабные (высокочастотные) составляющие, в которых, как предполагается, основной вклад вносят не поддающиеся прогнозу стохастические процессы, игнорируются. Выбор оптимального сочетания методов прогноза в зависимости от масштаба прогнозируемой вейвлет-компоненты обусловлен тем, что ввиду замены бесконечного интегрирования конечной суммой при численной реализации алгоритма непрерывного вейвлет-преобразования может

происходить отбрасывание наиболее крупномасштабных вейвлет-компонентов. Поэтому вейвлет-прогнозу лучше подвергать детрендированный, отчищенный от шума ряд, из которого дополнительно вычесть нулевую составляющую.

Имея в распоряжении прогнозные значения коэффициентов вейвлет-разложения можно синтезировать прогнозные значения временного ряда путем обратного вейвлет-преобразования (3) .

$$f(t) = \frac{1}{C_\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(a,b)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{dadb}{a^2}, \qquad (7)$$

где $c_\nu = \int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2\,|\omega|^{-1}d\omega$ – нормирующий коэффициент.

Вейвлет-анализ широко в предсказании курсов ценных бумаг, предсказании землетрясений, прогнозирование погодных условий, в прогнозировании социологических процессов и ранней медицинской диагностике. Вейвлеты успешно применяются для очистки сигналов от шумовых компонент и придания им большей гладкости. Алгоритм применения вейвлетов для прогнозирования выглядит следующим образом:

Шаг 1. Необходимо провести декомпозицию исходного ряда с помощью вейвлет-преобразования и разделить его на вейвлет коэффициенты. Вейвлет функция выбирается в зависимости от вида ряда, и от целей которые ставятся перед исследователем.

Шаг 2. Необходимо выделить трендовую составляющую ряда. При использовании вейвлет преобразований в качестве трендовой составляющей ряда берутся коэффициенты аппроксимации, полученные в результате вейвлет разложения данного ряда.

Шаг 3. Необходимо выделить шумовую составляющую исследуемого ряда и удалить её из ряда. Удаление шумовых компонентов заключается в удалении непериодических скачков из коэффициентов детализации. Вейвлет фильтр в данном случае выбирается опытным путём, опираясь на характеристики исходного ряда.

Шаг 4. Необходимо произвести обратное дискретное вейвлет-преобразование на основе коэффициентов аппроксимации и восстановленных коэффициентов детализации.

Шаг 5. Постройка прогноза на основе коэффициентов аппроксимации и восстановленного ряда.

Самыми распространёнными в использовании являются вейвлет «Мексиканская шляпа» и вейвлет Добеши, так как они достаточно

просты в использовании и с их помощью легко восстанавливать сигналы и функции.

Данная методика успешно применяется для прогнозирования курса валютных пар и других динамических процессов с большим влиянием случайных факторов. Исходными данными будут служить каждодневные данные динамики цен на золото (comex.GC, USD за тройскую унцию) за квартал с 27 февраля по 27 мая 2016 года. Выборка состоит из 67 цен на золото и представлена на рисунке 1.

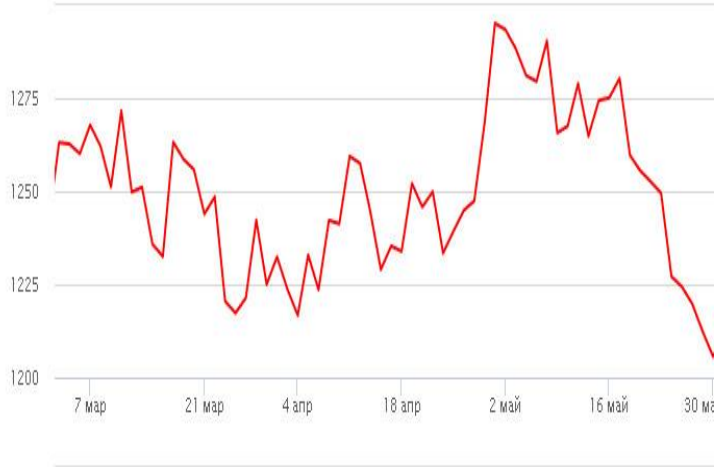


Рис. 1. Цены на золото

На исходном графике видно, у ряда отсутствует чёткая динамика и цикличность. Однако, можно заметить, что для ряда характерны периоды как быстрого роста так и быстрого падения. Ряд можно разделить на две составные части: средним значением (тренд или аппроксимация) – и отклонением от среднего (детали). Расчет коэффициентов аппроксимации и коэффициентов детализации был проведен в пакете Matlab с помощью одномерного дискретного вейвлет преобразования с использованием вейвлета Добеши. Графическое представление вейвлета Добеши десятого порядка и его характеристики представлены на рисунке 2.

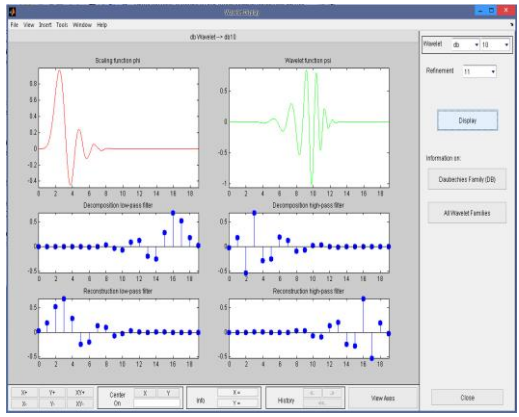


Рис. 2. Вейвлет Добеши

Далее был проведен одномерный дискретный анализ ряда с помощью вейвлета Добеши 10. и числовые характеристики компонентов ряда которые показаны в таблице 1.

Таблица 1.

Расчетные значения компонент ряда

Характеристика	Значение
Среднее значение	1249
Медиана	1246
Мода	1246
Максимум	1297
Минимум	1214
Диапазон	82.73
Стандартное отклонение	20.06
Медианное абсолютное отклонение	15.02
Среднее абсолютное отклонение	6.81

Аналогично были рассмотрены коэффициенты детализации первого уровня. В большинстве случаев коэффициенты детализации первого уровня отвечают за шумовую составляющую ряда. После того как проведено вейвлет преобразование исходного ряда и получены коэффициенты аппроксимации и детализации необходимо очистить данный ряд от шумовой составляющей. Для этого был проведен анализ данных временного ряда и построена его спектрограмма. В ре-

зультате удаления шумовых компонентов был получен восстановленный ряд (рисунок 3).

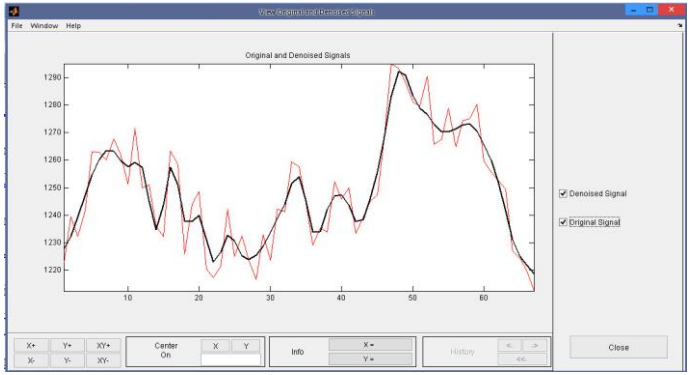


Рис. 3. Восстановленный ряд

Сравнение части значений исходного и восстановленного ряда показало, что ошибка составила не более 3 %, что свидетельствует о хорошем качестве модели.

Далее строится краткосрочная прогнозная модель на основе коэффициентов аппроксимации и восстановленного ряда. В качестве регрессионной модели выбрано уравнение

$$y = 0{,}2424x^3 - 6{,}9216x^2 + 51{,}051x + 1707{,}1\,.$$

Поиск коэффициентов уравнения регрессии осуществлялся в MS Excel. Коэффициент детерминации модели $R^2 = 0{,}8752$. На основании регрессионной модели были получены прогнозные данные, которые сравниваются с уже известными значениями.

Таблица 3.

Сравнение прогнозных данных и действительных значений

Дата	Прогноз	Фактические значения	Ошибка %
31.06.16	1220,765	1215	0,474486
1.07.16	1224,52	1214	0,866557
2.07.16	1232,275	1213	1,589068
3.07.16	1244,623	1246	0,11053
6.07.16	1262,154	1247	1,215221
7.07.16	1285,46	1246	3,166934
8.07.16	1315,133	1264	4,045332

Данная модель не учитывает долгосрочную динамику цен, и показывает динамику только на коротком промежутке времени. Чем дальше прогнозные данные находятся от исходных, тем больше становится ошибка прогноза. Но при анализе биржевых цен в большинстве случаев не обнаруживается цикличности, поэтому предсказать будущие значения достаточно сложно. Однако существуют достаточно эффективные методы которые позволяют отделить случайные значения и выделить периодическую составляющую. Вейвлет-преобразования являются одним из самых удобных и точных методов, и часто применяются для декомпозиции временных рядов

Библиографический список

1. Святкина С.А., Беляева М.Б. Прогнозирование временных рядов с помощью вейвлет-преобразований // Материалы I Всерос. молодеж. науч.-прак. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики, механики и комп. моделирования». – Стерлитамак: РИО СФ БашГУ, 2016. – С. 146–152.

2. Переберин А.В. О систематизации вейвлет-преобразований // Вычислительные методы и программирование, 2002.– Т. 2. С. 15–40.

3. Слинькова Н.В. Снижение рисков инвестиционной деятельности на основе вейвлет-анализа и прогнозирования коротких временных рядов. – Воронеж, 2007.– 163 с.

Сведения об авторах

Святкина Светлана Анатольевна, магистрант Стерлитамакского филиала БашГУ. E-mail: Svyetlanka@rambler.ru.

Беляева Марина Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент Стерлитамакского филиала БашГУ. E-mail: beljaeva_mb@rambler.ru.

УДК 517.95

Сидоров С.Н.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Рассмотрена начально-граничная задача для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением на линии изменения типа. Установлен критерий единственности решения задачи. Решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного параболо-гиперболического типа, начально-граничная задача, спектральный метод, единственность, существование, ряд, малые знаменатели, равномерная сходимость.

Sidorov S.N.

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN INHOMOGENEOUS PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH DEGREE DEGENERACY

We consider the initial-boundary value problem for a nonhomogeneous equation of mixed parabolic-hyperbolic type with power degeneracy on the line of change of type. A criterion for the uniqueness of the solution of the problem is established. The solution is built in the form of a series in the system of eigenfunctions corresponding one-dimensional spectral problem.

Key words: equation of mixed parabolic-hyperbolic type, initial-boundary problem, spectral method, uniqueness, existence, number, small denominators, uniform convergence.

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = F(x,t) = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - b^2 t^n u = F_1(x,t), & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2 (-t)^m u = F_2(x,t), & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) \mid 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$, где $n > 0$, $m > 0$, $b \geq 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа, $F_i(x,t)$, $i = 1,2$, – известные функции.

© Сидоров С.Н., 2017 г.

Задача. *Найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \quad (2)$$

$$Lu(x,t) = F(x,t), \ (x,t) \in D_- \cup D_+; \quad (3)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ -\alpha \le t \le \beta; \quad (4)$$

$$u(x,-\alpha) = 0, \ 0 \le x \le l, \quad (5)$$

где $F_1(x,t)$, $F_2(x,t)$ – заданные достаточно гладкие функции, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

Отметим, что задача (2)–(5) для однородного уравнения (1), т.е. когда $F_i(x,t) \equiv 0$, $i = 1,2$, была изучена в работах [1–4] в прямоугольной области D при $l = 1$, $n \ge 0$, $m \ge 0$, $b \ge 0$. В работах [5–7] для однородного уравнения (1) со степенным вырождением на переходной линии и с вырождающейся гиперболической частью уравнения изучены нелокальные задачи, в которой вместо условия (5) задано нелокальное условие, которое связывает значения искомого решения или его производных по нормали на противоположных сторонах прямоугольной области, принадлежащих разным типам уравнения. Аналогичная задача (2)–(5) для уравнения смешанного типа (1) при $n = 0$ была исследована в работе [9].

Необходимость исследования задачи (2)–(5) для неоднородного уравнения (1) возникает в связи с решением проблемы Гельфанда И.М. [8], т.е. построением в явном виде решения задачи, и изучением обратных задач для уравнения (1) по отысканию сомножителей правой части $F_i(x,t) = f_i(x)g_i(t)$, $i = 1,2$, либо зависящих от x, либо зависящих от t. В работах [10, 11] были изучены обратные задачи по отысканию функций $u(x,t)$ и $f_i(x)$, когда $g_i(t) \equiv 1$.

Решение задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \mu_k x, \ \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad (6)$$

где

$$T_k(t)=\begin{cases} a_k e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)} + \\ \qquad + \int\limits_0^t g_{1k}(s)\, e^{-\lambda_k^2 (t^{n+1}/(n+1) - s^{n+1}/(n+1))}\, ds, \ t>0, \\ a\gamma_{-1/(2q)}(k)\sqrt{-t}\, J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) - \\ - g_{1k}(0+0)\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{-t}\, J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) + W_k(t), \qquad t<0, \end{cases} \tag{7}$$

$$a_k = \frac{g_{1k}(0+0)\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha}\, J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q) - W_k(-\alpha)}{\Delta(k)}, \ \lambda_k = \sqrt{b^2+\mu_k^2},$$

$$W_k(t) = \frac{\pi}{2q\sin\dfrac{\pi}{2q}}\sqrt{-t}\, J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q)\int\limits_t^0 g_{2k}(s)\sqrt{-s}\, J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\, ds -$$

$$- \frac{\pi}{2q\sin\dfrac{\pi}{2q}}\sqrt{-t}\, J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q)\int\limits_t^0 g_{2k}(s)\sqrt{-s}\, J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q)\, ds,$$

$$g_{ik}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l F_i(x,t)\sin\mu_k x\, dx, \ i=1,2,$$

$$\gamma_{\pm 1/(2q)}(k) = \pm\frac{1}{2q}\Gamma\left(\pm\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{\pm 1/(2q)}, \quad q=\frac{m+2}{2},$$

$J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν, при условии, что при всех $k\in\mathrm{N}$ выражение

$$\Delta(k) = \gamma_{-1/(2q)}(k)\sqrt{\alpha}J_{-1/(2q)}(p_k\alpha^q) \neq 0,$$

Установлен следующий критерий единственности решения задачи (2)–(5).

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2)–(5)*, то оно единственно только тогда, когда при всех* $k\in\mathrm{N}$ *выполнены условия* $\Delta(k)\neq 0$.

При обосновании сходимости построенного ряда возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость этого рядов. В связи с этим для доказательства равномерной сходимости ряда установлена оценка об отделенности от нуля малого знаменателя с соответствую-

щей асимптотикой, которая позволила доказать существование регулярного решения, т.е. в классе функций (2) и (3).

Лемма. *Если выполнено одно из условий: 1)* $\alpha_{ql} = \alpha^q/(ql)$ *– любое натуральное число; 2)* $\alpha_{ql} = p/t$ *– любое дробное число, где* p *и* t *– взаимно-простые натуральные числа и* $r/t \neq (3q-1)/(4q)$ *при* $r = \overline{1,t-1}$*, то существуют положительные постоянные* $k_0 \in \mathrm{N}$ *и* C_0*, такие, что при любых* $k > k_0$ *и фиксированных* $\beta > 0$, $b \geq 0$, $m > 0$ *и* $n > 0$ *справедлива оценка*

$$|k^{\lambda}\Delta(k)| \geq C_0 > 0,\ \lambda = 1/2 - 1/(2q).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы и* $F_1(x,t) \in C(\overline{D}_+) \cap C_{x,t}^{2+\nu,0}(\overline{D}_+)$, $1-1/q < \nu < 1$, $F_1(0,t) = F_1(l,t) = 0$, $F''_{1xx}(0,t) = F''_{1xx}(l,t) = 0$, $0 \leq t \leq \beta$; $F_2(x,t) \in C(\overline{D}_-) \cap C_{x,t}^{2+\nu,0}(\overline{D}_-)$, $F_2(0,t) = F_2(l,t) = 0$, $F''_{2xx}(0,t) = F''_{2xx}(l,t) = 0$, $-\alpha \leq t \leq 0$. *Тогда, если* $\Delta(k) \neq 0$ *при* $k = \overline{1,k_0}$*, то существует единственное решение задачи* (2) – (5) *которое определяется рядом* (6)*; если* $\Delta(k) = 0$ *при некоторых* $k = k_1, k_2, \ldots, k_m \leq k_0$*, то задача* (2)–(5) *разрешима только тогда, когда выполнены условия*

$$g_{1s}(0+0)\gamma_{1/(2q)}(s)\sqrt{\alpha}\, J_{1/(2q)}(p_s\alpha^q) - W_s(-\alpha) = 0,\ s = k_1, k_2, \ldots, k_m,$$

и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \ldots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right) T_k(t)\sin\mu_k x + \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_s T_s(t)\sin\mu_s x,$$

где в последней сумме s *принимает значения* $k_1, k_2 \ldots, k_m$; $T_s(t)$ *здесь определяется по формуле* (7)*, где* k *надо заменить на* s *и* a_s *– произвольная постоянная отличная от нуля; если в конечных суммах в правой части верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.*

Библиографический список

1. Сабитов К.Б., Рахманова Л.Х. Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямо-

угольной области // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44. – № 9. – С. 1175–1181.

2. Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. – 2009. – Т. 86. – Вып. 2. – С. 273–279.

3. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии // Дифференц. уравнения. – 2011. –Т. 47. – № 1. – С. 1–8.

4. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. – М.: Наука, 2016. 272 с.

5. Сидоров С.Н. Нелокальная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Доклады АМАН. – 2012. – Т. 14. – № 3. – С. 34–44.

6. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50. – № 3. – С. 356–365.

7. Сидоров С.Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением // Известия вузов. Математика. – 2015. – № 12. – С. 55–64.

8. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. – 1959. – Т. XIV. – Вып. 3. – С. 3–19.

9. Сидоров С.Н. Начально-граничная задача для неоднородного уравнения смешанного типа с вырождающейся гиперболической частью // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы V Всерос. науч.-практ. конф., приуроченной к 110-летию со дня рождения А.Н. Тихонова. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ. – 2016. – С. 112–117.

10. Сидоров С.Н. Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2014. – Вып. 37. – № 25 (196). – С. 45–57.

11. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условие // Известия вузов. Математика. – 2015. – № 1. – С. 46–59.

Сведения об авторе

Сидоров Станислав Николаевич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа СФ БашГУ, старший научный сотрудник Стерлитамакского филиала Института стратегических исследований Республики Башкортостан. E-mail: stsid@mail.ru.

УДК 004.94

Симонова И.А., Хасанова С.Л.

ВИРТУАЛЬНАЯ УЧЕБНАЯ ЛАБОРАТОРИЯ ПО ХИМИИ «ПОЛУЧЕНИЕ, СОБИРАНИЕ И РАСПОЗНАВАНИЕ ГАЗОВ»

В работе рассматривается актуальность создания средств электронного образования и описывается структура виртуальной учебной лаборатории по химии «Получение, собирание и распознавание газов», предназначенная для учащихся девятых классов средней общеобразовательной школы.

Ключевые слова: электронное образование, виртуальная лаборатория, демонстрация опытов.

Simonova I.A., Khasanova S.L.

VIRTUAL LABORATORY IN CHEMISTRY «THE ACQUISITION, COLLECTION AND DETECTION OF GASES»

This paper examines the relevance of the tools of e-learning and describes the structure of the virtual laboratory of chemistry «Receiving, collection and detection of gases», is designed for students in ninth grade of secondary school.

Key words: e-learning, virtual laboratory, demonstration experiments.

Концепция усовершенствования российского образования предусматривает развитие электронного образования и его использование в учебном процессе, особенно на старшей ступени обучения в школе, что позволило бы увязать разнообразные знания в единую систему. Так же в последние годы значительную актуальность приобрела проблема познавательной мотивации учащихся к изучению учебных предметов, созданию условий для более осознанного профессионального самоопределения школьников. Во многом, указанные задачи можно решить за счет правильного использования в учебном процессе электронно-образовательных ресурсов.

Для того, чтобы у ребенка возник интерес к сотрудничеству с компьютером и в процессе этого развивалась устойчивая познавательная мотивация необходимо создание условий полноценного деятельностного подхода к изучаемому явлению. Это возможно лишь в случае, если электронный ресурс соответствует критериям высокого

© Симонова И.А., Хасанова С.Л., 2017

уровня интерактивности, предполагающего полноценное взаимодействие учащегося с образовательной средой, моделирующей объекты и процессы реального мира [2]. Одним из видов такого электронного ресурса является создание виртуальной учебной лаборатории, с помощью которой можно проводить различные эксперименты, анализировать и сравнивать полученные результаты. При грамотной разработке и отладке программного обеспечения виртуальной лаборатории достигается повышение эффективности учебного процесса [1].

Разработанная виртуальная учебная лаборатория по химии «Получение собирание и распознавание газов» предназначена для учащихся девятых классов средней образовательной школы в качестве учебно-методического поддержки раздела «Свойства неметаллов и их соединений». Методология разработки аналогична работам [3–5].

В работе предусмотрена демонстрация получения, собирания и распознавания газов с помощью виртуальной образовательной среды. Схема структуры виртуальной лаборатории выглядит следующим образом (рис. 1):

Рис. 1. Схема виртуальной лаборатории

Главная страница приложения содержит четыре интерактивные кнопки, при нажатии на которые осуществляется переход к одной из лабораторных работ (рис. 2). Интерактивность реализуется с помощью метода скриптов на языке программирования ActionScirpt.

Рис. 2. Страницы для управления виртуальной лабораторией

Приложение содержат следующие лабораторные установки:

1. Виртуальная лабораторная установка «Получение собирание и распознавание аммиака» предназначена для получения аммиака при нагревании смеси соли хлорида аммония и гидроксида кальция: $2NH_4Cl + Ca(OH)2 = 2NH_3\uparrow + CaCl_2 + H_2O$ (рис. 3).

2. Виртуальная лабораторная установка «Получение собирание и распознавание водорода» предназначена для получения водорода при взаимодействии цинка и соляной кислоты: $Zn + 2HCl = ZnCl + H_2\uparrow$.

3. Виртуальная лабораторная установка «Получение собирание и распознавание кислорода» предназначена для получения кислорода при нагревании кристаллического перманганата калия: $2KMNO_4 = KMnO_4 + MnO_2 + O_2\uparrow$.

4. Виртуальная лабораторная установка «Получение собирание и распознавание углекислого газа» предназначена для получения углекислого газа при взаимодействии разбавленной соляной кислоты и карбоната кальция (мрамора): $CaCO_3 + 2HCl = CaCl + CO_2\uparrow + CaCl_2 + H_2O$.

Рис. 3. Лабораторная установка распознавание аммиака

Перед просмотром демонстрационных опытов, которые реализуются анимацией, предлагаются формулировки задач с полными названиями химических веществ (рис. 4).

Рис. 4. Страница постановки задачи

Далее учащийся может либо перейти к просмотру получения, собирания и распознавания газов, нажав на кнопку «Просмотр», либо перейти к построению математической модели (рис. 5), которая позволяет учащимся самостоятельно выбирать параметры реакций, используя динамическое поле ввода и интерактивную кнопку для расчета.

Рис. 5. Страница построения математической модели

Таким образом, была разработана виртуальная учебная лаборатория по химии, которая является электронно-образовательным ресурсом нового поколения, образуя интерактивную образовательную среду.

Библиографический список

1. Мехтиев А.Д., Белик Г.А., Калиаскаров Н.Б. Актуальность создания виртуального лабораторного комплекса в учебном процессе // G.Global. – 2017.
2. Морозов М.Н., Цвирко В.Э. Электронные образовательные ресурсы нового поколения по химии // Образовательные технологии и общество. – 2009. – № 1 (том 12).– С. 298–309.
3. Хасанова С.Л., Девяткин Е.М., Чиганова Н.В. Компьютерная модель виртуальной химической лаборатории // Современные наукоемкие технологии, 2016. – № 9 (ч. 2). – С. 360–364.
4. Хасанова С.Л., Симонова И.А. Виртуальная учебная лаборатория по химии «Качественные реакции на ионы» // V Всероссийская научно-практическая конференция «Математическое моделирование процессов и систем». – 2016.– Ч. 1.– С. 227–232.
5. Хасанова С.Л., Симонова И.А. Компьютерная модель виртуальной биологической лаборатории по разделу «Цитология» // Современные наукоемкие технологии. – 2016.– № 9 (ч. 1).– С. 89–92.

Сведения об авторах

Симонова Ирина Андреевна, студентка СФ БашГУ. E-mail: ira_simonovaa@mail.ru.

Хасанова Светлана Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: hasanovasl@rambler.ru.

УДК 372.851

Смакова Ф.Ф., Тарарухина Н.Н.

К ВОПРОСУ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПРОЦЕНТЫ В ШКОЛЕ

В работе рассмотрен вопрос изучения процентов в школьном курсе математики, приведены аспекты совершенствования методики преподавания.

Ключевые слова: математика, решение задач, проценты, методика преподавания.

Smakova F.F, Tararukhina N.N.

TO THE QUESTION OF TRAINING IN THE SOLUTION OF TASKS FOR PERCENT AT SCHOOL

The article considers questions of teaching for interest studying in a school course of mathematics, aspects of perfection of a teaching technique are resulted.

Keywords: mathematics, problem solving, percentages, teaching methods.

Знание и понимание процентов является одним из ключевых моментов в развитии практических способностей и в умении решать экономические задачи. Вопросы, связанные с процентами, делают курс практико-ориентированным, и показывают учащимся, что приобретаемые ими в школе математические знания применяются и в реальной жизни. Значительную роль играет содержание задач. Задачи должны быть приближены к реальности и к жизненному опыту учеников.

Разработка собственной авторской методики преподавания темы «Проценты» в средней школе заключается в анализе и переработке существующих из различных источников, с извлечением из них наилучшего и добавлением собственного виденья.

Сегодня процент – это частный вид десятичных дробей, сотая доля целого, принимаемого за единицу.

Проценты – это аналог обыкновенным дробям (1/100), то есть с процентами выполняются все действия, выполняемые с обыкновенными дробями: сложение, вычитание, умножение, деление.

При обучении решению задач на проценты учащиеся знакомятся с разнообразными способами решения задач. Школьник овладевает

© Смакова Ф.Ф., Тарарухина Н.Н., 2017

разнообразными способами рассуждения, пополняет свой запас приемов и методов.

Процесс решения задачи состоит из следующих пунктов:

– обнаружение проблемной ситуации;

– постановка задачи: выявление и более или менее строгое определение исходного (данного), его элементов и отношений между ними, и требуемого (цели);

– нахождение решения задачи.

Задачи на проценты делятся на несколько типов. И каждый тип задач имеет свой алгоритм решения. Рассмотрим основные типы задач на проценты.

Первый тип: нахождения процента от числа.

Правило для нахождения процента от числа:

Для того, чтобы найти p% от числа a, надо:

1) перевести p% в десятичную дробь $\frac{p}{100}$;

2) умножить число a на полученную десятичную дробь – $a \cdot \frac{p}{100}$.

Второй тип: нахождение числа по его проценту.

Правило для нахождения числа по проценту:

Для того, чтобы найти все число от известной части b и числу соответствующих процентов p, надо:

1) перевести p% в десятичную дробь $\frac{p}{100}$;

2) разделить число b на полученную десятичную дробь $b : \frac{p}{100}$.

Третий тип: нахождение процентного отношения двух чисел.

Правило для нахождения процентного отношения двух чисел:

Для того, чтобы найти процент числа a от числа b, надо:

1) дробь $\frac{a}{b}$ умножить на 100.

Кроме решения трех основных видов задач на проценты, рассмотрим решения задач на «сложные» проценты: «концентрацию» и «процентное содержание», то есть задачи о составлении смесей и сплавов. Задачи, связанные с понятиями «концентрация» и «процент-

ное содержание», изучаются в старших классах и, как правило, являются задачами на составление уравнений.

Для решения задач на смеси и сплавы, на концентрацию необходимо владение такими темами, как дроби и проценты, составление уравнений и их систем. Эти задачи решаются арифметически, применением линейного уравнения и их систем. При решении принимаются следующие основные допущения:

– все получающиеся сплавы или смеси однородны;

– при слиянии двух растворов получается смесь, объем которой равен их сумме;

– при слиянии двух растворов масса смеси равняется сумме масс, составляющих ее компонентов.

Нужно знать понятия «объем концентрации» и «объем процентного содержания», «массовая концентрация», «процентное содержание вещества».

Отметим два подхода к изучению темы процентов в средней школе.

Первый подход. Изучение темы обособлено, без опоры на дроби. Нахождение нескольких процентов от числа осуществляется в два действия. Обучение идет от частного к общему.

Второй подход. Задачи на проценты осваиваются как частный случай задач на дроби и все приемы решения переносятся на них, то есть изучение идет от общего случая – задач на дроби, к частному.

В большинстве современных учебников реализован второй подход.

По данной теме применяемо дифференцированное обучение: задачи делятся по уровню сложности.

Как правило, знакомство с темой и её изучение сосредоточено в курсе 5–6 классов. Такие рамки не учитывает возрастные возможности учащихся в формировании необходимых практических умений в работе с процентами.

В последующих учебных годах тема процентов встречается в выполнении упражнений и заданий на другие темы школьной программы математики. Например, в учебнике А.Г. Мордковича «Алгебра. 9 класс. Часть 1» в теме «Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций» приведена и разобрана следующая задача:

«Мастер и учений планировали сообща выполнить некоторую работу за 6 дней. Сначала за дело взялся ученик. Выполнив 20 % задания, он заболел. Остальная работа пришлась на долю мастера. В итоге выполнение задания растянулась на 11 дней. За сколько дней

мог его выполнить мастер и за сколько дней ученик, действуя в одиночку, если известно, что и то и другое количество дней выражаются целыми числами» [1].

В задачнике также имеются схожие задачи в этой же теме для самостоятельного решения. Однако, данная задача не является задачей на процент, она лишь касается темы процентов. Кроме того, такие задачи не является обязательными для решения внутри темы.

Тема «Проценты» разворачивается по спирали и изучается в несколько этапов с 5 по 9 классы. В каждом новом учебном году проценты изучаются на новом уровне, добавляются новые типы задач и, соответственно, способы и методы их решения. В 10–11 классах повторение темы процентов необходима, так как в заданиях единого государственного экзамена и базового, и профильного уровня задачи на проценты также присутствуют. Задачи на проценты решаются не только на уроках математики, проценты встречаются и на уроках физики, и химии. Таким образом, прочное освоение темы на начальных этапах как основа дальнейшей работы учащимися неоспоримо.

Исходя из вышесказанного, отметим, что совершенствование методики преподавания темы процентов в средней школе является требованием наилучшей подготовки школьников к взрослой жизни. Для этого необходимо больше времени уделить теме не только на этапе ознакомления, то есть в 5–6 классах, но и в старших классах и не только в рамках других тем. Рассмотрим, например, задачу № 17 из демоверсии ЕГЭ профильного уровня 2017 года:

«15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r целое число;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблице 1.

Таблица 1.

Исходные данные

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение *r*, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.». Такую задачу решит не каждый выпускник, однако, подобные задачи, а именно задачи на проценты экономического характера возможно ввести в курс математики, начиная с 10 класса. А в 6–9 классах решать более широкий спектр задач различного характера, выполняемые в несколько действий.

Понятие процента широко используется как в реальной жизни, так и в различных областях науки. Поэтому проценты являются обязательной частью школьной программы по математике. Учащиеся должны научиться решать разные задачи на проценты, представлять их в виде десятичных и обыкновенных дробей.

Библиографический список

1. Мордкович А.Г. Алгебра 9 кл.: В 2-х частях. Ч. 1: Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2009. – 240 с.

Сведения об авторах

Смакова Фаниля Фиргатовна, стажер программы профессиональной переподготовки «Педагогическая деятельность по направлению «Математика» СФ БашГУ. E-mail: fanilyafanilya@mail.com.

Тарарухина Наталья Николаевна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики обучения математике СФ БашГУ. E-mail: n245261@mail.ru.

УДК 541.64.11

Смирнов П.С. , Гиззатова Э.Р.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ КОНВЕРСИОННЫХ КРИВЫХ РАДИКАЛЬНОЙ ПОЛИМЕРИЗАЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В работе рассмотрено использование метода Хука-Дживса для минимизации функционала и предложены полиномиальные функции аппроксимации конверсионных кривых на примере модели процесса радикальной полимеризации диенов.

Ключевые слова: аппроксимация полиномиальные функции, кинетические задачи, методика, алгоритм, полимеризационные процессы.

Smirnov P.S., Gizzatova E.R.

ON APPROXIMATION OF CONVERSION CURVES OF RADICAL POLYMERIZATION BY POLYNOMIAL FUNCTIONS

The paper discusses the use of the Hook-Jeeves method to minimize the functional and proposes polynomial functions for approximating the conversion curves using the model of the radical polymerization of dienes as an example.

Keywords: approximation of polynomial functions, kinetic problems, methodology, algorithm, polymerization processes.

Процессы радикальной полимеризации диеновых углеводородов имеют свои особенности, связанные, в частности, с явлением автокатализа в ходе процесса. Такое свойство полимеризационной системы отражается в поведении различных кривых мономера. Одно из ярких проявлений автокатализа – кривая расходования мономера в системе и её «s»-образный вид.

Как правило, подобный вид конверсионной кривой можно описать сигмоидой. С целью определения функционального вида сигмоиды был проведен ряд статистических расчетов [1], который показал, что одним из подходящих вариантов является следующий:

$$\frac{a}{1+exp(-b(t-c))} = \frac{a}{1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b(c-t))^k}{k!}} \qquad (1)$$

© Смирнов П.С. , Гиззатова Э.Р., 2017

где *a, b, c*– неизвестные числовые параметры.

Применяя численный метод Хука-Дживса для поиска неизвестных коэффициентов при минимизации функционала соответствия расчетных (f(t)) и экспериментальных (ucalc) данных:

$$Z(a,b,c) = \int \left(f(t) - u^{calc} \right)^2 \to 0 \qquad (2)$$

для каждой конверсионной кривой может быть получен лишь один набор коэффициентов. Ниже в т. 1 приведены статистические расчеты коэффициентов *a, b, c* и ошибки *E*(минимумы функционала (2)).

Таблица 1.

Значения коэффициентов *a, b, c* для функции (1)

Номер кривой	a	b	c	$E_1 \cdot 10^{-2}$
1	0,97	0,007	907	14,78
2	1,01	0,011	485	10,50
3	2,64	0,013	534	12,53
4	1,12	0,021	252	13,47
5	1,10	0,039	206	19,15
6	1,31	0,033	135	5,12

Исходя из таблицы 1, можно выявить ряд закономерностей для каждого коэффициента:

– коэффициент *a*, как правило, колеблется около 1;

– коэффициент *b* возрастает с увеличением температуры (нумерация кривых соотносится с ростом температуры);

– коэффициент *c* падает с увеличением температуры.

Соотношение экспериментальных и расчетных кривых в этом случае будут колебаться в пределах 20 % ошибки, что показано на рис. 1, причем показанное поведение верно для всех случаев, предложенных в таблице 1.

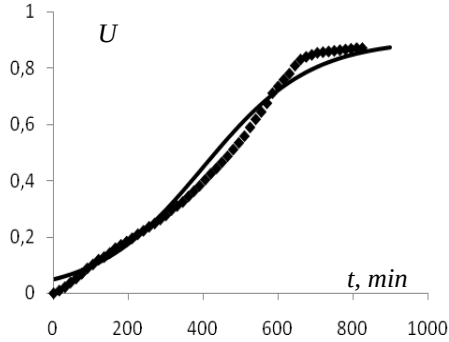


Рис. 1. Соответствие конверсии, полученной расчетным (сплошная линия) и экспериментальным (точечная линия) путем, для процесса полимеризации метилметакрилата на системе азоизобутиронитрил при концентрации инициатора, равной 0,001 моль/л и времени воздействия 50 мин

Однако, по рис. 1 видно, что использование логистической кривой (1) до конверсии в 40 % имеет наибольшие расхождения с экспериментальными данными. В связи с этим, возникает необходимость более подробного исследования и подбора оптимальной функции или набора зависящих функций при аппроксимации конверсии от начала реакции до 40 %.

Применяя метод последовательных приближений, при исходной аппроксимации конверсии линейной функцией, был выявлен набор наиболее подходящих функций. При этом, выбор функций основывался на условии, что их значения не выходят за пределы 10 % от существующих экспериментальных данных (то есть значения подбираемых функций лежат от 90 % до 110 % по конверсии мономера).

Тогда, промежуток от начала процесса до времени, когда конверсия достигает 40 %, удовлетворительно аппроксимируется функцией

$$y_1(t) = \alpha \cdot t \text{ на промежутке } [0{,}0;0{,}14] \quad (3)$$

$$y_2(t) = \alpha \cdot t^2 + \alpha^2 \cdot t = y_1(t) \cdot (\alpha + t) \text{ на промежутке } [0{,}14;0{,}40] \quad (4)$$

При построении конверсионных кривых, минимум функционала (2), где в качестве расчетной кривой была использована совокупность функций вида (1), (3), (4), приведен в таблице 2.

Таблица 2.

Соответствие экспериментальных кривых со значениями коэффициента α

Номер кривой	α	$E_2 \cdot 10^{-2}$
1	0,30	6,87
2	0.27	9,91
3	0.31	1,05
4	0.34	8,63
5	0.32	1,91
6	0.34	3,87

По рис. 2 видно, что при совокупном использовании функций (сплошная линия) происходит уменьшение погрешности отклонения и расчетная линия находится в допустимых пределах. Явный переход с функции (3) на функцию (4) отмечен прямолинейным отрезком. Заметим, что в каждом случае конверсионной кривой длина отрезка индивидуальна, задача сглаживания этого участка другими видами функций не ставилась.

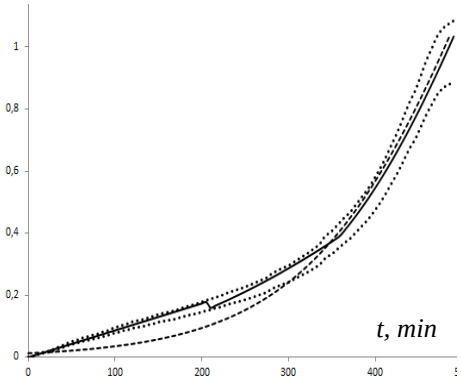


Рис. 2. Графики конверсионных кривых при времени полимеризации 60 мин и концентрации инициатора 0,001 моль/л: точки – границы изменения экспериментальной конверсии мономера в пределах 10 %; пунктир – использование только функции (1); сплошная – совместное использование (1), (3), (4)

В целом, обобщая вышеизложенное, можно отметить, что для аппроксимации конверсионной кривой мономера необходимо разбиение временного промежутка на более мелкие участки, однако увеличение их количества приводит к возрастанию суммарной погрешности, при этом теряется физико-химический смысл выбора аппроксимирующих функции. Поэтому, предложенный в работе набор функций для описания конверсии мономера от времени, позволяющий находиться в пределах десятипроцентного отклонения от экспериментальной кривой, может быть использован для прогнозных оценок ее поведения.

Библиографический список

1. Янбеков М.С., Гиззатова Э.Р., Спивак С.И. Применение логистической кривой для моделирования конверсии мономера в процессах радикальной полимеризации диенов / Сб. тр. IX междунар. конф. «ПМТУКТ-2016» – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2016. – С. 420–422.

Сведения об авторах

Смирнов Павел Сергеевич, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Российская Федерация, магистрант 2-го года обучения факультета математики и информационных технологий, e-mail: mini_tv@mail.ru.

Гиззатова Эльвира Раисовна, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, e-mail: makella@rambler.ru.

УДК 372.851

Солощенко М.Ю.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ MICROSOFT EXCEL ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ГРАФИКОВ

В статье раскрывается применение электронных таблиц MICROSOFT EXCEL в школьном курсе математике при изучении различных функций и их графиков.

Ключевые слова: электронные таблицы MICROSOFT EXCEL, функции, графики функций

Soloschenko M.Y.

USE OF THE ELECTRONIC SPREADSHEETS MICROSOFT EXCEL IN CASE OF THE STUDY OF FUNCTIONS AND THEIR DIAGRAMS

In article application of the electronic spreadsheets MICROSOFT EXCEL in school course to mathematics reveals in case of a study of different functions and their diagrams.

Keywords: electronic spreadsheets MICROSOFT EXCEL, functions, function graphs

Линия функций занимает важное значение в школьном курсе математики. Поэтому значительная часть курса алгебры основной школы посвящено именно их изучению. Действительно, функции имеют огромное прикладное значение. Многие из физических, химических, биологических, экономических процессов, без которых немыслима жизнь, представляют собой функциональные зависимости.

Для оптимального освоения данной темы на уроках математики необходимо большое количество иллюстративного материала, который не всегда имеется в распоряжении учителя. А его изображение на доске требует существенных затрат времени и нередко очень схематично. В подобном случае огромную помощь могут сыграть информационные технологии, позволяющие очень быстро создать любое количество графиков различных функций, а также рассмотреть значительное количество примеров изменения графиков в зависимости от параметров.

Действительно, в последнее время ни у кого не вызывает сомнения тот факт, что использование информационных технологий в процессе обучения различным предметам школьного курса эффективно.

© Солощенко М.Ю., 2017

Главное, чтобы учитель так построил учебно-воспитательный процесс, чтобы применение различных программ, электронных образовательных ресурсов, презентаций и т.п. органично сочеталось с его структурой.

На сегодняшний день существуют различные программы, которые можно использовать при изучении различных функций и их графиков (Advanced Grapher [2], Microsoft Excel, «Наглядная математика» и др.). В данной статье остановимся на одной самых распространенных и доступных программ каждому учителю математики – это Microsoft Excel (MS Excel). Благодаря ее применению, можно изучать свойства различных функций и строить их графики, а также преобразовывать графики функций. Электронные таблицы MS Excel входят в полный пакет офисных программ Microsoft, что позволяет учителю на любом компьютере применять их на уроках математики, а также ученикам при выполнении домашних заданиях.

К примеру, MS Excel 2003 содержит 320 встроенных функций, т.е. готовых формул, которым присвоены уникальные имена. Для удобства функции в Excel 2003 разбиты по категориям (математические, финансовые, статистические и т.д.). Каждая из функций содержит три неизменных элемента: знак равенства (признак того, что в данную ячейку введена функция или формула, а не данные какого-либо другого типа); имя функции (характеризует тип выполняемых операций); аргументы (значения, на основе которых выполняются вычисления).

Для примера приведем некоторые из функций, которые можно использовать в процессе обучения математике:

СУММ(B2:B18) – вычисление суммы числовых значений диапазона ячеек начиная с B2 до B18;

СУММЕСЛИ(B2:B18;”>5”) – вычисление суммы чисел, больших 5, из диапазона ячеек B2:B18;

СРЗНАЧ(B2:B18) – вычисление среднего значения для диапазона ячеек B2:B18;

МАКС(B2:B18) – вычисление максимального значения из диапазона ячеек B2:B18;

МИН(B2:B18) – вычисление минимального значения из диапазона ячеек B2:B18;

СТЕПЕНЬ (B1; A5) – вычисление значения степени с основанием B1 и показателем степени A5;

КОРЕНЬ(B1) – вычисление значения квадратного корня; и др.

Рассмотрим примеры построения и преобразования графиков функций.

Пример 1. Построить график функции $\sqrt{x}-\ln(x+1)$, где $0<x<4$, с шагом 0,25.

Выделим основные шаги по построению данного графика.

1. В диапазон ячеек A2:A18 введите значение переменной x от 0 до 4 с шагом 0,25.

2. В ячейку B2 введите формулы: =КОРЕНЬ(A2)-LN(A4+1).

3. Выделите ячейку B2, установите указатель мыши на маркере заполнения этого диапазона и протащите его вниз так, чтобы заполнить диапазон B2:B18.

4. Выделить диапазон ячеек A2:B18 (рис. 1).

5. Панель инструментов – Мастер диаграмм – Тип (точечная) – Вид (плавная линия) (рис. 2).

	A	B
1	x	y
2	0,000	0,000
3	0,250	0,277
4	0,500	0,302
5	0,750	0,306
6	1,000	0,307
7	1,250	0,307
8	1,500	0,308
9	1,750	0,311
10	2,000	0,316
11	2,250	0,321
12	2,500	0,328
13	2,750	0,337
14	3,000	0,346
15	3,250	0,356
16	3,500	0,367
17	3,750	0,378
18	4,000	0,391

Рис. 1. Данные

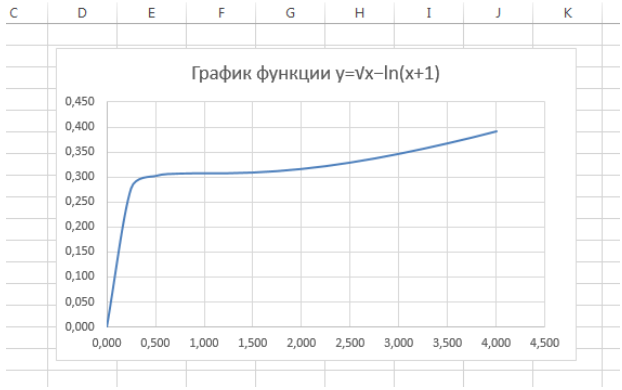


Рис. 2. График функции

При рассмотрении остальных примеров не будем подробно описывать построение в программе MS Excel графиков функций.

Пример 2. Построить график функции y=|x| на отрезке [–20; 20] с шагом 2. Преобразовать его: построить график y = |x +1| и y=|x|+1.

Фрагмент произведенных расчетов из электронной таблицы приведен ниже (рис. 3).

	A	B
1	x	y1
2	20	20
3	18	18
4	16	16
5	14	14
6	12	12
7	10	10
8	8	8
9	6	6
10	4	4
11	2	2
12	0	0
13	-2	2
14	-4	4
15	-6	6
16	-8	8
17	-10	10
18	-12	12
19	-14	14
20	-16	16
21	-18	18
22	-20	20

Рис. 3. Данные

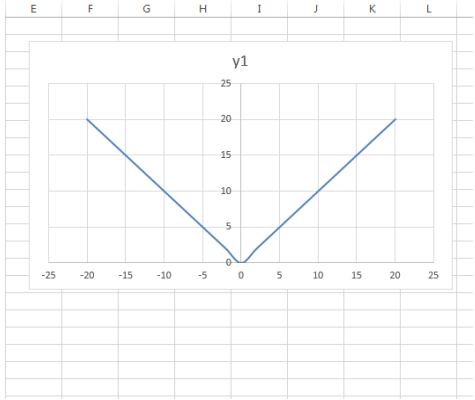


Рис. 4. График

Для детального изучения преобразований графики необходимо построить в одной системе координат, что дает возможность сравнить полученные результаты.

	A	B	C	D
1	x	y1	y2	Y3
2	20	20	30	30
3	18	18	28	28
4	16	16	26	26
5	14	14	24	24
6	12	12	22	22
7	10	10	20	20
8	8	8	18	18
9	6	6	16	16
10	4	4	14	14
11	2	2	12	12
12	0	0	10	10
13	-2	2	8	12
14	-4	4	6	14
15	-6	6	4	16
16	-8	8	2	18
17	-10	10	0	20
18	-12	12	2	22
19	-14	14	4	24
20	-16	16	6	26
21	-18	18	8	28
22	-20	20	10	30

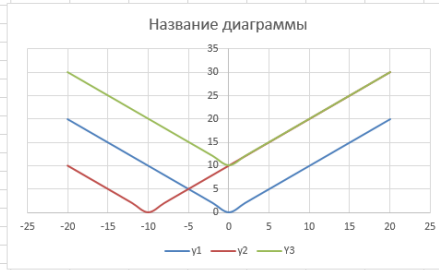
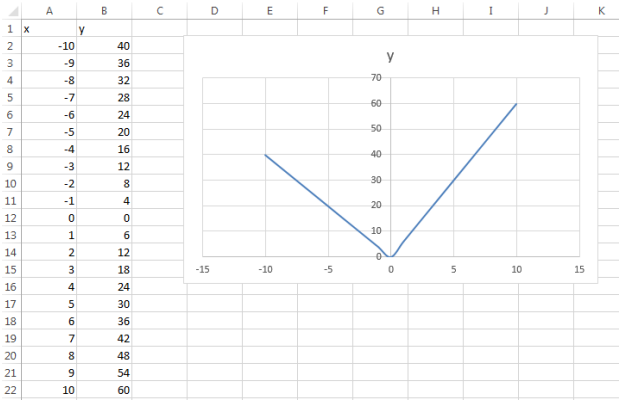


Рис. 5. Несколько графиков на диаграмме

Пример 3 (построение графика функции с одним условием).

Постройте график функции y=x+5|x| на [–10; 10] с шагом 1. Данную функцию можно задать двумя формулами $\begin{cases} -4x, если x < 0, \\ 6x, если x > 0. \end{cases}$

Для построения данной функции необходимо использовать логические функции. Они предназначены для проверки выполнения условия или для проверки нескольких условий. Эта проверка осуществляется на основе значений ИСТИНА или ЛОЖЬ.



	x	y
2	-10	40
3	-9	36
4	-8	32
5	-7	28
6	-6	24
7	-5	20
8	-4	16
9	-3	12
10	-2	8
11	-1	4
12	0	0
13	1	6
14	2	12
15	3	18
16	4	24
17	5	30
18	6	36
19	7	42
20	8	48
21	9	54
22	10	60

Рис. 6. Сложно составленные функции

В данной статье были рассмотрены возможности MS Excel лишь в одном разделе математики. Тем не менее рассматриваемая программа имеет большой потенциал при решении уравнений графическим способом, геометрических задач с помощью логических функций и т.п. Кроме того, с помощью электронных таблиц Excel можно создавать тренажеры и тесты по математике с автоматической проверкой правильных ответов.

Благодаря использованию MS Excel учитель может очень умело, интересно и грамотно построить свой урок.

Библиографический список

1. Линии: определение, исследование и построение: Метод. рекомендации / Краснояр. гос. ун-т; Сост. А.П. Ляпин. – Красноярск, 2001.

2. Солощенко М.Ю. Использование компьютерной программы Advanced Grapher в обучении математике // Математическое моделирование процессов и систем: сб. материалов IV Всероссийской научно-практ. конференции. – Стерлитамак: СФ БашГУ, 2015. – С. 130–135.

Сведения об авторах

Солощенко Марина Юрьевна, кандидат педагогических наук, доцент Стерлитамакского филиала БашГУ. E-mail: Solo_1970@mail.ru.

УДК 004.62: 519.252

Солощенко М.В., Карамова А.И.

РЕАЛИЗАЦИЯ ИМПОРТА ДАННЫХ ИЗ WEB-РЕСУРСОВ

В работе рассматриваются подходы к загрузке данных из сети Internet в настольное программное обеспечение. Изучены способы импорты средствами MS Excel, платформы 1С: Предприятие и Delphi.

Ключевые слова: загрузка внешних данных.

Soloschenko M.V., Karamova A.I.

IMPLEMENTATION OF DATA IMPORT FROM WEB-RESOURCES

Approaches to downloading data from the Internet to the desktop software are discussed in the paper. Import methods are studied using MS Excel, 1C: Enterprise and Delphi platforms.

Key words: loading external data.

При составлении таблиц с расчетами или просто статистическими данными, часто приходится брать данные из сети интернет, например: курсы валют, стоимость товаров, новости, астрономические данные и многое другое. Причем эти данные в собственные программные пакеты приходится вносить вручную, что, крайне неудобно и долго.

Для того, чтобы облегчить процесс переноса данных с web-страниц в различные программы в качестве промежуточного звена можно использовать пакет MS Excel, как самым широко распространенным продуктом на территории РФ, а именно можно воспользоваться встроенными web-запросами, или же интернет-запросами. Web-запросы особенно удобно использовать для извлечения данных, содержащихся в таблицах или предварительно отформатированных областях.

Обычно речь об Интернете идет как о пассивном источнике информации. Если надо получить данные, обозревателю указывают нужный адрес и он делает запрос в Сеть. В такой схеме сами web-узлы, на которых опубликованы web-страницы, не предпринимают никаких действий до получения запроса. Таким образом, для получения информации нужны активные действия со стороны пользователя. В таких случаях говорят, что связь осуществляется по инициативе пользователя. Обозреватель не подвержен таким ограничениям – он способен получать информацию из интернета без активных действий пользователя. Для этого в программе реализованы два механизма –

© Солощенко М.В., Карамова А.И., 2017

подписка и каналы. Благодаря подписке можно так настроить обозреватель, что информация с нужных web-узлов будет автоматически обновляться на компьютере по заданному расписанию. Можно поступить проще и поручить web-узлу отправлять лишь уведомление о том, что данные на интересующей странице были изменены, но можно заказать и автоматическую передачу всех обновленных страниц.

В настоящее время многие сайты поддерживают API-интерфейсы, которые позволяют компьютерным программам собирать информацию. Веб-скрейпинг (Screen scraping) – проверенная временем технология для синтаксического преобразования HTML-страниц в более удобные для потребления формы - по-прежнему способна приносить пользу. Однако возможности, упрощающие извлечение веб-данных с помощью API-интерфейсов, быстро развиваются.

В работе в качестве средств импорты данных мы рассмотрели три программных продукта: пакет MS Office, 1С: Предприятие 8.3 и Borland Delphi 7.

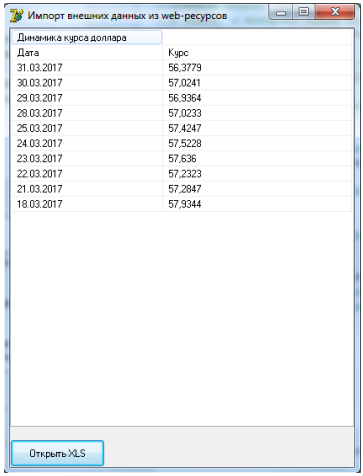


Рис. 1. Импорт внешних данных

Пакет Office – это нечто большее, чем просто набор программ. Уже его название подсказывает, что он должен содержать мощные прикладные программы для коммерческого применения, которые легко и непринужденно работают с данными. Для работы с табличными данными (числовыми данными) огромный инструментарий предоставляет табличный редактор Excel.

Например, в Microsoft Excel можно анализировать котировки акций, используя данные, поступающие прямо с веб-страницы. При необходимости можно извлечь обновляемые данные (в этом случае их можно обновлять непосредственно в Microsoft Excel в соответствии с последними изменениями веб-страницы) или получить данные с веб-страницы и хранить их на листе статически. Для реализации такого механизма достаточно использовать встроенный web-запросы, которые можно легко настроить web-сайты с требуемой информацией.

Также нами разработана программа в среде визуального программирования Borland Delphi, которая открывает книгу Excel в фоновом режиме с ранее встроенными web-запросами и выводит пользователю результирующие таблицы.

Кроме того, разработан отчет на платформе «1С: Предприятия», с помощью которого мы можем получить данные с определенного сайта. Полученные данные выводятся в таблицу и обновляются в реальном времени. Созданный отчет уже не использует в качестве промежуточного звена Office, а реализован полностью средствами платформы 1С.

Методы извлечения данных из Internet, на данный момент, становятся все более популярными. Хорошим показателем может служить возросшее число научных публикаций за год; при этом, например, методы content mining, наоборот получают меньше внимания, чем раньше. На данный момент хорошо работающих систем позволяющих проводить точный анализ Сети, практически нет, а существующие плохо масштабируемы и мало эффективны. При этом в связи с резким ростом числа пользователей Сети, потребность рынка в подобных информационных системах крайне велика, но реализации мешает отсутствие готовых теоретических решений.

Библиографический список

1. Водополова Н.В. Практическое пособие: Excel – как средство анализа данных / Г.П. Косинов, В.Н. Шибеко. – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2012.

2. Фридланд А.Я. Информатика: Процессы, системы, ресурсы. – М.: БИНОМ, 2007.

Сведения об авторах

Солощенко Михаил Владимирович, студент 2 курса СФ БашГУ, E-mail: Kastawa@yandex.ru.

Карамова Альбина Ильгизовна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: alb_bai@rambler.ru.

УДК 004.023

Султанов Р.А.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ: НАХОЖДЕНИЕ МИНИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ РЕЖУЩЕЙ ГОЛОВКИ ИНСТРУМЕНТА В ВЫКЛЮЧЕННОМ И ПРИПОДНЯТОМ СОСТОЯНИИ ПО ТОЧКАМ ВРЕЗКЕ ПРИ РАСКРОЕ ЛИСТОВОГО МАТЕРИАЛА

В работе построен алгоритм формирования траектории движения режущей головки в выключенном и приподнятом состоянии по точкам врезкам.

Ключевые слова: линейный раскрой, оптимальный путь, эвристические алгоритмы.

Sultanov R.A.

SOFTWARE: FINDING OF THE MINIMUM PATH OF MOVEMENT OF THE CUTTER HEAD OF THE TOOL IN THE SWITCHED-OFF AND LIFTED STATUS ON INSERTS POINTS IN CUTTING OF SHEET MATERIAL

In operation the algorithm of formation of a path of movement of a cutter head in the switched-off and raised status on inserts points is constructed.

Key words: cutting line, optimum way, heuristic algorithms.

Целью данной работы является повышение скорости изготовления деталей из листовых материалов с использованием машин фигурной резки с числовым программным управлением (ЧПУ) за счет внедрения программного продукта, позволяющего выполнять следующие функции:

- Ввод и редактирование данных в соответствии с проектом заказа: координаты точек врезки, типы точек врезки.
- Расчет расстояний между начальным положением инструмента и точками врезок, а также между всеми точками врезок.
- Определение и визуализация минимального пути движения инструмента.
- Вывод результатов решения: порядок обхода точек, расстояние движения инструмента, время формирования пути.

В процессе решения задачи, построена диаграмма декомпозиции, согласно методологии IDEF0 (рис. 1).

© Султанов Р.А., 2017

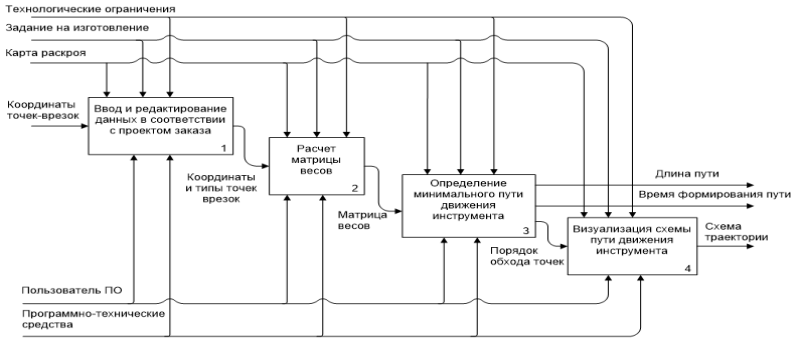


Рис. 1. Функциональная модель, уровень 1

После ввода координат точек врезок происходит разделение на внешние и внутренние, для расчета матрицы весов. После формирования матрицы весов определяем минимальный путь движения режущей головки в приподнятом состоянии и визуализируем порядок обхода точек. После выполнения всех операций, получаем на выходе схему траектории, длину и время формирования пути.

Работа станка имеет циклических характер, поэтому режущая головка всегда имеет начальное положение. Это начальное состояние системы можно считать пробивкой фиктивного нулевого изделия – $b_0(x_0, y_0)$.

Таким образом, можно поставить следующую математическую задачу.

Дано: $B=\{b_1, b_2,\ldots b_n\}$ – множество изделий, n – количество изделий; $V(b_i)$ – точки врезки b_i изделия (i=1…n); $V_0(x_0, y_0)$ – начальное положение головки инструмента; $V_1(b_i)$ – внешняя точка врезки b_i изделия; $V_2(b_i)$ – внутренняя точка врезки b_i изделия.

Найти маршрут, проходящий через все изделия $B=\{b_1, b_2..b_n\}\cup b_0$, длина которого минимальна.

Расстояние между изделиями b_i в b_j, рассчитывается по формуле: $t_{ij}(x,y)=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$.

Рассматриваемая задача сводится к оптимизационной задаче – задаче нахождения минимума функции [1, 2]: $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} T_{ij}[x,y] \to min$, где T_{ij} – матрица расстояний.

Эта задача относится к классу NP-трудных задач [1, 2], для которых не существует точных алгоритмов решения, позволяющих находить оптимальное решение за приемлемое время.

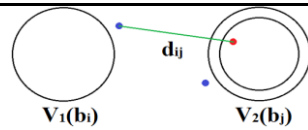
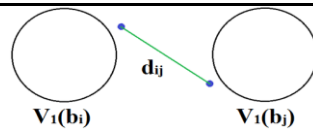
Алгоритм формирования матрицы весов. На начальном этапе нам известно значение точки врезки b_i изделия – $V(b_i)$. Необходимо найти расстояние между i-ым и j-ым изделием (Табл. 1): $M[i, j] = t_{ij}(x, y)$, где $M[i, j] = M[j,i]$.

Переход от i-ого изделия к j-ому всегда осуществляется через внешнюю точку врезки.

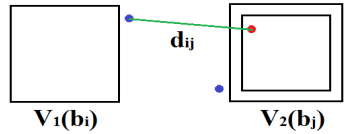
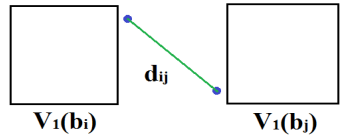
Таблица 1.

Расстояние между изделиями.

А) Если изделие имеет круглую форму:

Если изделие b_j – ***кольцо***, то расстояние рассчитывается между $V_1(b_i)$ и $V_2(b_j)$.	
Если изделие b_j – ***круг***, то расстояние рассчитывается между $V_1(b_i)$ и $V_2(b_j)$.	

Б) Если изделие имеет прямоугольную форму:

Если изделие b_j – ***рамка***, то расстояние рассчитывается между $V_1(b_i)$ и $V_2(b_j)$.	
Если изделие b_j – ***квадрат***, то расстояние рассчитывается между $V_1(b_i)$ и $V_2(b_j)$.	

Нахождение оптимального пути. Для нахождения оптимального пути реализованы следующие методы:

1. «Жадный» алгоритм [1, 2] – на каждом шаге выбирает ближайшую точку врезки.

2. Метод имитации отжига [1, 2] (рис. 2).

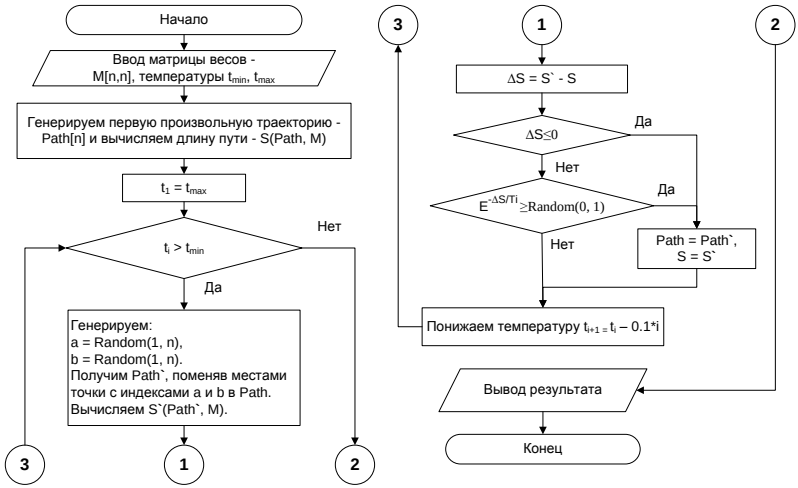


Рис. 2. Блок-схема алгоритма имитации отжига

3. Генетический алгоритм [3–5] (рис. 3).

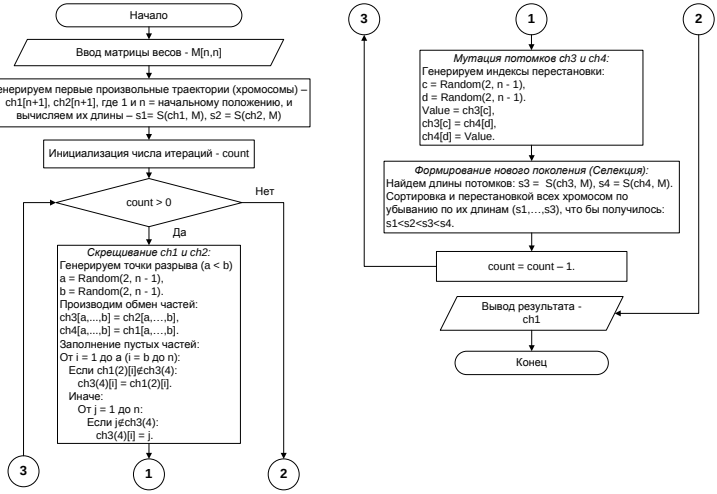


Рис. 3. Блок-схема генетического алгоритма

Результаты работы. Реализованы алгоритмы: жадный алгоритм, метод имитации отжига, генетический алгоритм. На платформе .NET Framework был разработан программный продукт, с помощью которого получены результаты, позволившие оценить эффективность выбранных алгоритмов (табл. 2).

Таблица 2.

Время расчета траектории движения режущей головки по точкам врезкам

Число объектов	Количество объектов имеющие точки врезки		Жадный алгоритм		Метод имитации отжига		Генетический алгоритм	
	Только внешние	С внутренними	Длина пути	Время форм. пути	Длина пути	Время форм. пути	Длина пути	Время форм. пути
10	*10*	*0*	1011	01 мс.	993	02 мс.	935	04 мс.
	5	*5*	1080	02 мс.	1056	03 мс.	1034	04 мс.
	0	*10*	1466	02 мс.	1367	03 мс.	1231	04 мс.

20	*20*	*0*	1839	03 мс.	1802	05 мс.	1715	06 мс.
	10	*10*	2149	03 мс.	2149	04 мс.	2125	07 мс.
	0	*20*	2538	04 мс.	2506	05 мс.	2506	07 мс.
30	*30*	*0*	2237	05 мс.	2232	08 мс	2157	08 мс.
	15	*15*	2934	05 мс.	2854	07 мс.	2922	08 мс.
	0	*30*	2237	05 мс.	2192	07 мс.	2164	09 мс.

- По скорости нахождения минимального пути: самым быстрым является жадный метод, затем метод «имитация отжига», и затем генетический алгоритм.
- По длине построенного пути: самые лучшие результаты дает генетический алгоритм, затем метод «имитация отжига» и жадный метод.
- Скорость нахождения решения и длина пути зависят от количества внутренних контуров.

Библиографический список

1. Хабрахабр – научные публикации (www.habrahabr.ru).

2. Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (www.math.nsc.ru).

3. Вороновский Г.К., Махотило К.В., Петрашев С.Н., Сергеев С.А. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности. – Харьков: ОСНОВА, 1997. – 112 с.

4. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы: Учебное пособие. 2-е изд. – М: Физматлит, 2006. – 320 с.

5. Егоров Кирилл, Чураков Михаил. «Генетические алгоритмы», семинар, 2010 г.

Сведения об авторах

Султанов Рустам Адипович, магистрант УГАТУ. E-mail: 117Rustam@gmail.com.

УДК 517.9

Сукачева Т.Г.

ПРИЛОЖЕНИЯ К МАГНИТОГИДРОДИНАМИКЕ ТЕОРИИ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

На основе теории полулинейных неавтономных уравнений соболевского типа исследована модель движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта в магнитном поле Земли с учетом внешнего воздействия на жидкость, зависящего не только от координаты точки пространства, но и от времени.

Ключевые слова: магнитогидроднамика, уравнения соболевского типа, расширенное фазовое пространство, несжимаемая вязкоупругая жидкость.

Sukacheva T.G.

APPLICATIONS TO MAGNETOHYDRODYNAMICS OF THE THEORY OF SEMI-LINEAR SOBOLEV TYPE EQUATIONS

The model of the motion of the incompressible viscoelastic Kelvin – Voight fluid in the magnetic field of the Earth is investigated on the base of the theory of semi-linear non-autonomous Sobolev type equations under the assumption that the fluid is under external influence depending not only on the coordinates of the point in space but on time too.

Keywords: magnetohydrodynamics, Sobolev type equations, extended phase space, incompressible viscoelastic fluid.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} (1-\lambda\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum\limits_{m=1}^{r}\sum\limits_{s=0}^{n_m-1} A_{m,s}\nabla^2 w_{m,s} - \nabla p + f, \ \ 0 = \nabla\cdot v, \\ \dfrac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = v + \alpha_m w_{m,0}, \ \ m = \overline{1, r}, \\ \dfrac{\partial w_{m,s}}{\partial t} = s w_{m,s-1} + \alpha_m w_{m,s}, \ s = \overline{1, n_m - 1}, \ \alpha_m \in R_-, \ A_{m,s} \in R_+, \end{cases}$$

моделирующую динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка [1]. Здесь функция $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $v_i = v_i(x,t)$, $x \in D$ имеет физический смысл скорости течения, функция $p = p(x,t)$ отвечает давлению, ∇ – оператор Га-

© Сукачева Т.Г., 2017

мильтона; $D \subset R^n, n = 2,3,4$ – ограниченная область с границей ∂D класса C^∞. Параметры $\nu \in R_+$ и $\lambda \in R$ характеризуют вязкие и упругие свойства жидкости соответственно. Параметры $A_{m,s}$ определяют время ретардации (запаздывания) давления, функция $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_i = f_i(x,t)$ характеризует внешнее воздействие на жидкость. В простейшем случае эта модель движения вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта в *магнитном поле Земли* имеет вид

$$\begin{cases} (1-\kappa\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + -\nabla p - 2\Omega\times v + (\nabla\times b)\times b + f \\ \nabla\cdot v = 0, \nabla\cdot b = 0, \\ b_t = \delta\nabla^2 b + \nabla\times(v\times b). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь δ – магнитная вязкость, Ω – угловая скорость, κ – коэффициент упругости, $\nu \in R_+$ – коэффициент вязкости, $b = (b_1(x,t), b_2(x,t) \ldots b_n(x,t))$ – вектор-функция, характеризующая магнитную индукцию.

Для системы (1) исследуем первую начально-краевую задачу. Разрешимость указанной задачи в случае $f = 0$ изучалась ранее в [2]. В рамках теории полулинейных автономных уравнений соболевского типа [3] данные результаты удалось обобщить на случай модели магнитогидродинамики ненулевого порядка [4]. Разрешимость задачи Коши – Дирихле для системы (1) изучается на основе концепции расширенного фазового пространства [5]. Поэтому в первой части работы с помощью полугруппового подхода, основы которого подробно изложены в [6], излагается абстрактная задача Коши для полулинейного неавтономного уравнения соболевского типа. А во второй части указанная задача рассматривается как конкретная интерпретация этой абстрактной задачи. Доказана однозначная разрешимость первой начально-краевой задачи для системы (1) и получено описание ее расширенного фазового пространства. В [7] приведены результаты вычислительного эксперимента.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках конкурсной части государственного задания № 1.857.2014/К.

Библиографический список

1. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и Олдройта // Труды МИАН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 126–164.

2. Сукачева Т.Г., Кондюков А.О. Фазовое пространство одной задачи магнитогидродинамики // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51. –№ 4. – С. 495–501.

3. Матвеева О.П., Сукачева Т.Г. Математические модели вязкоупругих несжимаемых жидкостей ненулевого порядка. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 101 с.

4. Кондюков А.О., Сукачева Т.Г. Об одной модели магнитогидродинамики ненулевого порядка // XVI Всероссийский Симпозиум по прикладной и промышленной математике, летняя сессия, Челябинск, 21–27 июня 2015 г., С. 75.

5. Sukacheva T.G, Kondyukov. A.O. On a Class of Sobolev type Equations // Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software». – 2014. – № 4. – Issue 7. – pp. 5–21.

6. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators // Utrecht; Boston: VSP, 2003. – 216 p.

7. Kondyukov A.O., Sukacheva T.G., Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. Computational Experiment for a Class of Mathematical Models of Magnetohydrodynamics // Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software». – 2017. – № 1. – issue 10. – pp. 149–152.

Сведения об авторе

Сукачева Тамара Геннадьевна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор НовГУ имени Ярослава Мудрого, E-mail: Tamara.Sukacheva@novsu.ru.

УДК 330.4

Суфьянова И.М.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ «ХИЩНИК–ЖЕРТВА» ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MATLAB.

(Модель изменения рыночной цены и спроса на электроэнергию)

Анализируя, полученную систему дифференциальных уравнений аналогично тому, как это сделано с моделью «хищник–жертва» в [8, с. 433–438], приходим к выводу: если объем закупок или цена выведены из состояния равновесия, то происходит периодические колебания объемов закупок и цены, которые по прошествии какого-то времени вновь и вновь возвращают их в начальное состояние. Колебания объемов закупок и цены имеют один и то же период, но отличаются по фазе.

Ключевые слова: Модель «хищник–жертва», система нелинейных дифференциальных уравнений, рыночная цена, спрос.

Sufyanova I.M.

THE MODEL «PREDATOR – VICTIM» FOR A SYSTEM OF TWO NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE HELP OF MATHEMATICAL PACKAGE MATLAB.

(Model of changes in market prices and electricity demand)

Analyzing the obtained system of differential equations the same way as is done with the model «predator–prey» [8, p. 433–438], come to the conclusion that if the purchase volume or price is derived from the equilibrium state, then there is a periodic fluctuation of volumes and prices, which after some time again and again return them to the initial state. Fluctuations in volumes and prices and the same period but differ in phase.

Key words: model of the «predator-prey» system of nonlinear differential equations, market price, demand.

С конца 2003 года в России функционирует сектор свободной торговли оптового рынка электроэнергией. С коммерческой и технологической сторон рынок электроэнергией состоялся. Заложена модель эффективного ценообразования, конкурентный рыночный механизм. Потребители и поставщики научились почасовому планирова-

© Суфьянова И. М., 2017

нию за сутки до реального времени, разработке стратегий поведения на рынке.

В статье [5] приведены данные об объемах покупки электроэнергии и ценах на нее в секторе свободной торговли за конец 2003 года и 2004 год. Анализ этих данных позволяет сделать интересные выводы: Цены в секторе свободной торговли были не постоянными, а периодическими с примерным периодом равным неделе. Примерно такой же период имели колебания объемов покупки электроэнергии. Причем колебания цен и объемов покупки электроэнергии не совпадали по фазе. Все это, на наш взгляд, весьма напоминает картину с колебаниями хищных и нехищных рыб, обнаруженную известным математиком Вито Вольтеррой (1860–1940). Как известно, для объяснения колебаний рыбных уловов в Адриатическом море, имеющих один и то же период, но отличающихся по фазе, Вольтерра предложил математическую модель «хищник–жертва» [6, с. 26]. Напомним, что математическая модель «хищник–жертва» представляет собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений:

$$x' = ax - cxy, \quad a > 0, c > 0,$$
$$y' = -by + dxy, \quad b > 0, d > 0,$$

причем $x = x(t)$ – число жертв; $y = y(t)$ – число хищников; x', y' – это производные этих функций по временной переменной t; a, b, c, d – это некоторые числа;

Многие математические модели успешно применяются одновременно и в биологии, и в демографии, и в физике, и в экономике [7, с. 422–430]. На наш взгляд, модель «хищник–жертва» также может быть применена не только в биологии и экологии, но и в экономике для анализа изменения объема закупок в зависимости от цены (модель не содержит объемов предложения электроэнергии, так как для рынка электроэнергии они более-менее постоянны). Причем цена выступает в роли хищника. А объемы закупок – в роли жертвы («цена съедает спрос»).

Объясним это подробнее.

Обозначим объемы закупок электроэнергии в секторе свободной торговли через *x*, цену электроэнергии через *y*.

В случае если цена электроэнергии вдруг станет раной нулю ($y = 0$), то объемы закупок начнут расти взрывным образом(т.е. экспоненциально): *x* станет расти согласно уравнению естественного

роста: $x' = ax,\ a > 0.$ В случае отсутствия спроса ($x = 0$) цена будет падать по закону $y' = -by,\ b > 0.$

Спрос тем быстрее уменьшается, чем больше проданной электроэнергии и чем больше ее цена. Другими словами, (цена тем быстрее снижает закупки, чем более насыщен рынок электроэнергии по этой цене (xy)). Поэтому если объемы закупок электроэнергии ненулевые, то объемы закупок электроэнергии меняются по закону

$$x' = ax - cxy \quad (a > 0,\ c > 0).$$

С другой стороны, прибыль, получаемая поставщиками от продажи электроэнергии, стимулирует увеличение цены. Прибыль пропорциональна количеству проданного товара по его цене (xy). Поэтому имеем

$$y' = -by + dxy,\ \ (b > 0, d > 0).$$

Таким образом, мы получаем систему дифференциальных уравнений

$$x' = ax - cxy,\ \ a > 0, c > 0,$$
$$y' = -by + dxy,\ \ b > 0, d > 0,$$

причем $x \geq 0, y \geq 0.$

Модель «цена – объемы покупок» построена.

Исследуем влияние начальных условий для нашей модели; Создадим М-файл lotka.m:

function yr = lotka(t, y) *%LOTKA уравнения Лотки-Вольтерра для модели хищник-жертва*

global alpha beta gamma delta yr = [alpha*y(1) - beta*y(1)*y(2); -gamma*y(2) + delta*y(1)*y(2)];

При вызове набираем:

```
global alpha beta gamma delta
alpha = 4;
beta = 2.5;
gamma = 2;
delta = 1 ;
[t,y] = ode23('lotka',[0 30],[100;100]);
plot(t,y)
```

Задав начальные значения для коэффициентов и начальную численность (по 100 каждого вида), строится график на промежутке времени от 0 до 30. Результат получен и приведен на рис.1. Ось ОУ – численность, ось ОХ – единицы времени.

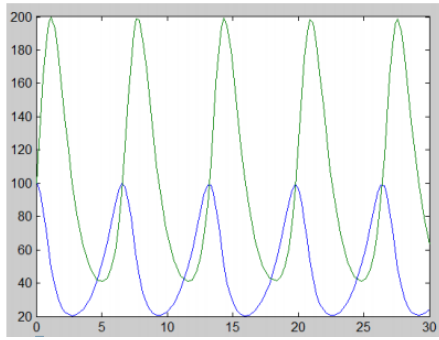


Рис. 1. Зависимость числа хищников (синяя линия) и жертв (зеленая линия) от времени

Условием стабильности x и y являются уравнения $x' = 0, y' = 0,$ или, по-иному, $ax - cxy = 0, \quad -by + dxy = 0.$ Координаты точки равновесия – это координаты точки пересечения прямых $a - cy = 0, \quad -b + dx = 0.$

Поэтому получаем, что равновесный объем закупок $x = b/d$ и равновесная цена $y = a/c$.

Анализируя, полученную систему дифференциальных уравнений аналогично тому, как это сделано с моделью «хищник–жертва» в [8, с. 433–438], приходим к выводу: если объем закупок или цена выведены из состояния равновесия, то происходит периодические колебания объемов закупок и цены, которые по прошествии какого-то времени вновь и вновь возвращают их в начальное состояние. Колебания объемов закупок и цены имеют один и то же период, но отличаются по фазе.

Полученная модель достаточно точно описывает динамику цен и объемов закупок электроэнергии и позволяет предсказывать изменение конъюнктуры на рынке электроэнергии.

Библиографический список.

1. Смит А. Исследование о природе и причинах Богатства народов. Книга первая. – М.: Ось – 89, 1997.– С. 56, 58.

2. Смит А. Исследование о природе и причинах Богатства народов. Книга первая. – М.: Ось – 89, 1997.–С. 58–59.

3. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов. – М.: Физматлит, 2006.– С. 382–384.

4. Открытая физика 2.6. Часть 1. Глава 2. Механические колебания и волны. 2. Свободные колебания. Пружинный маятник. http://www.xenoid.ru/phys_book/content/chapter2/section/paragraph2/theory.php

5. Колбина Л. Новая модель оптового рынка // Эксперт – Урал. – 2005. –№ 3.– С. 12–14.

6. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 160 с.

7. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.

8. Шикин Е.В., Чхартшивили А.Г. Математические методы и модели в управлении: Учеб. Пособие. 2 – е изд. – М.: Дело, 2002. – 440 с.

9. Суфьянова И.М. Колебание рыночных цен // Фундаментальная математика и ее приложение в естествознании: тезисы докладов VII Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. – С. 321.

10. Суфьянова И.М. Математическая модель изменения цены и спроса в виде двух линейных дифференциальных уравнений // Математические методы и модели в исследовании государственных финансов и финансовых рынков: сборник материалов Всероссийской молодежной научно-практической конференции (27–28 апреля 2015 г. г. Уфа). В 3-х ч. Ч. II. – Уфа: АЭТЕРНА, 201. – С. 111–113.

11. Суфьянова И.М., Ахтямов А.М. Модель «цена – спрос» для системы двух линейных дифференциальных уравнений // Naukarastudent.ru. – 2014. – № 11 (11–2014) / [Электронный ресурс] – Режим доступа. – URL: http://naukarastudent.ru/11/2036/

12. Ахтямов А.М. Математические модели экономических процессов. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2009.– С. 53–55.

13. Автономов В.С., Голдстин Э. Экономика для школьников: [Эксперим. учеб. для учащихся 9–11 кл.] – М.: Эконом, 1995.– 162 с.

14. Устюжанина Е.В. Использование методов оценки имущества для экономического обоснования цены продукции // Экономика и математические методы, 2013. – Т. 49. – № 3. – С. 3–15.

Сведения об авторах

Суфьянова Ильсия Маратовна, магистр 2 года обучения ФМиИТ БашГУ. Email: sufyanova.ilsiya@yandex.ru.

УДК 004.4

Сухоруков А.В., Михайлова Т.А.

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО СРЕДСТВА ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ МЕТОДОМ ФЛОЙДА

В данной работе описана структура разработанного программного средства решения задачи поиска кратчайшего пути методом Флойда. Реализована возможность графического задания и отображения структуры графа.

Ключевые слова: поиск кратчайшего пути, метод Флойда, Delphi, MDI-приложения.

Sukhorukov A.V., Mikhailova T.A.

DEVELOPMENT OF A SOFTWAER TO SEARCH FOR THE SHORTEST WAY BY FLOYD METHOD

The structure of the developed software for solving shortest path problem by the Floyd method is described in the paper. The possibility of graphical task and display of graph structure is realized.

Keywords: shortest path problem, Floyd method, Delphi, MDI-applications.

Часто бывает удобно изображать некоторую ситуацию в виде рисунка, состоящего из вершин, представляющих основные элементы ситуации, и линий, соединяющих определенные пары этих вершин и представляющих связи между ними. Такие рисунки называются графами. Теория графов в последнее время активно развивается. В основном этому способствует прогресс в области вычислительных машин. Непосредственное и детальное представление практических систем, таких, как распределительные сети и системы связи, приводит к графам большого размера, успешный анализ которых зависит в равной степени, как от существования оптимальных алгоритмов, так и от возможности использования быстродействующих вычислительных машин [1].

Одной из самых часто решаемых задач на основе теории графов является нахождение маршрута для транспортного средства. При этом маршрут должен отвечать некоторым условиям. Например, имеются ограничения на длину маршрута либо требуется решить некую оптимизационную задачу: обеспечить наименьший расход топлива, обойти какие-либо препятствия, обусловленные рельефом местности и др. В связи с данной проблемой актуальным будет создание программного средства с графической реализацией данных в форме графа для после-

© Сухоруков А.В., Михайлова Т.А., 2017

дующего решения задачи поиска кратчайшего пути. При этом для решения данной задачи был выбран метод Флойда. Данный алгоритм оптимален по сравнению с остальными алгоритмами решения поставленной задачи, так как он позволяет найти кратчайшие пути между любыми двумя вершинами графа, что позволяет работать со смешанными графами [2]–[3].

Для реализации программного средства работы с графами использовалась среда разработки Borland Delphi 7 и язык программирования Object Pascal. Прорисовка графа происходит на компоненте Image, используя его свойства: canvas, pen, brush [4].

При запуске программы по умолчанию открывается чистая форма и пользователю даётся выбор: создать новый граф или открыть уже существующий. При это программа работает с файлами типа gaf, которые представляют собой общую аннигиляционную текстуру.

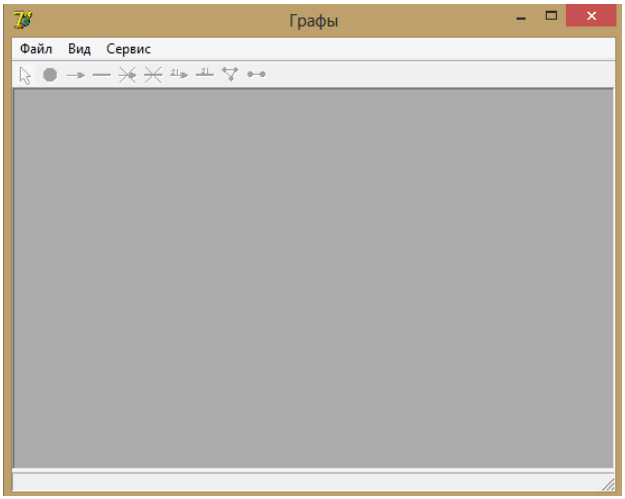


Рис. 1. Интерфейс программного средства при запуске

В случае выбора возможности самостоятельного создания графы в главном окне открывается дочернее окно, в котором реализовывается процесс создания графа. Для этого необходимо добавить вершины на холст, используя кнопку в форме шара. В качестве следующего действия требуется добавить ребра, соединяющие вершины, при этом реализована возможность добавления ориентированного ребра и ребра без направления. После добавления ребра автоматически открывается окно, в котором следует указать его вес.

При готовности структуры графа можно приступить к поиску кратчайшего пути между двумя произвольными вершинами, используя кнопку в виде прямой с шарами на концах (рис. 2). Далее необходимо выбрать вершину, которая будет начальной точкой пути, и провести указатель к вершине, которая будет его конечной точкой. После выбора программа выведет сообщение, в котором будет указан вес кратчайшего пути, а на графе будет выделен синим цветом сам путь.

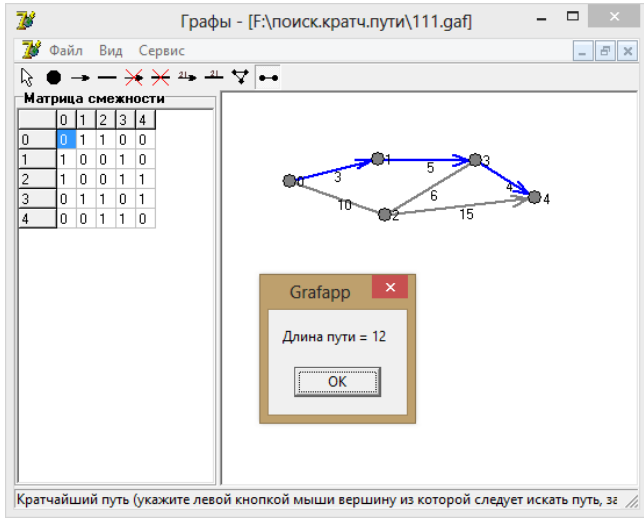


Рис. 2. Вывод кратчайшего пути

В ходе создания данной программы были изучены алгоритмы поиска кратчайшего пути. Графические возможности Delphi, в частности рисование графа на компоненте Image.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-47-020068 и проекта № 13.5143.2017/БЧ, выполняемого вузом в рамках государственного задания Минобрнауки РФ.

The study was funded by RFBR according to the research project № 17-47-020068 and project № 13.5143.2017/ BCH, carried out by the University in the framework of the State Task of the Ministry of Education of the Russian Federation

Библиографический список

1. Оре О. Графы и их применение. – М.: Мир, 1965. – 174 с.
2. Левитин А.В. Алгоритмы. Введение в разработку и анализ – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006 – 576 с.

3. Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

4. Архангельский А.Я. Программирование в Delphi 7. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2003. – 1152 с.

Сведения об авторах

Сухоруков Андрей Викторович, студент факультета математики и информационных технологий СФ БашГУ. E-mail: sychoruckov@yandex.ru.

Михайлова Татьяна Анатольевна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель СФ БашГУ. E-mail: T.A.Mihailova@yandex.ru.

УДК 517. 968

Темирбекова Л.Н.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА

В работе рассматривается двумерная коэффициентная обратная задача для гиперболического уравнения. Решение данной задачи находится с помощью двумерного метода Гельфанда-Левитана. При разработке численных методов решения такого рода задач используются идеи итеративной регуляризации [1].

Ключевые слова: уравнение Гельфанда-Левитана, задача Коши, параллельные алгоритмы, интегральное уравнение, численные методы.

Temirbekova L.N.

PARALLEL ALGORITHMS FOR FIND THE SOLUTION GELFAND-LEVITAN'S TWO-DIMENSION INTEGRAL EQUATIONS

In this article considered the two-dimensional coefficient inverse problem for the hyperbolic type. The solution found by two-dimensional Gelfand-Levitan method. We used the iterative regularization [1] method.

Key words: Gelfand-Levitan equation, Cauchy problem, parallel algorithms, integral equation, numerical methods.

В качестве примера можно рассмотреть структурные обратные задачи гравиметрии [2], которые сводятся к решению двумерных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Уравнения гравиметрии и магнитометрии являются существенно некорректными задачами, решение которых обладает сильной чувствительностью к

© Темирбекова Л.Н., 2017

погрешностям правых частей, полученных в результате измерений и предварительной обработки геофизических данных.

Для решения двумерной коэффициентной обратной задачи гиперболического типа предложены параллельные прямые и итерационные алгоритмы.

Рассмотрим следующее семейство прямых задач [3]:

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} + q(x,y)u^{(k)}, \quad x>0, \quad y\in[-\pi,\pi], \quad t\in R, \quad k\in Z, \qquad (1)$$

$$u^{(k)}\,|_{t=0} = 0,\ u_t^{(k)}\,|_{t=0} = h(y)\delta(x) \qquad (2)$$

$$u^{(k)}\,|_{y=\pi} = u^{(k)}\,|_{y=-\pi}, \qquad (3)$$

Предполагаем, что след решения прямой задачи (1)-(3) существует и может быть измерен. В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $q(x,y)$ по дополнительной информации о решении прямой задачи (1)–(3)

$$u^{(k)}(0,y,t) = f^{(k)}(y,t),\ y\in(-\pi,\pi), \quad t>0, \quad k\in Z \qquad (4)$$

где R – множество вещественных чисел, Z – множество всех целых чисел, δ – дельта-функция Дирака, k – некоторое фиксированное целое число, $h(y) = e^{iky}$.

Вводится последовательность вспомогательных прямых задач [3]:

$$\omega_{tt}^{(m)} = \omega_{xx}^{(m)} + \omega_{yy}^{(m)} + q(x,y)\omega^{(m)}, \quad x>0, \quad y\in[-\pi,\pi], \quad t\in R, \quad m\in Z. \qquad (5)$$

$$\omega^{(m)}(0,y,t) = e^{imy}\delta(t), \quad \frac{\partial\omega^{(m)}}{\partial x}(0,y,t) = 0, \qquad (6)$$

$$\omega^{(m)}\,|_{y=\pi} = \omega^{(m)}\,|_{y=-\pi} \qquad (7)$$

Решение задачи (5)–(7) находится по формуле Даламбера.

Известно, что

$$\tilde{\omega}^{(m)}(x,y,x-0) = \frac{h(y)}{4}\int_0^x q(\xi,y)d\xi,\ x>0 \qquad (8)$$

При $x>|t|$ имеем

$$\frac{1}{2}\left[f^{(k)}(y,t+x) + f^{(k)}(y,t-x)\right] + \int_{-x}^{x}\sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s)\tilde{\omega}^{(m)}(x,y,s)ds = 0. \qquad (9)$$

При каждом фиксированном $x>0$ соотношение (9) является интегральным уравнением Гельфанда-Левитана первого рода относительно функции $\tilde{\omega}(x,y,t)$, $t\in(-x,x)$.

После дискретизации уравнения на сетке и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам задача (9) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с симметричной матрицей. Так как уравнение (9) относится к классу некорректно поставленных задач, то СЛАУ, возникающая в результате дискретизации уравнения, является плохо обусловленной и преобразуется к виду

$$f_{\gamma}^{(k)}(\mu E + A^{(k)})\tilde{\omega} = f_{\gamma}^{(k)}. \qquad (10)$$

где μ – параметр регуляризации.

Для решения уравнения (10) используются прямой метод квадратного корня и итерационные методы регуляризации. Численная реализация и распараллеливание итерационных методов и метода квадратного корня для решения двумерной коэффициентной обратной задачи выполнены с помощью библиотеки MPI на языке Фортран.

Распараллеливание итерационных методов градиентного типа [2] основано на разбиении матрицы $A^{(k)}$ горизонтальными полосами на m блоков, а вектора решения z и вектора правой части $f_{\gamma}^{(k)}$ СЛАУ – на m частей так, что $n = m \times L$, где n – размерность системы уравнений, m – число процессоров, L – число строк матрицы в блоке.

Распараллеливание метода квадратного корня, предложенного в работе [2]. Матрица $A^{(k)}$ разбивается вертикальными линиями на m блоков. Диагональные элементы треугольной матрицы S. Обратный ход метода квадратного корня (нахождения СЛАУ) по рекуррентным формулам также выполняется на одном процессоре.

Библиографический список

1. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. – Екатеринбург: Наука, 1993. – 262 с.

2. Акимова Е.Н. Параллельные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на МВС-1000 // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2009. – № 4. – С. 181–189.

3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.

Сведения об авторах

Темирбекова Лаура Нурлановна, доктор философии (PhD), старший преподаватель кафедры математики и математического моделирования Казахского национального педагогического университета имени Абая. E-mail: Laura-Nurlan@mail.ru.

УДК 519.6(075.8)

Темирбекова Л.Н., Таирова А.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЗМНОЖЕНИЙ ПОПУЛЯЦИЙ БАКТЕРИЙ

Рассмотрена математическая модель роста популяции бактерий, которая является задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Получены численные решения рассмотренной задачи известными численными методами Эйлера и Рунге – Кутта .

Ключевые слова: Рост популяции бактерий, дифференциальные уравнения, численные методы Эйлер и Рунге – Кутта .

Temirbekova L.N., Tairova A.

NUMERICAL SOLUTION THE MATHEMATICAL MODELS OF BACTERIA POPULATION GROWTH

We considered the mathematical model of bacterial population growth, which is the Cauchy problem for the first-order differential equation with separable variables. We found numerical solution by the known methods of Euler and Runge-Kutta.

Key words: Growth of bacterial population, differential equations, numerical methods Euler and Runge-Kutta.

Дифференциальные уравнения являются одним из самых мощных средств математического решения практических задач. Особенно широко они используются для решения задач естественнонаучного цикла: физики, химии, биологии, экологии.

Математическая модель роста популяций бактерий [1]. Пусть $N(x)-$ численность размножающейся популяции бактерий в момент времени t. При идеальных условиях приращение численности $\Delta N(x)=N(t+\Delta t)-N(t)$ за время от t до $t+\Delta t$ для многих видов бактерий можно считать примерно пропорциональным количеству имеющихся в момент времени t бактерий; кроме того, при малых Δt приращение $\Delta N(x)$ должно быть примерно пропорциональным Δt. Таким образом, при сделанных допущениях можно записать

$$\Delta N(x)\approx k\cdot N(x)\Delta t$$

где $k>0$ – коэффициент, зависящий от вида бактерий. Итак,

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}\approx k\cdot N(t)$$

© Темирбекова Л.Н., Таирова А., 2017

Отвлекаясь от того, что численность может измеряться только целыми числами, будем считать, что $N(x)$ изменяется во времени непрерывно. Учитывая, что последнее равенство должно быть тем точнее, чем меньше Δt после перехода в нем к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение вида (1):

$$N'(t) = k \cdot N(t) \tag{1}$$

Следовательно,

$$N(t) = A \cdot e^{kt} \tag{2}$$

Так что, численность популяции возрастает по показательному закону. Если при этом известна начальная численность популяции, то есть начальное условие

$$N(0) = N_0,$$

то следуя формуле (2), можно записать

$$N(t) = N_0 e^{kt}.$$

Рассмотренная задача заключается, в определение во сколько раз увеличится количество бактерий за 9 часов, если известно, что в течение 3 часов их количество изменилось от 100 до 200.

Скорость размножения бактерий, если для них имеется достаточный запас пищи и созданы другие необходимые внешние условия (например, отсутствие подавления бактерий другими видами), пропорциональна их количеству.

Пусть x – количество бактерий в данный момент, тогда скорость изменения их количества равна производной $\frac{dx}{dt}$. Так как скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству, то существует k что

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x$$

Разделяем в дифференциальном уравнении переменные:

$$\frac{dx}{x} = k \cdot dt$$

Интегрируя, получаем:

$$\int \frac{dx}{x} = \int k \cdot dt, \ln x = k \cdot t + \ln C$$

что после потенцирования даёт

$$x = C \cdot e^{kt}$$

Для нахождения C используем начальное условие: при $t=0, x=100$. Имеем: $C\cdot e=100, C=100$, и значит, $x=100\cdot e^{kt}$. Коэффициент e^{kt} находим из условия: при

$$t=3,\quad x=200:200=100\cdot e^{3k},\quad e^{k}=\sqrt[3]{2}.$$

Искомая функция:

$$x=100\cdot 2^{t/3}.$$

При $t=9,\quad x=800$. Количество бактерий за 9 часов увеличится в 8 раз.

Численное решение. Данная задача была решена численными методами Эйлера и Рунге – Кутта [2–3]. Рассмотрим метод Эйлера

$$h=\frac{b-a}{N},\quad t_i=a+ih,\quad i=\overline{1,N},\quad x_{i+1}=x_i+h\cdot f\left(t_i;x_i\right).$$

Таблица 1.

Численные значения методам Эйлера

i	h	t	x_i	x_T
0	0,3	0	100	100
1	0,3	0,3	107	107,1773463
2	0,3	0,6	114	114,8698355
…	…		…	…и т.д.
28	0,3	8,4	665	696,4405
29	0,3	8,7	711	746,4264
30	0,3	9	761	800

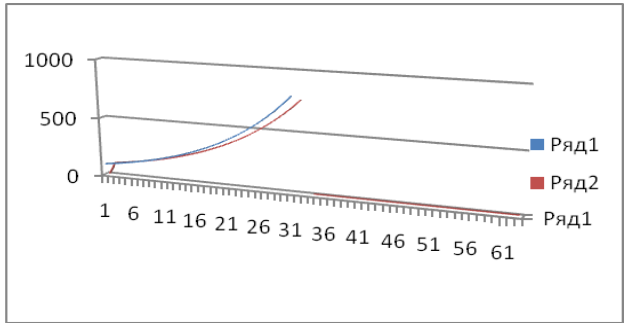


Рис.1. Сравнительный график точного и приближенного решения методом Эйлера

Рассмотрим второй численный метод Рунге – Кутта [2–3]

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad t_i = t_{i-1} + h,$$

$$k_1 = f(t_i; x_i), \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}; x_i + \frac{h \cdot k_1}{2}\right), \quad k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}; x_i + \frac{h \cdot k_2}{2}\right), \quad k_4 = f(t_i + h; x_i + h \cdot k_3),$$

$$x_{i+1} = x_i + h/6\left(k_1 + 2 \cdot (k_2 + k_3) + k_4\right).$$

Таблица 2.

Численные значения методам Рунге – Кутта

i	h	k	x_i
1	0	23,10333333	100
2	0,15	23,90397935	
3	0,15	23,93172574	
4	0,15	23,93268729	
5	0	24,751842	107,1354
6	0,15	25,60961709	
7	0,15	25,63934328	
8	0,15	25,64037345	
…	…	…	…и т.д.
117	0	170,501485	737,9952
118	0,15	176,410214	
119	0,15	176,614981	
120	0,15	176,6220772	
			790,6539

Сравнительный анализ в виде таблиц и графиков показывает, что метод Рунге – Кутта является наиболее оптимальным по сравнению с прямым методом Эйлера.

Библиографический список

1. Бобров А.Н., Радославова Т.В. Задачи по высшей математике для биологов. Учебное пособие. – М.: Биологический факультет МГУ, 2013. – 111 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 6-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.

3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.

Сведение об авторах

Темирбекова Лаура Нурлановна PhD, старший преподаватель кафедры КазНПУ им. Абая. E-mail: Laura-Nurlan@mail.ru.

Таирова Анида магистрант 1 курса КазНПУ им. Абая. E-mail: anida_777@mail.ru.

УДК 517.9, 519.6(075.8)

Темирбекова Л.Н., Адил Н., Сабит М.С.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗРАСТА ГОРНОЙ ПОРОДЫ

Рассмотрена задача определения возраста горной породы. Описана математическая модель рассматриваемой задачи, которая является задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Для численного решения данной задачи используются известные численные методы Эйлера и Рунге – Кутта .

Ключевые слова: Математическая модель, горная порода, дифференциальные уравнения первого порядка, начальные условия, метод Эйлера, метод Рунге – Кутта .

Temirbekova L., Adil N., Sabit M.

NUMERICAL SOLUTION THE PROBLEM OF DETERMINING ROCK AGES MATHEMATICAL MODEL

We considered the problem of determine rock ages. This problem is called first order Cauchy problem for differential equation with separable variables. We found numerical solution the problem of determine rock ages with Euler and Runge-Kutta methods.

Key words: Mathematical model, rock, first order differential equations, initial conditions, Euler method, Runge-Kutta method.

1. Математическая модель определения возраста горной породы [1]

Рассмотрена задача геохимии, которая описывается дифференциальным уравнением первого рода с начальными условиями. В исследованном куске горной породы содержится 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за 45 лет, и что при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового

© Темирбекова Л.Н., Адил Н., Сабит М.С., 2017

свинца. Определить возраст горной породы считая, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебрегая наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом (так как они распадаются намного быстрее урана). $x(t)$ является количеством урана в момент времени $t, t > 0$. Так как скорость распада пропорциональна количеству урана в данный момент времени t, то получаем простейшую модель радиоактивного распада

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

Известно, что решение уравнения (1) с разделяющимися переменными имеет вид

$$x(t) = Ce^{-kt},$$

где C обозначает $x(0)$ – начальное количество урана в момент времени $t = 0$. Период полураспада определяется по формуле

$$\overline{t} = \ln 2 / k.$$

Нужно определить начальное количество урана в породе. Для этого находиться количество s полностью распавшегося урана из следующей пропорции

$$\frac{s}{14} = \frac{238}{206}.$$

Получим

$$s = \frac{14 \cdot 238}{206} \approx 16,2 \text{ мг.}$$

Следовательно, первоначальное количество урана $x(0)$ в куске породы было

$$100 + \frac{14 \cdot 238}{206} \approx 116,2 \text{ мг.}$$

По формуле для периода полураспада находим

$$k = \ln 2 / 45 .$$

Наконец, из формулы решения

$$x(t) = 116,2e^{-kt}$$

Получается следующее

$100 = 116,2e^{-kT}$,

$$T = \frac{\ln 1{,}162}{k} = \frac{45 \ln 1{,}162}{\ln 2} \approx 9{,}747 \text{ лет.}$$

где параметр T показывает возраст горный породы. Для численных расчетов проведено обезразмеривание данных.

2.Численное решение

Из множества существующих разработанных для решения ОДУ первого порядка методов рассмотрим методы Эйлера и Рунге – Кутта [2].

Метод Эйлера. Введем по переменному t равномерную сетку с шагом $h > 0$. Рассмотрим множество точек

$$\omega_h = \{t_n = nh,\ n = 0,1,2,...\}.$$

Будем обозначать через x точное решение задачи (1), а через $u_n = u(t_n)$ – приближенное решение. Приближенное решение является сеточной функцией, которая определяется в точках сетки ω_h. Уравнение (1) заменяется разностным уравнением

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} - f(t_n, u_n) = 0,\ n = 0,1,2,....,\ x_0 = u_0.$$

Решение этого уравнения находиться явным образом по рекуррентной формуле

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n),\ n = 0,1,2,....,\ x_0 = u_0.$$

В таблице 1 и на рисунке 1 показаны приближенные значения, полученные численным методам Эйлера при $h = 0.2$ и точные значения.

Таблица 1.

Таблица полученных численных значений
методом Эйлера при $h = 0.2$ и точные значения

n	$t = nh$	$u(n)$ –приближенное решение	$x(n)$ – точное решение
0	0	116,20000	116,20000
1	0,24	115,76386	115,76440
2	0,49	115,32935	115,33043
3	0,73	114,89647	114,89809
4	0,97	114,46522	114,46737
5	1,22	114,03559	114,03826
6	1,46	113,60757	113,61076

7	1,71	113,18115	113,18487
8	1,95	112,75634	112,76057
9	2,19	112,33312	112,33786
10	2,44	111,91149	111,91674
…	…	….	и.т.д.

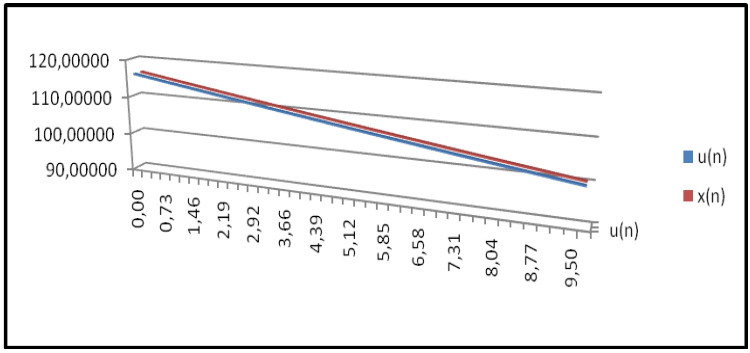


Рис. 1. Графики точного и приближенного решения методом Эйлера

Метод Рунге – Кутта. Рассмотрим расчетные формулы метода Рунге – Кутта для решения дифференциального уравнения (1)

$$k_1 = f(t_n, x_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + h/2, x_n + hk_1/2\right),$$

$$k_3 = f(t_n + h/2, x_n + hk_2/2),$$

$$k_4 = f(t_n + h, x_n + hk_3),$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

В таблице 2 показаны приближенные значения, полученные численным методам Рунге – Кутта при $h = 0,2425$.

Таблица 2.

Таблица полученных значений численным методом
методам Рунге – Кутта при $h = 0,2425$

n	$k(n)$	$u(n)$
1	-1,789738222	
2	-1,78305348	
3	-1,783078448	
4	-1,783078355	116,2
5	-1,776410258	
6	-1,769775297	
7	-1,769800079	
8	-1,769799986	115,3347
9	-1,763181546	
10	-1,756595994	
11	-1,756620592	
12	-1,7566205	114,4758
…	….	и.т.д.

Для задачи об определении возраста горной породы были применены численные методы Эйлера и Рунге – Кутта. Был проведен сравнительный анализ предложенных методов. По результатам сравнительного анализа было определено, что метод Рунге – Кутта более точный по сравнению с методом Эйлера.

Библиографический список

1. Бобров А.Н., Радославова Т.В. Задачи по высшей математике для биологов. Учебное пособие. – М.: Биологический факультет МГУ, 2013. – 111 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 6-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.

3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.

Сведения об авторах

Темирбекова Лаура Нурлановна PhD, старший преподаватель кафедры МиММ КазНПУ им. Абая. E-mail: Laura-Nurlan@mail.ru.

Адил Наурызбай магистрант 1 курса специальности «6М060100-Математика» КазНПУ им. Абая. E-mail: nauryzbai_adil@mail.ru.

Сабит Макен магистрант 1 курса специальности «6М060100-Математика» КазНПУ им. Абая. E-mail: nauryzbai_adil@mail.ru.

УДК 519.6(075.8)

Темирбекова Л.Н., Тулеухасым С.Т.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СКОРОСТИ ОСТЫВАНИЕ ТЕЛО В ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Рассмотрено численное решение математической модели скорости остывание тело в окружающей среде. Математическая модель данной задачи описывается с помощью линейного дифференциального уравнения первого рода с разделяющимися переменными с определенными начальными условиями. Для численного решения рассмотренной математической модели использовались широко известные численные методы Эйлера и Рунге – Кутта. Проведен сравнительный анализ предложенных методов в виде графиков и таблиц.

Ключевые слова: окружающая среда, математическая модель, скорость остывания, тело, численные методы, метод Эйлера, метод Рунге – Кутта.

Temirbekova L., Tleuhasim S.

NUMERICAL SOLUTION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE COOLING SPEED THE BODY IN ENVIRONMENT

We considered the numerical solution of the mathematical model of speed cooling the body in the environment. This problem is linear differential equation of the first -order with separating variables with initial conditions. Numerical solution of the mathematical model of speed cooling the body in the environment solved numerical Euler's method and Runge – Kutta method. The tables and graph built.

Key words: environment, mathematical model, cooling, body, numerical methods, Euler's method, Runge – Kutta method.

Рассмотрим задачу скорости остывания тела, которая пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20 ˚С. Когда тело остынет до 25 ˚С, если за 10 минут оно охладилось от 100 ˚С до 60 ˚С? При решении данной задачи учитывают закон остывания тела, которое можно написать в следующем виде

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_0\right),$$

© Темирбекова Л.Н., Тулеухасым С.Т., 2017

где T – температура тела. $T_0 = 20^\circ C$ – температура окружающей среды, k – коэффициент пропорциональности. Интегрируя это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, получим

$$T = Ce^{kt} + 20 .$$

Из начального условия $T(0) = 100^\circ C$ находим $C = 80$, а из условия $T(10) = 60^\circ C$ находим $k = -\frac{\ln 2}{10}$. Таким образом $T = 80e^{-\frac{\ln 2}{10}t} + 20$. Положив $T = 25$, находим требуемый момент времени $t = 40$ мин.

Данная задача была решена численными методами Эйлера и Рунге – Кутта. Для начала опишем численный метод Эйлера

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad t_i = a + ih, \quad i = \overline{0, N},$$

$$T_{i+1} = T_i + h \cdot f(t_i, T_i)$$

Таблица 1.

Численные значения методом Эйлера

i	h	t_i	T_i	T_T
0	0,4	0	100	100
1	0,4	0,4	97,78	97,81254264
2	0,4	0,8	95,63	95,68489741
…	…	…	…	… и т.д.
98	0,4	39,2	25,09	25,28606776
99	0,4	39,6	24,95	25,14152966
100	0,4	40	24,81	25,0009437

Далее использовали численный метод Рунге – Кутта, который имеет следующие формулы для вычисления

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad t_i = t_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$k_1 = f(t_i; T_i), \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}; T_i + \frac{h \cdot k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}; T_i + \frac{h \cdot k_2}{2}\right), \quad k_4 = f(t_i + h; T_i + h \cdot k_3), \quad T_{i+1} = T_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2 \cdot (k_2 + k_3) + k_4\right).$$

Таблица 2.

Численные значения методом Рунге – Кутта

h	i	k_i	T_i
0,4	0	-5,5448	
0,4	0,2	-5,467937982	
0,4	0,2	-5,469003444	
0,4	0,2	-5,468988674	100
0,4	0	-5,392837032	
0,4	0,2	-5,318081525	
0,4	0,2	-5,319117786	
0,4	0,2	-5,319103422	97,80749
…	…	…	…
0,4	0	-0,364052589	25,10857
0,4	0,2	-0,359006092	
0,4	0,2	-0,359076046	
0,4	0,2	-0,359075076	
0,4	0	-0,35407522	
0,4	0,2	-0,34916703	
0,4	0,2	-0,349235067	
0,4	0,2	-0,349234124	24,96857

Рассмотрена математическая модель скорости остывание тело в окружающей среде. Разработаны численные методы решения дифференциального уравнения первого порядка с начальными условиями. Построены таблицы и графики рассмотренных численных методов. Сравнительный анализ предложенных методов показывает, что метод Рунге – Кутта является, более оптимальным по сравнению с методом Эйлера.

Библиографический список

1. Бобров А.Н., Радославова Т.В. Задачи по высшей математике для биологов. Учебное пособие. – М.: Биологический факультет МГУ, 2013. – 111 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 6-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.

3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.– 432 с.

Сведение об авторах

Темирбекова Лаура Нурлановна PhD, старший преподаватель кафедры КазНПУ им. Абая. E-mail: Laura-Nurlan@mail.ru.

Тулеухасым Серикжан магистрант 1 курса КазНПУ им. Абая. E-mail: anida_777@mail.ru.

УДК 541(64 +127):544.433.22

Терещенко К.А., Улитин Н.В., Степанова В.А., Ганиев Г.М., Круглова А.Е., Шиян Д.А.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СИНТЕЗ БУТИЛКАУЧУКА В ТРУБЧАТОМ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕАКТОРЕ ДИФФУЗОР-КОНФУЗОРНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Проведено моделирование макрокинетики синтеза бутилкаучука в трубчатом турбулентном реакторе при разных углах раскрытия диффузора, скоростях ввода реагентов и отношениях массовых расходов мономеров. Рассчитаны вязкость по Муни бутилкаучука и разрушающее напряжение при растяжении его серных вулканизатов.

Ключевые слова: бутилкаучук, вулканизат, вязкость по Муни, изобутилен, изопрен, катионная сополимеризация, макрокинетика, молекулярно-массовые характеристики.

Tereshchenko K.A., Ulitin N.V., Stepanova V.A., Ganiev G.M., Kruglova A.E., Shiyan D.A.

MODELING OF THE BUTYL RUBBER SYNTHESIS PROCESS IN A TUBULAR TURBULENT REACTOR WITH A DIFFUSER-CONFUSER DESIGN

Simulation of the macrokinetics of butyl rubber synthesis in a tubular turbulent reactor at different diffuser opening angles, reagent injection rates, and monomer mass flow ratios was carried out. The Mooney viscosity of the butyl rubber and the tensile stress of its sulfur vulcanizates were calculated.

Key words: butyl rubber, vulcanizate, Mooney viscosity, isobutylene, isoprene, cation copolymerization, macrokinetics, molecular weight characteristics

Бутилкаучук получают катионной сополимеризацией изобутилена с изопреном [1]. Этот процесс является кинетически быстрым и реализуется при низких температурах (163 ÷ 183 K). Основными свойствами бутилкаучука и серных вулканизатов на его основе являются вязкость по Муни (η) и прочность вулканизатов (σ), которые зависят от молекулярной массы бутилкаучука [1]. Из-за кинетически быстрого характера процесс синтеза бутилкаучука целесообразно проводить в условиях интенсивного смешения реагентов в трубчатом турбулентном диффузор-

© Терещенко К.А., Улитин Н.В., Степанова В.А., Ганиев Г.М., Круглова А.Е., Шиян Д.А., 2017

конфузорном реакторе [1]. Цель работы – установление закономерностей процесса синтеза бутилкаучука в трубчатом турбулентном реакторе диффузор-конфузорной конструкции, определение его молекулярно-массовых характеристик и вязкости по Муни и разрушающего напряжения при растяжении его серных вулканизатов (содержание серы 2 % масс.). В нашей работе рассматриваемый процесс исследуется методом моделирования макрокинетики процесса в программном пакете вычислительной гидродинамики ANSYS Fluent. Процесс синтеза бутилкаучука рассматривали на катализаторе $AlCl_3$ и в растворителе CH_3Cl при температуре синтеза ≥ 173 K.

Процесс синтеза бутилкаучука протекает по кинетической схеме, которая включает в себя реакции [2]:

1) инициирование $M_1(2) + C \xrightarrow{k_{i1}} M_1(1)$;

2) рост цепи

$$M_1(1) + M_1(2) \xrightarrow{k_{p11}} M_1(1) + M_1(0);\ M_1(1) + M_2(2) \xrightarrow{k_{p12}} M_2(1) + M_1(0);$$

$$M_2(1) + M_1(2) \xrightarrow{k_{p21}} M_1(1) + M_2(0);\ M_2(1) + M_2(2) \xrightarrow{k_{p22}} M_2(1) + M_2(0);$$

3) передача цепи

$$M_1(1) + M_1(2) \xrightarrow{k_{tr11}} K_1 + M_1(1);\ M_2(1) + M_1(2) \xrightarrow{k_{tr21}} K_2 + M_1(1);$$

4) обрыв цепи $M_1(1) \xrightarrow{k_{t1}} K_1$.

В связи с тем, что кинетика химической реакции моделируется в ANSYS Fluent с помощью закона сохранения массы, кинетическую схему здесь записали с помощью модифицированной концепции блоков связей [3], рассматривающей реакционную смесь как совокупность блоков связей – мономеров и фрагментов полимерных цепей постоянной массы. В этой схеме индексы 1 и 2 показывают тип блока связей (1 – изобутилен или изобутиленовое звено, 2 – изопрен или изопреновое звено); $M(2)$ – мономер (блок, способный образовывать еще 2 связи); $M(1)$ – активный конец цепи (блок, способный образовывать еще 1 связь); $M(0)$ – звено внутри цепи; C – $AlCl_3$ + H_2O; K – концевое звено цепи; k – константы скоростей соответствующих реакций. Скорость изменения концентраций блоков связей в ANSYS Fluent определяется по выражению

$$W_{ir} = (v'_{ir} - v_{ir}) k \prod_{j=1}^{N} C_j^{x_{jr}},$$

где v'_{ir} – стехиометрический коэффициент продукта i в реакции r; v_{ir} – стехиометрический коэффициент реагента i в реакции r; k – константа скорости элементарной реакции; C_j – концентрация блока связей j; x_{jr} – порядок реакции r по блоку связей j. Суммируясь для каждого блока связей по всем реакциям, в которых они образуются или расходуются, данные скорости определяют источниковые члены в уравнениях неразрывности по каждому из этих блоков связей. Моделирование макрокинетики в ANSYS Fluent представляет собой совместное решение уравнений неразрывности для всей реакционной смеси, неразрывности для каждого компонента реакционной смеси, уравнений сохранения импульса реакционной смеси, уравнений сохранения энергии реакционной смеси.

На модели макрокинетики процесса синтеза бутилкаучука провели численный эксперимент по следующему алгоритму. Сначала задали (на основе данных из работы [1]) эталонную геометрию трубчатого турбулентного реактора диффузор-конфузорной конструкции (рис. 1) и эталонные условия его работы: массовые доли вводимых метилхлорида, изобутилена, изопрена и хлорида алюминия, равные 0.68965, 0.3, 0.01 и 0.00035 соответственно; начальная температура реакционной смеси и температура хладоагента, этилена, в рубашке охлаждения 173 K (рубашка не изображена на рис. 1); коэффициент теплопередачи через стенку реактора 1500 Вт/(м^2·K); скорость ввода компонентов 1 м/с.

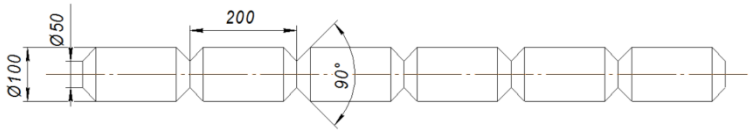


Рис. 1. Трубчатый турбулентный реактор диффузор-конфузорной конструкции

Данный трубчатый турбулентный реактор диффузор-конфузорной конструкции реализовали в ANSYS Fluent в виде расчетной сетки, а перечисленные условия его работы задали в виде граничных условий. Кроме этого, в ANSYS Fluent реализовали трубчатые турбулентные реакторы диффузор-конфузорной конструкции, отличные одним из параметров (в геометрии или условиях работы) от эталонного. Таким образом, провели расчеты макрокинетики рассматриваемого процесса в трубчатом турбулентном реакторе диффузор-

конфузорной конструкции при разных углах раскрытия диффузора, скоростях ввода реагентов и отношениях массового расхода изопрена к массовому расходу изобутилена (табл. 1). В каждом расчете определяли значения среднечисленной (M_n) и среднемассовой (M_w) молекулярных масс и коэффициента полидисперсности (PD) бутилкаучука на выходе из реактора усреднением этих значений для бутилкаучука, образующегося в каждой точке реактора (из расчета, что он имеет молекулярно-массовое распределение Флори [3]):

$$M_n = \frac{1}{\beta},\ M_w = \frac{2}{\beta},$$

$$\beta = \frac{k_{tr11}[M_{11}][M_{12}] + k_{tr12}[M_{11}][M_{22}] + k_{tr21}[M_{21}][M_{12}] + k_{t1}[M_{11}]}{mass(k_{p11}[M_{11}][M_{12}] + k_{p12}[M_{11}][M_{22}] + k_{p21}[M_{21}][M_{12}] + k_{p22}[M_{21}][M_{22}])},$$

где *mass* – молекулярная масса звена (принималась равной молекулярной массе изобутилена); β – статистический параметр Френкеля [3].

По значениям молекулярно-массовых характеристик, полученным в каждом из численных экспериментов, определили вязкость по Муни бутилкаучука (η) и прочность его серных вулканизатов с содержанием серы 2 % масс. (σ). Для этого использовали полуэмпирические зависимости, полученные в [2]:

$$\eta = 8.5 \cdot 10^{-18} M_w^{3.4} \exp[-0.043 \cdot 3.4(PD - 1)],$$

$$\sigma = -0.102\left(\frac{M_n}{100000}\right)^4 + 1.79\left(\frac{M_n}{100000}\right)^3 - 11.8\left(\frac{M_n}{100000}\right)^2 + 35.4\left(\frac{M_n}{100000}\right) - 16.2, \text{ МПа},$$

где η – вязкость по Муни бутилкаучука, σ – разрушающее напряжение при растяжении его серных вулканизатов.

Из результатов расчета (табл. 1.) можно сделать вывод, что бутилкаучук, полученный при условиях, указанных в табл. 1, – низкомолекулярный. Он имеет значение вязкости по Муни до 1.33, а прочность его серных вулканизатов менее 0.94 МПа. Такой бутилкаучук можно рекомендовать к применению в качестве герметика. Судя по табл. 1, сильнее всего на значение молекулярной массы бутилкаучука влияет массовая доля вводимого изопрена, поэтому для получения высокомолекулярного бутилкаучука в трубчатом турбулентном реакторе диффузор-конфузорной конструкции ее значение необходимо понижать.

Таблица 1.

Молекулярно-массовые характеристики, вязкость по Муни бутилкаучука и разрушающее напряжение при растяжении его серных вулканизатов

Условия	$M_n \cdot 10^{-4}$	$M_w \cdot 10^{-4}$	PD	η	σ, МПа
Эталонные	5.34	10.84	2.03	0.96	-
$w_{22}/w_{12} = 0.0166/0.3$	3.62	7.32	2.02	0.25	-
$w_{22}/w_{12} = 0.0133/0.3$	4.34	8.77	2.02	0.47	-
u = 0.25 м/с	4.43	9.11	2.06	0.53	-
u = 0.5 м/с	3.7	8.19	2.21	0.36	-
u = 2 м/с	5.60	11.35	2.03	1.13	0.23
u = 4 м/с	5.75	11.64	2.03	1.23	0.58
α = 45°	5.90	11.93	2.02	1.33	0.94
α = 60°	5.49	11.17	2.03	1.06	-
α = 135°	5.38	10.96	2.04	1.00	-
α = 180°	5.63	11.42	2.03	1.15	0.31
Указаны только отличные от эталонных условия: α – угол раскрытия диффузора, u – скорость ввода реагентов, w_{12} и w_{22} – массовые доли изобутилена и изопрена соответственно					

Работа выполнена в рамках государственного задания на 2017-2019 гг. (инициативный научный проект № 10.5548.2017/БЧ «Макрокинетика контролируемых и кинетически быстрых каталитических процессов (со)полимеризации виниловых и диеновых мономеров»).

Библиографический список

1. Sangalov Yu.A., Minsker K.S., Zaikov G.E. Polymers derived from isobutylene. Synthesis, properties, application. Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, Netherlands: VSP, 2001. – PP. 372.

2. Ulitin N.V., Tereshchenko K.A. // Russian Journal of Applied Chemistry, 2015. – V. 88, № 5. – P. 808–819.

3. Улитин Н.В., Терещенко К.А. Методы моделирования кинетики процессов синтеза и молекулярно-массовых характеристик полимеров. Казань: Казан. нац. исс. технол. ун-та, 2014. – С. 228.

Сведения об авторах

Терещенко Константин Алексеевич, кандидат химических наук, доцент кафедры технологии переработки полимеров и композиционных материалов КНИТУ, г. Казань. E-mail: nucleurmind@yandex.ru.

Улитин Николай Викторович, доктор химических наук, доцент, профессор кафедры технологии переработки полимеров и композиционных материалов КНИТУ, г. Казань. E-mail: n.v.ulitin@mail.ru.

Степанова Вероника Анатольевна, магистрант кафедры технологии переработки полимеров и композиционных материалов КНИТУ, г. Казань. E-mail: nika_stepanova@inbox.ru.

Ганиев Газинур Минсаетович, магистрант кафедры технологии переработки полимеров и композиционных материалов КНИТУ, г. Казань. E-mail: gazinnur@mail.ru.

Круглова Алена Евгеньевна, магистрант кафедры технологии переработки полимеров и композиционных материалов КНИТУ, г. Казань. E-mail: kruglova-alena@bk.ru.

Шиян Дарья Александровна, аспирант кафедры технологии переработки полимеров и композиционных материалов КНИТУ, г. Казань. E-mail: shiyan-daria@yandex.ru.

УДК 004.42

Титова А.А., Болтачев Э.Ф., Нафикова А.Р.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНОГО И ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПОЛОЖЕНИЯ Г. СТЕРЛИТАМАК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ АНАЛИЗА ДАННЫХ

В данной работе проводится анализ социального и экономического положения г. Стерлитамак, а также строится прогноз основных показателей при помощи пакета Microsoft Excel и программного продукта SPSS Statistics.

Ключевые слова: эконометрика, математические методы, статистический анализ, прогноз.

Titova A.A., Boltachev E.F., Nafikova A.R.

FORECASTING SOCIAL AND ECONOMIC STERLITAMAK PROVISIONS WITH USE MATHEMATICAL MODELS OF DATA ANALYSIS

In this work the social and economic situation of Sterlitamak is analyzed, and a forecast of key indicators is developed using the Microsoft Excel package and the SPSS Statistics software.

Key words: econometrics, mathematical methods, statistical analysis, forecast.

Актуальность темы данного исследования заключается в том, что на сегодняшний день важную роль по управлению развития городских округов, регионов играет анализ и прогнозирование социального и эко-

© Титова А.А., Болтачев Э.Ф., Нафикова А.Р., 2017

номического развития. В результате, по полученному прогнозу определяются цели социально-экономического развития регионов, уточняется, каких программных мероприятий следует придерживаться, и расставляются приоритеты в развитии регионального хозяйствования.

Предвидение будущего состояния экономики и социальной сферы является составной частью государственного регулирования экономики, которая призывает определять направления развития региональных комплексов и их структурных составляющих. А результаты прогнозных расчетов в дальнейшем применяются государственными органами для обоснования целей и задач социально-экономического развития, определения способов рационального использования ограниченных производственных ресурсов.

В настоящее время существует множество различных методов, обладающих своей областью применения и своими особенностями. Например, применение одного из них в разных условиях может дать разрозненные результаты.

При переходе к рыночным отношениям применение эконометрических моделей в целях прогнозирования сложных статистических совокупностей становится актуальным, поскольку инструмент, применяемый для анализа, адекватен анализируемому объекту рыночной экономике [1].

Анализ различной статистической информации можно упростить, используя специальные программы, такие как SPSS Statistics, SYSTAT (универсальная статистическая система), STADIA (отечественный статистический пакет), а также STADGRAPHICS 5.1.

Проведение анализа социально-экономического положения г. Стерлитамак и построение прогноза для каждого показателя включает в себя следующие этапы:

1) Сбор и обработка исходных данных для предварительного анализа и проведения расчетов при помощи пакета Microsoft Excel.

2) Применение статистических методов обработки и классификации анализируемых данных.

3) Проверка полученных социально-экономических показателей на адекватность и точность.

4) Построение прогноза в программном продукте SPSS Statistics.

Программный продукт IBM SPSS Statistics является полнофункциональной статистической системой, предназначенной для решения исследовательских и бизнес-задач при помощи анализа данных. IBM

SPSS Statistics предназначен для поддержки всех этапов аналитического процесса [2]:

- планирование исследования;
- сбор данных;
- доступ и управление данными;
- всесторонний анализ;
- создание отчетов;
- хранение и распространение результатов.

Первый этап представляет собой сбор необходимой информации социально-экономической статистики г. Стерлитамак за период с 2004 по 2016 гг.

Второй этап включает в себя преобразование исходных данных в удобный для анализа формат из *.doc в *.xlsx.

Далее были произведены статистические расчеты в пакете Microsoft Excel, такие как: построение диаграмм исходного ряда, проверка наличия аномальных значений с помощью критерия Ирвина, проведение сглаживания ряда при необходимости, проверка наличия тренда, построение интервального и точечного прогнозов на два периода вперед.

На третьем этапе проводится проверка полученных результатов на адекватность и точность для подтверждения, что данные расчеты можно считать реалистичными.

Следующим этапом послужит построение прогноза в программном продукте SPSS Statistics с целью сравнения с полученными прогнозными значениями в Microsoft Excel.

Библиографический список

1. Эльдяева Н.А. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе: проблемы построения моделей прогнозирования // Вестник АГТУ. – 2006. – № 4. – С. 225–230.

2. Predictive Solutiions [Электронный ресурс]: сайт / IBM SPSS Statistics. – URL: www.predictivesolutions.ru (дата обращения: 23.03.2017).

Сведения об авторах

Титова Анастасия Алексеевна, студентка экономического факультета СФ БашГУ. E-mail: Nastya_t1995@mail.ru.

Болтачев Эльдар Филаридович, начальник штаба Управления МВД России по г. Стерлитамак, подполковник внутренней службы. E-mail: eboltachiov@mvd.ru.

Нафикова Альбина Ринатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования СФ БашГУ. E-mail: albinabikbaeva@gmail.com.

УДК 004.4

Тихонов Э.Ю., Вильданов А.Н.

РАЗРАБОТКА ANDROID-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ БАЗОЙ ДАННЫХ В WEB

В статье рассматривается процесс создания Android-приложения, с помощью которого осуществляется просмотр и редактирование СУБД MySQL на сервере. Описаны алгоритмы и инструменты, необходимые для создания подобного интерфейса.

Ключевые слова: Java, Android, MySQL, парсинг, Jsoup.

Vildanov A.N., Tikhonov E.Yu.

ANDROID APPLICATION DEVELOPMENT FOR DATABASE MANAGEMENT ON THE WEB

The article discusses the process of creating an Android application, through which you can view and edit the MySQL database on the server. Described the algorithms and tools necessary to create such an interface.

Key words: Java, Android, MySQL, parsing, Jsoup

В настоящее время операционная система Android становится все более и более популярной, в особенности на рынке смартфонов, из-за ее открытого исходного кода и бесплатных средств разработки. Разработчикам предоставляется многофункциональная аппаратная платформа Android Studio и Android SDK, которые включают в себя все необходимые инструменты разработки под Android и помогают Android-разработчикам уменьшить затрачиваемые усилия на реализацию их идей. Эти и другие плюсы делают Android привлекательным для разработчиков.

Целью работы является разработка информационного приложения для смартфонов под управлением операционной системы Android с возможностью просмотра базы данных MySQL (на примере СУБД процессоров и их характеристик), а также предоставляющего операции над этой базой – добавление, удаление и изменение записей.

Для достижения поставленной цели следует решить следующие задачи:

© Тихонов Э.Ю., Вильданов А.Н., 2017

– установить Java и инструменты разработки Android Studio и SDK Tools, эмулятор Genymotion;

– разработать классы запросов вывода, удаления, редактирования и добавления данных с использованием асинхронных методов AsyncTask;

– создать класс Activity, отвечающий за отображение списка процессоров с их характеристиками и удаление отдельных элементов из списка;

– добавление возможности просмотра подробной информации о выбранном процессоре;

– настройка контекстного меню с операциями удаления и редактирования записей, разделение этих операций в соответствующие классы Activity;

– определение взаимодействия и переходов между различными Activity, вызовов с помощью Intent.

Пусть имеется база данных MySQL, опубликованная на хостинге (рис. 1):

CPU	Модель	Архитектура	Частота, ГГц	Количество ядер	Количество потоков
AMD	Core i3-6100	64	3.5	4	8
AMD	A10-7870K	64	3.9	4	4
Intel	Intel Celeron G3920	32	3.2	2	4
Intel	Core i3-6098P	64	3.8	4	8
Intel	Pentium G3240	64	2.8	4	4
Intel	Core i3-4330	64	3.1	4	8
AMD	Athlon II X2 370K	64	4.2	4	4
AMD	A6-7400K	64	3.3	4	8
AMD	Athlon X4 880K	64	3.4	4	4

Рис. 1. Таблица процессоров и их характеристик

Чтение данных таблицы БД осуществляется с помощью парсинга [1]. Под парсингом сайтов обычно понимают синтаксический анализ информации, размещенной на интернет-страницах. Парсинг сайтов является эффективным решением для автоматизации сбора и изменения информации. Парсинг html-страницы представляет из себя процесс, который можно разбить на три этапа [1]:

– получение исходного кода веб-страницы;

– извлечение из html-кода необходимых данных;

– обработка данных и представление полученного результата.

Зачастую важно подготовить исследуемые страницы, чтобы упростить и ускорить их парсинг. Для упрощения парсинга ячейкам присвоены дополнительные атрибуты. Например, для первой записи из таблицы html-код будет представлен следующим образом:

```
<tr id="1">
<td id="cpu">AMD</td>
<td id="model">Core i3-6100</td>
<td id="arch">64</td>
<td id="freq">3.5</td>
<td id="core">4</td>
<td id="threads">8</td>
</tr>
```

Для парсинга веб-страницы на языке Java используется библиотека Jsoup. Jsoup – это open-source Java-библиотека для работы с HTML и XML [2]. Она обеспечивает удобный API для извлечения и манипулирования данными, используя DOM, CSS, и JQuery-подобные методы.

Например, Jsoup упрощает получение ссылок, содержащихся в HTML-документе, элементов указанного класса, и т.д. Причем к содержимому (тексту) и атрибутам результата можно легко обратиться с помощью встроенных в Jsoup методов. Также Jsoup предоставляет достаточно простой и внятный инструментарий для отправки запросов на сервер и для работы с cookies.

Сначала загружается веб-страница с адресом serverURL с таблицей:

```
doc = Jsoup.connect( serverURL ).get();
```

Переменная doc представляет собой не просто содержимое веб-страницы, а структурное дерево ее веб-элементов, к которым теперь можно легко обращаться через специальный инструментарий Jsoup.

Например, получение идентификаторов записей выглядит следующим образом:

```
Elements ids = doc.select( "tr[id]" ),
```

где tr[id] – это строка таблицы, у которой определен атрибут id, а для названия модели:

```
Elements models = doc.select( "td#model" ),
```

где td#model – это элемент таблицы, у которой идентификатор является model (id="model"). Для вывода расписания используется виджет ListView, который представляет собой обычный прокручиваемый список элементов (рис. 2):

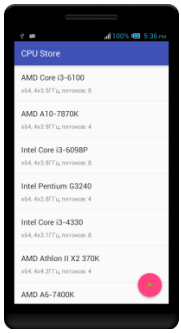


Рис. 2 Таблица в Android.

С помощью класса FloatingActionButton отображается круглая кнопка, плавающая над интерфейсом и отражающая главное действие в приложении (рис. 2). С помощью этого элемента в дальнейшем будет осуществляться добавление новой записи.

Обработчик событий onContextItemSelected(MenuItem item) контекстного меню вызывается при долгом нажатии на элемент и позволяет открыть меню для редактирования записи или удалить ее (рис. 3).

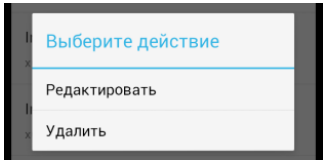


Рис. 3. Контекстное меню элемента списка.

Для добавления данных нужно отправить запрос на сервер скрипту insert.php. Аналогично разработано редактирование и изменение уже имеющихся данных, их удаление. В заключение нужно отметить, что каждое обращение к серверу происходит в отдельных потоках, которые создаются с помощью класса AsyncTask.

Библиографический список

1. Вильданов А.Н. Парсинг HTML-документа на языке Java (на примере расписания НФ БашГУ) // Достижения и приложения современной информатики, математики и физики: материалы V Всероссийской научно-практической заочной конференции. – г. Нефтекамск, 2016. – С. 17–25. – ISBN 978-5-7477-4280-2.

2. Jonathan Hedley. Jsoup Java HTML Parser, with best of DOM, CSS, and jquery [Электронный ресурс]. URL: https://jsoup.org (дата обращения: 01.11.2016).

Сведения об авторах

Тихонов Эдуард Юрьевич, студент Нефтекамского филиала ФГБОУ ВО БашГУ. E-mail: asenar.estp@gmail.com.

Вильданов Алмаз Нафкатович, кандидат физико-математических наук, доцент Нефтекамского филиала ФГБОУ ВО БашГУ. E-mail: alvild@mail.ru.

УДК 004.023

Тухватуллин Э.Р., Валиахметова Ю.И.

ДЕКОМПОЗИЦИЯ МНОГОСВЯЗНОГО ОРТОГОНАЛЬНОГО ПОЛИГОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ С МИНИМИЗАЦИЕЙ ПРОТЯЖЁННОСТИ СТЫКОВ

В данной работе рассматривается задача декомпозиции многосвязного ортогонального полигона на минимальное количество прямоугольных областей с минимизацией протяжённости стыков между ними. Приведена общая постановка задачи, предложен алгоритм.

Ключевые слова: декомпозиция, ортогональные полигоны, покрытие, минимизация, запретные зоны

Tukhvatullin E.R., Valiakhmetova Y.I.

DECOMPOSITION OF A MULTIPLY-CONNECTED ORTHOGONAL POLYGON INTO RECTANGULAR AREAS WHILE MINIMIZING LENGTH OF JOINTS

In this paper we consider the problem of decomposition of a multiply-connected orthogonal polygon into rectangular areas while minimizing length of joints. We show the general formulation of the problem, we propose an algorithm to minimize length of joints.

Key words: decomposition, rectilinear polygons, covering, minimization, forbidden zones

Введение. Существует большой класс задач, в которых необходимо покрыть многосвязный ортогональный полигон (МОП). Они различаются ограничениями и условиями, а встречаются во многих сферах человеческой жизнедеятельности – от компьютерной графики до проектирования интегральных схем.

© Тухватуллин Э.Р., Валиахметова Ю.И., 2017

Решение таких задач обычно состоит из декомпозиции исходной области и последующего покрытия с соблюдением заданных условий. Очевидно, что качество покрытия напрямую зависит от результата декомпозиции. [1]

В настоящей статье предложен алгоритм декомпозиции МОП, ориентированный на разновидность задач, в которых необходимо разбить МОП на минимальное количество прямоугольников и снизить суммарную протяжённость стыков между отрезами покрывающего материала, что актуально на производстве, где дорогостоящей является их обработка. Описана программная реализация разработанного метода.

Постановка задачи. Рассматриваемую задачу декомпозиции можно разделить на две подзадачи: (1) разбиение МОП на минимальное количество прямоугольников и (2) минимизация протяжённости стыков.

Разбиение МОП на минимальное количество прямоугольников. В общем случае имеется прямоугольная рабочая область с заданными размерами, а также набор так называемых запретных зон, что в совокупности образует МОП. [2] В данном случае МОП определён с помощью двумерной бинарной матрицы.

Исходные данные: МОП MOP, представленный в виде двумерной бинарной матрицы M размерностью $(W \times H)$, где W – ширина, а H – высота минимального охватывающего прямоугольника MOP соответственно. Запретные зоны MOP обозначены нулевыми элементами матрицы, а рабочая область (оставшаяся площадь) – единичными.

Необходимо представить рабочую область в виде множества $R = \{r_1, \dots r_n\}$ непересекающихся прямоугольников минимальной мощности, где $r_i = \{x_i^1, x_i^2, y_i^1, y_i^2\}, i = \overline{1,n}$ – прямоугольник, заданный вершинами (x_i^1, y_i^1), (x_i^2, y_i^1), (x_i^1, y_i^2) и (x_i^2, y_i^2). Целевая функция: $|R| \to min$.

Условимся, что $M(x_i^1, x_i^2, y_i^1, y_i^2) = 0$ означает, что каждый элемент матрицы M в строках с y_i^1 по y_i^2 и в столбцах с x_i^1 по x_i^2 становится нулевым. Введём также понятие сканирующего луча. Сканирующий луч B – это тройка $B = \{\gamma, \alpha, \omega\}$, где γ – текущая строка матрицы M, α, ω – начало и конец проверяемой подстроки строки γ соответственно. Будем говорить, что:

1. $B(\gamma, \alpha) = 1$, если элемент $M(\gamma, \alpha) = 1$.
2. $B(\gamma, \alpha, \omega) = 1$, если соответствующая подстрока не содержит нулей.
3. $B(\gamma, \alpha - 1) = 0$, если существует элемент $M(\gamma, \alpha - 1) = 0$ или $\alpha = 0$.
4. $B(\gamma, \omega + 1) = 0$, если существует элемент $M(\gamma, \omega + 1) = 0$ или $\omega = 0$.

Разбиение выполняется с помощью анализа матрицы сканирующим лучом B (рис. 2), находящим вершины прямоугольников следующим образом:

НАЧАЛО, $\gamma = 0, \alpha = 0, \omega = 0$
НАЧАЛО ЦИКЛА
ЕСЛИ $B(\gamma, \alpha) = 1$, то $\omega = \alpha$ и ВЫХОД ИЗ ЦИКЛА
ИНАЧЕ ЕСЛИ $\alpha < W$, то $\alpha = \alpha + 1$
ИНАЧЕ ЕСЛИ $\gamma < H$, то $\alpha = 0$ и $\gamma = \gamma + 1$
ИНАЧЕ КОНЕЦ.
КОНЕЦ ЦИКЛА
$x_i^1 = x_i^2 = \alpha$, $y_i^1 = y_i^2 = \gamma$
НАЧАЛО ЦИКЛА
ПОКА $B(\gamma, \omega) = 1$,
$x_i^2 = \omega$
ЕСЛИ $\omega < W$, то $\omega = \omega + 1$
ИНАЧЕ ВЫХОД ИЗ ЦИКЛА
КОНЕЦ ЦИКЛА
НАЧАЛО ЦИКЛА
ПОКА ($B(\gamma, \alpha - 1) = 0$ ИЛИ $B(\gamma, \omega + 1) = 0$) И $B(\gamma, \alpha, \omega) = 1$
$y_i^2 = \gamma$
ЕСЛИ $\gamma < H$, то $\gamma = \gamma + 1$
ИНАЧЕ ВЫХОД ИЗ ЦИКЛА
КОНЕЦ ЦИКЛА
ДОБАВИТЬ $r_i = \{x_i^1, x_i^2, y_i^1, y_i^2\}$ в R, $M(x_i^1, x_i^2, y_i^1, y_i^2) = 0$
КОНЕЦ

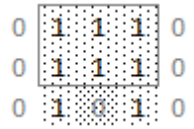


Рис. 1. Пример работы сканирующего луча

Минимизация протяжённости стыков. Исходные данные: множество прямоугольников R, полученное в результате решения предыдущей подзадачи.

Необходимо уменьшить суммарный периметр, не увеличивая количество прямоугольников. Целевая функция: $\sum_{i=1}^{n} P(r_i) \to min$, где $P(r_i)$ – периметр r_i, $i = \overline{1,n}$.

Обозначим соотношение сторон r_i как $rat(r_i)$, где $rat(r_i) = \frac{x_i^2 - x_i^1}{y_i^2 - y_i^1}$, если $x_i^2 - x_i^1 < y_i^2 - y_i^1$ или $rat(r_i) = \frac{y_i^2 - y_i^1}{x_i^2 - x_i^1}$, если $x_i^2 - x_i^1 \geq y_i^2 - y_i^1$.

Протяжённость стыков напрямую зависит от соотношения сторон каждой фигуры: наименьшее значение достигается при соотношении сторон, равному единице. [1] Следовательно, выполнить поставленную задачу можно реорганизацией имеющегося множества прямоугольников.

Введём понятие соседа: прямоугольник $e_j^i \in E_i$ – это некоторый прямоугольник $r_k \in R$, удовлетворяющий следующим условиям:

- e_j^i имеет общие точки с r_i;
- $((y_{i_j}^1 = y_i^1$ или $y_{i_j}^2 = y_i^2)$ и $\left(y_{i_j}^2 - y_{i_j}^1\right) \geq (y_i^2 - y_i^1))$ или $((x_{i_j}^1 = x_i^1$ или $x_{i_j}^2 = x_i^2)$ и $\left(x_{i_j}^2 - x_{i_j}^1\right) \geq (x_i^2 - x_i^1))$, где $E_i = \{e_j^i\}$ – множество соседей для r_i, $i, k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,g}, n = |R|, g = |E_i|$.

Определим также операцию объединения $U(r_i, e_j^i)$:

- Если $x_{i_j}^2 = x_i^1$, то:
  - Если $y_{i_j}^1 = y_i^1$, то $y_{i_j}^1 = y_i^2$ и $x_i^1 = x_{i_j}^1$;
  - Если $y_{i_j}^2 = y_i^2$, то $y_{i_j}^2 = y_i^1$ и $x_i^1 = x_{i_j}^1$;
- Если $x_{i_j}^1 = x_i^2$, то:
  - Если $y_{i_j}^1 = y_i^1$, то $y_{i_j}^1 = y_i^2$ и $x_i^2 = x_{i_j}^2$;

- Если $y_{i_j}^2 = y_i^2$, то $y_{i_j}^2 = y_i^1$ и $x_i^2 = x_{i_j}^2$;
- Если $y_{i_j}^2 = y_i^1$, то:
- Если $x_{i_j}^1 = x_i^1$, то $x_{i_j}^1 = x_i^2$ и $y_i^1 = y_{i_j}^1$;
- Если $x_{i_j}^2 = x_i^2$, то $x_{i_j}^2 = x_i^1$ и $y_i^1 = y_{i_j}^1$;
- Если $y_{i_j}^1 = y_i^2$, то:
- Если $x_{i_j}^1 = x_i^1$, то $x_{i_j}^1 = x_i^2$ и $y_i^2 = y_{i_j}^2$ (рис. 2);
- Если $x_{i_j}^2 = x_i^2$, то $x_{i_j}^2 = x_i^1$ и $y_i^2 = y_{i_j}^2$;

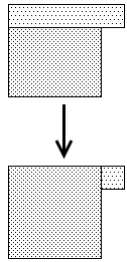


Рис. 2. Пример выполнения операции U

Вышеописанная операция объединения $U(r_i, e_j^i)$ применяется при следующих условиях:

- $rat(r_i) < value$,
- $\forall e_l^i \; rat\left(U\left(r_i, e_l^i\right)\right) < rat\left(U\left(r_i, e_j^i\right)\right)$,
- $rat\left(U\left(r_i, e_j^i\right)\right) > rat(r_i)$,

где $value$ – заданный экспертом порог соотношения сторон, $i = \overline{1,n}, j, l = \overline{1,g}\,, j \neq l$.

Уменьшение протяжённости стыков выполняется следующим образом:

НАЧАЛО
ДЛЯ КАЖДОГО r_i НАЙТИ E_i
ПОКА $\exists e_j^i \epsilon E_i$ И $rat\left(U\left(r_i, e_j^i\right)\right) > rat(r_i)$
ДЛЯ КАЖДОГО r_i
ЕСЛИ $E_i \neq \emptyset$ ВЫПОЛНИТЬ $U\left(r_i, e_j^i\right)$
КОНЕЦ

Вышеописанные алгоритмы могут быть модифицированы: например, изменены начальная точка и направление движения луча, что даст другое итоговое разбиение в подзадаче 1, или изменён порядок обработки множества R. В данный момент разрабатывается ПО, с помощью которого будет проведён анализ эффективности описанных алгоритмов.

Библиографический список

1. Хабиров А.А., Тухватуллин Э.Р., Валиахметова Ю.И. Декомпозиция многосвязного ортогонального полигона на прямоугольные области с минимизацией периметра // Материалы V Всероссийской научно-практической конференции «Математическое моделирование процессов и систем»: / г. Стерлитамак, 17–19 ноября 2016 г. Часть III, стр. 222–226.

2. Tukhvatullin E., Khabirov A., Valiakhmetova Y. Solving The Problem Of Rectangular Cutting The Material Into Complex Shaped Blanks With The Use Of Multimethod Algorithm With Liberal Heuristics // Proceeding of the 1th International Workshop on Technologies of Digital Signal Processing and Storing (DSPTech’2015) / Ufa, Russia. December 10–13, 2015. Volume 1. – p. 116–119.

Сведения об авторах

Тухватуллин Эмиль Рамилевич, студент УГАТУ. E-mail: tukhvatullin.emil.it@gmail.com.

Валиахметова Юлия Ильясовна, кандидат технических наук, доцент кафедры УГАТУ. E-mail: julikas@inbox.ru.

УДК 541(64 +127):544.433.22

**Улитин Н.В., Терещенко К.А., Зиганшина А.С.,
Шиян Д.А., Захаров В.П.**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДИСПЕРГИРОВАНИЯ ЧАСТИЦ ТИТАНОВОЙ КАТАЛИТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ

С использованием платформы ANSYS Workbench проведено моделирование процесса диспергирования частиц титановой каталитической системы при формировании реакционной смеси ионно-координационной полимеризации бутадиена в турбулентных потоках.

Ключевые слова: макрокинетика, молекулярно-массовые характеристики, полибутадиен, трубчатый турбулентный аппарат диффузор-конфузорной конструкции

**Ulitin N.V., Tereshchenko K.A., Ziganshina A.S.,
Shiyan D.A., Zakharov V.P.**

MODELING OF THE TITANIUM CATALYTIC SYSTEM PARTICLES DISPERSION PROCESS IN TURBULENT FLOWS

Using ANSYS Workbench platform, the particles dispersion process of titanium catalytic system was simulated during the formation of a reaction mixture of butadiene ionic coordination polymerization in turbulent flows.

Key words: macrokinetics, molecular weight characteristics, polybutadiene, tubular turbulent apparatus of a diffuser-confuser design

В случае процесса полимеризации бутадиена на приготовленной *отдельно* каталитической системе TiCl_4-*Al*(*i*-$C_4H_9)_3$ формирование реакционной смеси в турбулентных потоках приводит к изменению дисперсного состава каталитической системы и, как следствие, к перераспределению концентраций центров роста полимерных цепей различных типов, ускорению процесса полимеризации и изменению молекулярно-массовых характеристик образующегося полибутадиена [1–6]. Целью настоящей работы стало моделирование процесса диспергирования частиц каталитической системы TiCl_4-*Al*(*i*-$C_4H_9)_3$.

Полимеризацию в работах [1–6] проводили так: со скоростью 0.9 м/с подавали толуольные растворы бутадиена и выдержанной при 0 °C в течение 30 мин каталитической системы TiCl_4-*Al*(*i*-$C_4H_9)_3$ в трубчатый турбулентный аппарат (диаметр диффузора D = 24 мм, диаметр

© Улитин Н.В., Терещенко К.А., Зиганшина А.С., Шиян Д.А., Захаров В.П., 2017

конфузора d = 15 мм, длина секции L = 48 мм, угол раскрытия диффузора α = 45° – см. рис. 1), после чего смесь поступала в реактор смешения, в котором при постоянном перемешивании вели полимеризацию (25 °C).

Для моделирования использовали модульную платформу ANSYS Workbench 17.1. Сначала в модуле Geometry построили осевое сечение турбулентного аппарата. После чего в модуле Mesh разбили расчетную область на ячейки. Затем в модуле Fluent включили модель многофазной несжимаемой среды: дисперсионная среда – смесь толуола и бутадиена, дисперсная фаза – частицы каталитической системы TiCl_4-Al(i-C_4H_9)$_3$. Формирование смеси в турбулентных потоках описывается системой, состоящей из уравнений неразрывности, сохранения импульса и сохранения энергии для реакционной смеси [7], уравнения для расчета относительной скорости фаз [7], уравнения для расчета изменения объемной доли дисперсной фазы [7], уравнений K-ε модели турбулентности [7] и уравнений модели популяционного баланса [8]. Параметры модели популяционного баланса подобрали так, чтобы рассчитанное в модуле Fluent распределение частиц каталитической системы TiCl_4-Al(i-C_4H_9)$_3$ по эквивалентному радиусу после их диспергирования в турбулентном аппарате совпало с экспериментальным распределением (рис. 2).

В работах [1, 3, 4, 6] установили, что в процессе полимеризации бутадиена, проводимом без формирования смеси в турбулентных потоках, на поверхности частиц каталитической системы TiCl_4-Al(i-C_4H_9)$_3$ содержатся центры роста цепей четырех типов, отличающихся друг от друга кинетической активностью (под кинетической активностью центров роста цепей определенного типа понимается произведение константы скорости реакции роста цепи на центрах этого типа и концентрации центров этого типа). В случае же формирования смеси в турбулентных потоках центры роста цепей 1-го типа, производящие самую низкомолекулярную фракцию полибутадиена, отсутствуют [1, 3, 4, 6]. В работе [5] установили, что кинетические активности центров роста цепей зависят от размеров частиц каталитической системы TiCl_4-Al(i-C_4H_9)$_3$. Аппроксимировав зависимости относительных кинетических активностей s_j центров роста цепей различных типов (здесь j – это номер типа центров роста цепей) от эквивалентного радиуса r (в мкм) частиц, на поверхности которых эти центры расположены, получили следующие формулы:

$$s_1 = a((r/3.39)^{-7.42} + (0.0785 - 0.00181r)^{-1})^{-1}, \qquad s_3 = a(0.375 + 0.00448r),$$

$$s_2 = a(0.595 - 0.00886r) - s_1, \qquad s_4 = a(0.03 + 0.00438r),$$

где $a = 0.01$ мин$^{-1}$ – без турбулизации смеси; $a = 0.0405$ мин$^{-1}$ – с турбулизацией смеси.

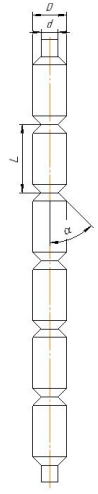


Рис. 1. Эскиз турбулентного аппарата: D – диаметр диффузора, d – диаметр конфузора, L – длина диффузор-конфузорной секции, α – угол раскрытия диффузора

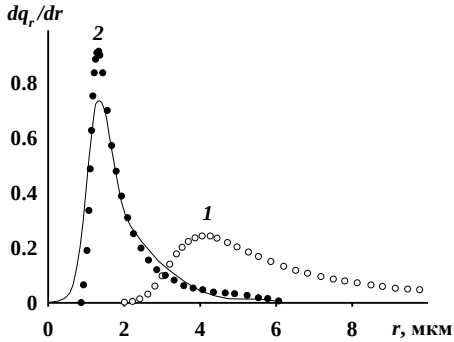


Рис 2. Распределения частиц каталитической системы $TiCl_4$-Al(i-C_4H_9)$_3$ по эквивалентному радиусу на входе в турбулентный аппарат (1) и на выходе из него (2); точки – эксперимент [2]; линии – расчет

Разные значения параметра *a* для случаев без формирования и с формированием смеси в турбулентных потоках говорят о том, что значение этого параметра зависит от суммарной площади поверхности частиц каталитической системы. Кинетические активности s_j характеризуют активности центров роста цепей, расположенных на поверхности частиц каталитической системы монодисперсного состава. Переход от s_j к активностям S_j центров роста цепей, расположенных на поверхности частиц каталитической системы полидисперсного состава, осуществляется в виде суперпозиции:

$$S_j = \int_0^\infty s_j \frac{dq_r}{dr} dr ,$$

где q_r – распределение частиц каталитической системы по эквивалентному радиусу. Сопоставление рассчитанных по этой формуле значений и экспериментальных значений S_j приведено в табл. 1.

Разработанная модель позволяет оценивать влияние турбулентности, развиваемой в турбулентных аппаратах, на размеры частиц каталитической системы, а через них – и на кинетические активности центров роста цепей, расположенных на поверхности частиц титановой каталитической системы полидисперсного состава. Введенный нами параметр a для каждых новых размеров аппарата необходимо пересчитывать относительно величины $a = 0.0405$ мин$^{-1}$, установленной для рассмотренного в этой работе аппарата, по формуле, учитывающей суммарную площадь поверхности частиц:

$$a = 0.0405 \int_0^\infty \frac{dq_r}{dr} \frac{Surf_r}{V_r} dr \Bigg/ \int_0^\infty \frac{dq_{r,эт}}{dr} \frac{Surf_r}{V_r} dr = 0.0405 \int_0^\infty \frac{dq_r}{dr} \frac{dr}{r} \Bigg/ \int_0^\infty \frac{dq_{r,эт}}{dr} \frac{dr}{r},$$

где $Surf_r$ и V_r – площадь поверхности и объем одной частицы радиусом r; $q_{r,эт}$ – распределение частиц каталитической системы по радиусу после пропускания смеси через турбулентный аппарат, рассмотренный в этой работе.

Таблица 1.

Кинетические активности S_j центров роста цепей, находящихся на поверхности частиц каталитической системы TiCl_4-Al(i-C_4H_9)$_3$ различного дисперсного состава

Условия формирования смеси	$S_1 \times 10^3$, мин$^{-1}$	$S_2 \times 10^3$, мин$^{-1}$	$S_3 \times 10^3$, мин$^{-1}$	$S_4 \times 10^3$, мин$^{-1}$
без турбулизации	0.51 (0.58)*	2.90 (2.83)	2.43 (2.59)	0.30 (0.32)
с турбулизацией	0 (0)	22.60 (22.80)	15.50 (15.70)	1.55 (1.78)
* в скобках указаны экспериментальные значения [1, 3, 4, 6]				

Данные о кинетических активностях центров роста цепей могут использоваться в качестве начальных условий при моделировании (макро)кинетики полимеризации бутадиена.

Работа выполнена в рамках государственного задания на 2017–2019 гг. (инициативный научный проект № 10.5548.2017/БЧ «Макрокинетика контролируемых и кинетически быстрых каталитических процессов (со)полимеризации виниловых и диеновых мономеров»).

Библиографический список

1. Мингалеев В.З., Захаров В.П., Монаков Ю.Б. Полимеризация бутадиена на титановом катализаторе при формировании реакционной смеси в турбулентных потоках // Журнал прикладной химии, 2007. – Т. 80, № 7. – С. 1160–1165.

2. Мингалеев В.З., Захаров В.П., Монаков Ю.Б. Изменение размеров частиц титанового катализатора в начальный период полимеризации бутадиена // Известия высших учебных заведений. Серия: Химия и химическая технология, 2008. – Т. 51, № 9. – С. 63–65.

3. Захаров В.П., Мингалеев В.З., Монаков Ю.Б. О диффузионных ограничениях при полимеризации бутадиена на кинетически неоднородном титановом катализаторе // Доклады Академии наук, 2008. – Т. 422, № 4. – С. 487–489.

4. Мингалеев В.З., Захаров В.П., Ионова И.А., Мусин А.А., Урманчеев С.Ф., Берлин А.А., Монаков Ю.Б. Кинетическая неоднородность титанового катализатора при интенсификации перемешивания реакционной смеси в процессе полимеризации бутадиена // Высокомолекулярные соединения, 2008. – Т. 50(А), № 12. – С. 2174–2180.

5. Мингалеев В.З., Захаров В.П., Тимофеев П.В., Тайбулатов П.А., Глухов Е.А., Монаков Ю.Б. Дисперсность титанового катализатора и кинетические параметры стереоспецифической полимеризации бутадиена // Вестник Башкирского университета, 2009. – Т. 14, № 3. – С. 743–745.

6. Мингалеев В.З., Захаров В.П., Захарова Е.М., Монаков Ю.Б. Кинетическая неоднородность титановой каталитической системы при малых конверсиях бутадиена // Вестник Башкирского университета, 2011. – Т. 16, № 3. – С. 691–693.

7. ANSYS Fluent Theory Guide. Southpointe: ANSYS, Inc., 2011. – PP. 862.

8. Coulaloglou C.A., Tavlarides L.L. Description of interaction processes in agitated liquid-liquid dispersions // Chemical Engineering Science, 1977. – V. 32 – P. 1289–1297.

Сведения об авторах

Улитин Николай Викторович, доктор химических наук, доцент, профессор кафедры технологии переработки полимеров и композиционных материалов КНИТУ, г. Казань. E-mail: n.v.ulitin@mail.ru.

Терещенко Константин Алексеевич, кандидат химических наук, доцент кафедры технологии переработки полимеров и композиционных материалов КНИТУ, г. Казань. E-mail: nucleurmind@yandex.ru.

Зиганшина Айгуль Саитовна аспирант кафедры технологии переработки полимеров и композиционных материалов КНИТУ, г. Казань. E-mail: aygul.ziganshina.89@mail.ru.

Шиян Дарья Александровна, аспирант кафедры технологии переработки полимеров и композиционных материалов КНИТУ, г. Казань. E-mail: shiyan-daria@yandex.ru.

Захаров Вадим Петрович, доктор химических наук, профессор, проректор по науке Баш ГУ, г. Уфа. E-mail: zaharovVP@bashedu.ru.

УДК 342.7

Усманова Р.М., Алешин П.Н.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ЮРИДИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ, РЕАЛИЗУЕМОЙ ПРИ ПОМОЩИ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

В работе анализируются наиболее популярные методы компьютерной математики, реализованной при помощи современных информационных технологий: логическое моделирование и математическая статистика.

Ключевые слова: компьютерная математика, статистика, правотворчество, нормативный акт, справочно-правовые системы.

Usmanova R.M., Aleshin P.N.

THE USE OF COMPUTER MATHEMATICS, IMPLEMENTED WITH THE HELP OF MODERN INFORMATION TECHNOLOGIES IN LEGAL EDUCATION

The work analyzes the most popular methods of computer mathematics, implemented with the help of modern information technology: logical modeling and mathematical statistics.

Keywords: computer mathematics, statistics, law, regulation, legal-reference system.

Во всех сферах современного образования ведутся поиски способов повышения и качества обучения с использованием компьютерной математики, реализованной при помощи современных информа-

© Усманова Р.М., Алешин П.Н., 2017

ционных технологий. Их применение в образовательном процессе юридического вуза дает возможность реализовать идеи развивающего обучения.

Стоит отметить, что сама по себе юриспруденция уже является той областью для применения формализованных (системных) и научных приемов мышления, приемов математического аппарата, позволяющих найти однозначные, логичные и точные решения. Здесь одним из наиболее важных направлений использования математических методов в юридической деятельности и государственном управлении является правотворчество [4, с. 12].

Изначально все правовые нормы выстроены по форме логических суждений, следовательно, с целью их изучения может и должна использоваться математическая логика. На сегодняшний день это реализуется, к примеру, в составлении юридических комментариев к правовым нормам. Так, применение средств и методов математической логики в правотворческом процессе позволяет:

- отразить хронологическую взаимосвязь в эволюции нормативного акта;
- обеспечить наличие полной справочной информации о документе;
- предупредить об ошибках и опечатках в текстах нормативных актов;
- улучшить редакцию правовых норм, устранить нечеткие формулировки, упростить громоздкие структуры;
- исследовать нормативно-правовой акт на непротиворечивость;
- символически представить юридические знания для их дальнейшей автоматизированной обработки и компьютеризированного поиска, промоделировать логическую структуру правовой нормы;
- совершенствовать уровень логической завершенности правовых актов и норм права, совершенствовать их логическую структуру;
- уточнить логический смысл и содержание правовых норм путем их толкования;
- проводить логическую экспертизу нормативных правовых актов [1, с. 42].

Таким образом, логическое моделирование предоставляет юристу возможность наглядно отразить для себя логическую структуру правовой нормы. Это особенно важно, если учесть, что словесная форма правовых норм может нередко непонятна для лиц, не имеющих соответствующих компетенций в исследуемой сфере.

Учитывая особую значимость применения компьютерных технологий при подготовке юристов в вузах, наиболее крупные справочно-правовые системы, такие как «Консультант Плюс», «Гарант», «Кодекс» активно внедряют новые информационные блоки, выстроенные на основе методов математической логики. Так, например, Информационный блок «Энциклопедия. Законодательство в схемах» системы Гарант – это схематичная подача информации, которая позволяет быстро изучить содержание объемных и непростых норм права. Схемы являются своеобразным навигатором в обширном и часто запутанном российском законодательстве, в наглядной компактной форме представляя его нормы [8, с 41.].

Студенты юридических вузов не только изучают нормативные акты посредством компьютера, но и участвуют в различных олимпиадах по умению работать с информационными технологиями. Так в Республике Башкортостан ежегодно проводится Республиканская юридическая олимпиада, и одна из номинаций – практические работы со справочными правовыми системами «Консультант Плюс».

Активно используются в юридическом образовании и методы математической статистики. Применение данных методов позволяет сопоставить и проанализировать, к примеру, отдельные количественные сведения: участие в выборах, рост или спад преступности, количество административных правонарушений, и т.п. Наиболее важное значение для применения статистических методов в юриспруденции имеет то, что на основе системного анализа статистики возможно выявить статистические закономерности.

Информационные технологии-инструменты, используемые для подобного статистического анализа, успешно реализованы в ГАС «Правосудие», ИАС МВД РФ, ИАС Роскомнадзор и др [3, 5, 6, 7] Использование статистических материалов студентами-юристами позволяет значительно углубить полученные теоретические знания.

Следует отметить, что среди различных способов распространения информации на сегодня самым эффективным коммуникационным каналом для обеспечения прав граждан и организаций на доступ к информации о деятельности судов становятся официальные сайты. Об эффективности коммуникации посредством официальных сайтов свидетельствует непрерывно возрастающее число пользователей Интернета, оперативность обратной связи, высокая скорость получения и обновления информации онлайн, возможность сокращения времен-

ных и материальных ресурсов на распространение и предоставление информации о работе судов [2 с. 34].

Несопоставим и охват аудитории, и объем усилий, которые нужно выполнить для получения необходимых данных. При ответе на запрос о предоставлении информации порой значительные усилия сотрудников суда удовлетворяют потребности лишь одного пользователя. При однократном размещении информации на сайте доступ к ней получает неограниченный круг пользователей (проактивный доступ).

Эффективность использования компьютерной математики, реализованной при помощи современных информационных технологий всегда зависела от уровня подготовки преподавателей.

Сегодня преподаватель по-прежнему остается критичным звеном процесса обучения, однако интеграция информационных технологий способствует формированию новой роли преподавателя. Преподаватель в высокотехнологичной среде является не только источником информации: он помогает студентам понять сам процесс обучения. Преподаватель помогает студентам найти необходимую им информацию; выяснить, соответствует ли она заданным требованиям; а также понять, как использовать эту информацию для ответа на поставленные вопросы и решения сложных проблем. Для того, чтобы подготовить студента юридического факультета преподаватель сам должен уметь анализировать нормативные акты, следить за изменением законов, быть информированным о принятии новых актов. Все это возможно, только если преподаватель умеет работать с компьютером, если он использует все информационные технологии.

Библиографический список

1. Азаров М.С. Административно-правовое регулирование доменных имен как объекта информационного права // Административное и муниципальное право. – 2010. – №5. – С. 41–43.

2. Годин В.В. Информационное обеспечение управленческой деятельности. – М., Высшая школа, 2008. – 258 с.

3. Государственная автоматизированная система «Правосудие». – Режим доступа:
URL: http://techportal.sudrf.ru/index.php?id=206&arc_list=sel. (дата обращения 14.02.2017).

4. Информационные ресурсы развития Российской Федерации: Правовые проблемы / Отв. ред. И.Л. Бачило. – М., Наука, 2010. 360 с.

5. Официальный сайт Судебного департамента при Верховном Суде Российской Федерации – Режим доступа: http://www.cdep.ru (дата обращения: 14.02.2017).

6. Официальный сайт ФГБУ ИАЦ Судебного департамента. Режим доступа: http://iac.cdep.ru/index.php?id=15 (дата обращения: 14.02.2017).

7. Официальный сайт ФСТЭК РФ. Раздел документы. – Режим доступа: URL: http://fstec.ru/normativnye-i-metodicheskie-dokumenty-tzi/114-deyatelnost/tekushchaya/tekhnicheskaya-zashchita-informatsii/normativnye-i-metodicheskie-dokumenty/spetsialnye-normativnye-dokumenty/384-rukovodyashchij-dokument-reshenie-predsedatelya-gostekhkomissii-rossii-ot-30-marta-1992-g (дата обращения 15.02.2017).

8. Усманова Р.М., Саитов А.Р. Использование информационных технологий в высших юридических учебных заведениях // В сборнике: Диалог общества и власти в образовательном пространстве СНГ Международная научная конференция. Московский институт экономики, менеджмента и права. – М., 2006. С. 40–43.

Сведения об авторах

Усманова Резида Миниярovна, доктор юридических наук, декан юридического факультета СФ БашГУ. E-mail: Rezidausmanova@yandex.ru.

Алешин Павел Николаевич, кандидат исторических наук, доцент кафедра теории и истории государства и права СФ БашГУ. E-mail: p.n.aleshin@gmail.com.

УДК 519.624, 534.1

Утяшев И.М.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ СТРУНЫ В СЛУЧАЕ НЕСИММЕТРИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА

В работе рассматривается обратная задача идентификации вида и параметров краевых условий для краевой задачи, описывающей колебания струны. Колебания происходят в упругой внешней среде, коэффициент упругости которой описывается несимметрическим потенциалом q(x). Показано, что в отличие от случая симметрического потенциала, вид и параметры краевых условий могут быть идентифицированы однозначно. Причем для идентификации необходимо использовать не две собственных частоты (как в случае симметрического потенциала), а три. Предложен метод решения задачи. Рассмотрен соответствующий пример.

Ключевые слова: несимметричный потенциал, обратная задача, собственные значения, струна, идентификация.

Utyashev I.M.

DETERMINATION OF THE BOUNDARY CONDITIONS OF THE STRINGS BY NATURAL FREQUENCIES OF OSCILLATIONS IN A MEDIUM WITH A VARIABLE ASYMMETRIC ELASTICITY

The inverse problem of identification of the form and parameters of boundary conditions for a boundary value problem describing string oscillations is considered. Oscillations occur in an elastic external medium, the elasticity coefficient of which is described by the asymmetric potential q(x). It is shown that, in contrast to the case of a symmetric potential, the form and parameters of the boundary conditions can be uniquely identified. And for identification it is necessary to use not two natural frequencies (as in the case of a symmetric potential), but three. A method for solving the problem. The corresponding example is considered.

Key words: asymmetric potential, inverse problem, eigenvalues, string, identification.

Ранее в [1] и [2] аналогичные задачи были решены для случаев, когда потенциал отсутствует ($q(x)=0$) и когда он является симметрическим ($q(x) = q(1–x)$). В [1,2] было показано, что краевые условия восстанавливаются по двум собственным частотам с точностью до перестановок концов струны местами. В [3, 4] решалась задача идентифи-

© Утяшев И.М., 2017

кации краевых условий известного вида (условий Штурма $y'(0) - hy(0) = 0$, $y'(1) + Hy(1) = 0$). В [5–7] решались обратные спектральные задачи Штурма–Лиувилля, коэффициенты краевых условий идентифицировались вместе с коэффициентами дифференциальных уравнений. Причем в качестве данных восстановления использовалась несколько спектров, или же спектр с дополнительными данными (функция Вейля, матрица Вейля, спектральная функция, весовые числа и т.п.).

В настоящей работе показано, что в случае несимметрического потенциала ($q(x) \neq q(1-x)$) вид и параметры краевых условий могут быть определены однозначно, однако при этом необходимо использовать не две, а три собственных частоты колебаний.

Постановка задачи

Рассматриваются колебания струны, описываемые уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u, \tag{1}$$

где $q(x)u$– слагаемое, которое характеризует упругость среды, причем $q(x) \in \mathbf{C}^{\infty}[0,l]$, $x \in \mathbf{R}$. С краевыми условиями на левом и правом концах:

$$b_{11}u_x(0,t) - b_{12}u(0,t) = 0,\ b_{23}u_x(l,t) + b_{24}u(l,t) = 0. \tag{2}$$

где коэффициенты $b_{ij} \geq 0$. Вид закреплений струны зависит от значений переменных b_{11}, b_{12}, b_{23}, b_{24}. Варьируя коэффициенты, можно реализовать жесткое, свободное, либо упругое закрепление, причем на разных концах могут быть различные закрепления.

Прямой задачей будем называть задачу определения собственных частот колебаний струны, если известны вид краевого условия и параметры b_{11}, b_{12}, b_{23}, b_{24}. А под обратной задачей будем понимать задачу идентификации вида краевых условий и параметров b_{11}, b_{12}, b_{23}, b_{24} по известным собственным частотам.

Сформулируем прямую и обратную задачи в терминах задачи Штурма-Лиувилля и характеристического определителя.

После замены $u(x,t) = y(x)\cos\omega t$ и введения новых обозначений $\xi = x/l$ и $\lambda^2 = \omega^2 l^2 / a^2$, получаем задачу Штурма–Лиувилля:

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \tag{3}$$

$$a_{11}y'(0) - a_{12}y(0) = 0,\ a_{23}y'(1) + a_{24}y(1) = 0, \tag{4}$$

где $a_{11} = b_{11}/l$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{23} = b_{23}/l$, $a_{24} = b_{24}$, а потенциал $q(x) \neq 0$ и несимметричен $q(1-x) \neq q(x)$. Случай, когда потенциал $q(x)$ симметричен, рассмотрен авторами в работе [2].

Обозначим матрицу, состоящую из коэффициентов a_{ij} краевых условий (4), через A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Исходя из физического смысла задачи, коэффициенты матрицы A можно считать неотрицательными. Матрицу A будем называть матрицей краевых условий.

Решение прямой задачи (3)-(4) в виде ряда и его оценка сходимости подробно описаны в работе [2]. Отметим, что спектр собственных частот представляет собой нули характеристического определителя [6, с. 33]:

$$\Delta(\lambda) = J_{13} f_{13}(\lambda) + J_{14} f_{14}(\lambda) + J_{23} f_{23}(\lambda) + J_{24} f_{24}(\lambda) = 0, \qquad (6)$$

где через J_{ij} обозначен определитель, составленный из i-го и j-го столбцов матрицы краевых условий A (обозначение J_{ij} взято из работы [6, с. 34]. В частности, для матрицы (5) определители J_{ij} вычисляются по формулам: $J_{13}=a_{11}a_{23}$, $J_{14}=a_{11}a_{24}$, $J_{23}=a_{12}a_{23}$, $J_{24}=a_{12}a_{24}$. Коэффициенты f_{ij} находятся из следующих равенств [6, стр. 33]:

$f_{13}(\lambda)= y_1'(1)$, $f_{14}(\lambda)= y_1(1)$, $f_{23}(\lambda)= y_2'(1)$, $f_{24}(\lambda)= y_2(1)$.

Причем в отличие от случая симметрического потенциала, эти функции линейно независимы. Линейная независимость следует из асимптотических представлений [7] и того, что в случае несимметрического потенциала $y_1(1)\neq y_2'(1)$ [7, Лемма 4].

Обратная задача в терминах функции (6) формулируется следующим образом: *коэффициенты a_{ij} матрицы краевых условий A неизвестны; ранг матрицы A равен двум; потенциал $q(x)\neq 0$ и несимметричен $q(1-x)\neq q(x)$; известны три собственных значения λ_1, λ_2, λ_3 соответствующей задачи. Требуется идентифицировать матрицу A с точностью до линейных преобразований строк.*

При решении поставленной задачи будет использовано **соотношение Плюккера** [3, с. 24-26]. Покажем, как оно выводится для нашей задачи.

С помощью линейных преобразований строк, при условии $J_{13}\neq 0$, матрицу краевых условий можно представить с помощью ее определителей J_{ij}:

$$A^{+} = \begin{pmatrix} 1 & J_{23}/J_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & J_{14}/J_{13} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

В зависимости от того, какой из определителей не равен нулю, матрица A имеет следующий вид:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1 & J_{24}/J_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{13}/J_{14} & 1 \end{pmatrix}, \text{ при } J_{14} \neq 0, \quad (8)$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} J_{13}/J_{23} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & J_{24}/J_{23} \end{pmatrix}, \text{ при } J_{23} \neq 0 \quad (9)$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} J_{14}/J_{24} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{23}/J_{24} & 1 \end{pmatrix}, \text{ при } J_{24} \neq 0. \quad (10)$$

Обратим внимание, что в (7) в записи матрицы A^+ не используется определитель J_{24}. И его можно вычислить: $J_{24} = \frac{J_{23}}{J_{13}} J_{14}$. Таким образом, для матрицы должно выполняться соотношение

$$J_{13}J_{24} - J_{23}J_{14} = 0. \quad (11)$$

Соотношение (11) называют соотношением Плюккера. Если $J_{24} \neq J_{23}J_{14}/J_{13}$ (соотношение (11) не выполняется), то восстановить матрицу краевых условий A по определителям J_{ij} невозможно, поскольку таковой не существует.

Если для матрицы краевых условий A найти ее определители J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, то с помощью формул (7), (8), (9), (10) легко находится сама матрица, а значит и краевые условия.

Решение обратной задачи Пусть λ_1, λ_2, λ_3 являются собственными значениями соответствующей краевой задачи (3)–(4). Тогда λ_1, λ_2, λ_3 – корни характеристического уравнения (6) [6]. Подставив эти три значения в (6), получим систему трех уравнений для поиска четырех определителей J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24} матрицы A:

$$\Delta(\lambda_i) = J_{13}f_{13}(\lambda_i) + J_{14}f_{14}(\lambda_i) + J_{23}f_{23}(\lambda_i) + J_{24}f_{24}(\lambda_i) = 0, i=1, 2, 3 \quad (12)$$

Обозначим через F следующую матрицу, состоящую из коэффициентов системы (12):

$$F = \begin{pmatrix} f_{13}(\lambda_1) & f_{14}(\lambda_1) & f_{23}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{14}(\lambda_2) & f_{23}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \\ f_{13}(\lambda_3) & f_{14}(\lambda_3) & f_{23}(\lambda_3) & f_{24}(\lambda_3) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

а через F_{ij} – определитель, получаемый из F вычеркиванием столбца с элементом $f_{ij}(\lambda_k)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема (о единственности решения). *Пусть* λ_1, λ_2, λ_3 *являются собственными значениями задачи (3)-(4), ранг матрицы F равен 3, потенциал* $q(x) \neq 0$ *и несимметричен* $q(1-x) \neq q(x)$. *Тогда задача идентификации краевых условий имеет единственное решение, которые представляются в явном виде в терминах определителей* F_{ij}.

Доказательство. Обозначим определитель J_{13} через x, J_{14} – через y, J_{23} – через z, J_{24} – через q. В новых обозначениях (12) запишется в виде:

$$\Delta(\lambda_i)=f_{13}(\lambda_i)x+f_{14}(\lambda_i)y+f_{23}(\lambda_i)z+f_{24}(\lambda_i)q=0,\ i=1,2,3 \qquad (14)$$

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (14) представляет собой уравнение гиперплоскости $Ax+By+Cz+Dq=0$ в четырехмерном пространстве, проходящее через начало координат, где $A=f_{13}(\lambda)$, $B=f_{14}(\lambda)$, $C=f_{23}(\lambda)$, $D=f_{24}(\lambda)$.

«Нормальные вектора» гиперплоскостей, заданные уравнениями системы (14), есть $\boldsymbol{N}_1=(f_{13}(\lambda_1), f_{14}(\lambda_1), f_{23}(\lambda_1), f_{24}(\lambda_1))$, $\boldsymbol{N}_2=(f_{13}(\lambda_2), f_{14}(\lambda_2), f_{23}(\lambda_2), f_{24}(\lambda_2))$, $\boldsymbol{N}_3=(f_{13}(\lambda_3), f_{14}(\lambda_3), f_{23}(\lambda_3), f_{24}(\lambda_3))$. Поскольку ранг матрицы F равен 3, то эти векторы не коллинеарны (гиперплоскости $\Delta(\lambda_1)=0$, $\Delta(\lambda_2)=0$ и $\Delta(\lambda_3)=0$ не совпадают и не параллельны).

Обозначим через $\boldsymbol{n}=(a,b,c,d)$ направляющий вектор прямой, по которой пересекаются гиперплоскости $\Delta(\lambda_1)=0$, $\Delta(\lambda_2)=0$ и $\Delta(\lambda_3)=0$, тогда $\boldsymbol{n}$ есть векторное произведение векторов $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$, $\boldsymbol{N}_3$:

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2\times\boldsymbol{N}_3=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{l} \\ f_{13}(\lambda_1) & f_{14}(\lambda_1) & f_{23}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{14}(\lambda_2) & f_{23}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \\ f_{13}(\lambda_3) & f_{14}(\lambda_3) & f_{23}(\lambda_3) & f_{24}(\lambda_3) \end{vmatrix}.$$

Следовательно, координаты направляющего вектора вычисляются по формулам:

$$a=\begin{vmatrix} f_{14}(\lambda_1) & f_{23}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{14}(\lambda_2) & f_{23}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \\ f_{14}(\lambda_3) & f_{23}(\lambda_3) & f_{24}(\lambda_3) \end{vmatrix}=F_{13}, \qquad b=-\begin{vmatrix} f_{13}(\lambda_1) & f_{23}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{23}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \\ f_{13}(\lambda_3) & f_{23}(\lambda_3) & f_{24}(\lambda_3) \end{vmatrix}=-F_{14},$$

$$c=\begin{vmatrix} f_{13}(\lambda_1) & f_{14}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{14}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \\ f_{13}(\lambda_3) & f_{14}(\lambda_3) & f_{24}(\lambda_3) \end{vmatrix}=F_{23}, \quad d=-\begin{vmatrix} f_{13}(\lambda_1) & f_{14}(\lambda_1) & f_{23}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{14}(\lambda_2) & f_{23}(\lambda_2) \\ f_{13}(\lambda_3) & f_{14}(\lambda_3) & f_{23}(\lambda_3) \end{vmatrix}=-F_{24}.$$

По координатам направляющего вектора $\boldsymbol{n}$ можем записать параметрическое уравнение прямой в четырехмерном пространстве:

$$J_{13}=F_{13}t,\quad J_{14}=-F_{14}t,\ J_{23}=F_{23}t,\quad J_{24}=-F_{24}t. \qquad (15)$$

Уравнение (15) представляет собой уравнение прямой в четырехмерном пространстве. Если $F_{13}\neq 0$, то $J_{13}\neq 0$, из (7) и (15) получаем единственное представления для матрицы A^{+} и соответственно единственное краевое условие (4), где $a_{11}=1$, $a_{12}=J_{23}/J_{13}$, $a_{23}=J_{13}$, $a_{24}=J_{14}$, а определители J_{ij} находятся в явном виде с точностью до константы по формулам (15). Аналогично получаются явные выражения для краевых условий в случаях $J_{14}\neq 0$, $J_{23}\neq 0$ и $J_{24}\neq 0$. Таким образом, с помощью представлений (7), (8), (9), (10) через уравнение прямой, выраженное уравнениями (15), получаем явное решение задачи идентификации краевых условий (матрицы A). Что и требовалось доказать.

Метод идентификации краевых условий. Пусть λ_1, λ_2, λ_3 – собственные значения краевой задачи (3)–(4), найденные с некоторой погрешностью (не обязательно первые три). Подставив эти значения в уравнение (12), получим матрицу F и определители F_{ij}. Подставив эти определители в (15), получим определители J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}. Явный вид матрицы A (а значит и краевых условий) зависит от того, какое из чисел J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24} больше по модулю. Если наибольшим по модулю является J_{13}, то приближенным решением задачи будем считать матрицу (7). Вычисленный по формулам (15) минор J_{24} не будем принимать во внимание. Если его учитывать, то формально соотношения Плюккера не будут выполнены. В качестве минора J_{24} примем выражение $J_{24}=J_{23}J_{14}/J_{13}$, которое получено из самого соотношения Плюккера. При стремлении λ_1, λ_2, λ_3 к точным значениям, соответствующим физическому смыслу задачи, приближенное решение (7) стремится к точному.

Аналогичными рассуждениями получаем, что если наибольшими по модулю являются J_{14}, J_{23}, J_{24}, то решения будут иметь вид (8), (9), (10) соответственно.

Пример. Пусть $q(x)=x^2$ и $\lambda_1=1.038725$, $\lambda_2=3.46182$, $\lambda_3=6.421908$. Подставив решения $y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x,\lambda)$ уравнения (3) в виде рядов Тейлора по x и λ в (15) находим $J_{13}=0.0315476293$, $J_{14}=0.0254562746$, $J_{23}=0.0027624993$, $J_{24}=0.0051518957$. Так как наибольшим по модулю является J_{13}, то подставляя найденные решения в (7), получим:

$$A^{+}=\begin{pmatrix} 1.000 & 0.19927 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.000 & 0.70068 \end{pmatrix}.$$

Заключение. Показано, что в отличие от случая симметрического потенциала, вид и параметры краевых условий могут быть идентифицированы однозначно. Причем для идентификации необходимо использовать не две собственных частоты (как в случае симметрического потенциала), а три. Доказана теорема существования и единственности решения для случая с несимметричным потенциалом $q(1-x) \neq q(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках гранта №16-31-00077_мол_а.

Библиографический список

1. Ахтямов А.М., Утяшев И.М. Идентификация краевых условий на обоих концах струны по собственным частотам колебаний // Акустический журнал. – 2015. – Т. 61, № 6. – С. 647–655.

2. Утяшев И.М., Ахтямов А.М. Идентификация краевых условий струны по собственным частотам колебаний // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, 2016. – Т. 11. – С. 38–52.

3. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.

4. Ватульян А.О., Беляк О.А., Сухов Д.Ю., Явруян О.В. Обратные и некорректные задачи: учебник. – Ростов н/Д: Изд-во Южного федерального университета, 2011. – 232 с.

5. Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики: учебно-методическое пособие. – М.: МГУ, 1993. – 155 с.

6. Вибрации в технике: справочник. В 6-ти т. – Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.

7. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – 10-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.

Сведения об авторах

Утяшев Ильнур Мирзович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаб. МТТ ИМех УНЦ РАН. E-mail: utyashevim@mail.ru.

УДК 517.95

Фёдоров Ю.И.

СУММИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ СОПРЯЖЁННЫХ ПАР ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Автором вводится понятие потенциала сопряженной пары для гиперболических уравнений второго порядка. Обсуждается операция сложения потенциалов сопряжённых пар.

Ключевые слова: потенциалы сопряжённых пар гиперболических уравнений.

Fedorov Yu. I.

THE SUMMATION OF THE POTENTIALS OF CONJUGATE PAIRS OF HYPERBOLIC EQUATIONS

The article introduces the concept of a potential conjugate pair for second order hyperbolic equations. Discusses the operation of combining the potential of conjugate pairs.

Key words: potentials conjugate pairs of second order hyperbolic equations.

Одна из математических моделей сорбции газа, рассмотренная и изученная А.Н. Тихоновым [3], сводится к задаче Гурса [3], [4] для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами. В работах [5], [6] методом, основанным на применении точных дифференциалов и разработанным автором, изучались уравнения динамики сорбции газа. Основное понятие рассматриваемого метода, т.е. понятие потенциала сопряжённой пары, введено автором в работах [1], [2], [5]–[7]. Следуя, например работе [5], для линейного гиперболического дифференциального уравнения с частными производными второго порядка с двумя переменными

$$L(u) \equiv u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0 \qquad (1)$$

в односвязной области D плоскости XOY построим так называемый потенциал $\hat{u}(x, y)$ сопряжённой пары $u(x, y)$ и $v(x, y)$ решений исходного (1) и сопряжённого $L^*(v) \equiv v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv = 0$ уравнений соответственно:

$$\begin{cases} \hat{u}_x = vu_x - uv_x + 2buv, \\ \hat{u}_y = -vu_y + uv_y - 2auv. \end{cases} \qquad (2)$$

© Фёдоров Ю. И., 2017 г.

где $u, v \in \tilde{C}$, $\tilde{C} = C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$. Функция $\hat{u}(x, y)$ называется потенциалом сопряжённой пары $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в D.

Рассмотрим потенциалы сопряжённых пар гиперболических уравнений (1) с постоянными коэффициентами a, b, c, если $c = 0$. Сопряжённое уравнение имеет вид

$$L^*(v) \equiv v_{xy} - av_x - bv_y = 0, \qquad (3)$$

В этом случае одним из частных решений сопряжённого уравнения будет функция $v(x, y) \equiv 1$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{cases} \hat{u}_x = u_x + 2bu, \\ \hat{u}_y = -u_y - 2au. \end{cases} \qquad (4)$$

Исключая из системы уравнений (4) функцию $u(x, y)$ получим уравнение, которому удовлетворяет потенциал $\hat{u}(x, y)$. Это уравнение мы назвали двойственным уравнению (1):

$$\hat{L}(\hat{u}) \equiv \hat{u}_{xy} + a\hat{u}_x + b\hat{u}_y = 0. \qquad (5)$$

Как видим, в этом случае двойственное уравнение совпадает с исходным (1), т.е. потенциал $\hat{u}(x, y)$ является решением уравнения (1).

Теория потенциалов сопряжённых пар предоставляет удобный аппарат для оперирования уравнениями и их решениями. Рассмотрим процесс сложения потенциалов сопряжённых пар двух различных гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами в одной (односвязной) области D. Пусть $\hat{u}(x, y)$ – потенциал сопряжённой пары $u(x, y)$, $v(x, y)$ уравнения (1) с постоянными коэффициентами при $c = 0$, определяемый системой уравнений (4). В качестве второго гиперболического уравнения возьмём простейшее волновое уравнение $z_{xy} = 0$. Его потенциал $\hat{z}(x, y)$ можно определить системой уравнений (4). Но для одного гиперболического уравнения можно построить различные потенциалы сопряжённых пар (например, меняя $v(x, y)$). Если исходное уравнение (1) уже представлено в форме $P_y(x, y) - Q_x(x, y) = 0$, то систему уравнений, определяющую $\hat{z}(x, y)$, можно составить непосредственно, без тождества Грина. Записав $z_{xy} = 0$ в виде $(z_x)_y = (0)_x$, определим $\hat{z}(x, y)$ системой уравнений

$$\begin{cases} \hat{z}_x = u_x, \\ \hat{z}_y = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим сумму потенциалов $\hat{w}(x,y) = \hat{u}(x,y) + \hat{z}(x,y)$, которая задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} \hat{w}_x = u_x + 2bu + z_x, \\ \hat{w}_y = -u_y - 2au. \end{cases} \tag{7}$$

Выведем уравнение, которому удовлетворяет $\hat{w}(x,y)$, связав его с операцией сложения потенциалов $\hat{u}(x,y)$ и $\hat{z}(x,y)$. Для этого продифференцируем первое уравнение (7) по y, а второе – по x:

$$\begin{cases} \hat{w}_{xy} = u_{xy} + 2bu_y + z_{xy}, \\ \hat{w}_{yx} = -u_{yx} - 2au_x. \end{cases} \tag{8}$$

Сложив почленно уравнения в (8), получим

$$\hat{w}_{xy} = bu_y - au_x. \tag{9}$$

Наконец, из соотношений (7) находим $bu_y - au_x = az_x - a\hat{w}_x - b\hat{w}_y$ и подставляем в (9):

$$\hat{w}_{xy} + a\hat{w}_x + b\hat{w}_y = az_x. \tag{10}$$

Для $\hat{w}(x,y)$ нами получено неоднородное (возмущённое) уравнение с двойственным оператором (5):

$$\hat{L}(\hat{w}) \equiv \hat{w}_{xy} + a\hat{w}_x + b\hat{w}_y = az_x. \tag{11}$$

Таким образом, прибавление к потенциалу сопряжённых пар $\hat{u}(x,y)$ гиперболического уравнения (1) с постоянными коэффициентами потенциала $\hat{z}(x,y)$ волнового уравнения приводит к возмущению двойственного уравнения (5) (следовательно, исходного тоже) функцией az_x, превращая его в неоднородное уравнение (11) с прежним оператором в левой части. Сумма $\hat{w}(x,y)$ потенциалов удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\hat{L}(\hat{w})\right) \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\hat{w}_{xy} + a\hat{w}_x + b\hat{w}_y\right)_x = 0, \text{ т.е. } \frac{\partial(\ )}{\partial y} \circ \hat{L}(\hat{w}) = 0.$$

Сложению потенциалов $\hat{u}(x,y)$ и $\hat{z}(x,y)$ соответствует произведение оператора $\frac{\partial(\ )}{\partial y}$ и двойственного оператора $\hat{L}(\hat{w})$.

Библиографический список

1. Фёдоров Ю.И., Павлидис В.Д. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений // Тез. док. на 3-й международной конференции, посвящённой 85-летию чл.-корр. РАН, профессора Л.Д. Кудрявцева. – М.: МФТИ, 2008. – С. 338–341.

2. Фёдоров Ю.И. О свойствах линейных дифференциальных операторов, связанных с полными дифференциалами // Тез. док. на 3-й международной конференции, посвящённой 85-летию чл.-корр. РАН, профессора Л.Д. Кудрявцева. – М.: МФТИ, 2008. – С. 341–344.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.

4. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с.

5. Фёдоров Ю.И. Потенциалы сопряжённых пар гиперболических уравнений и их прикладные аспекты // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена: Рецензируемый научный журнал: Физико-математические, химические и биологические науки. – 2015. – № 173. – С. 55–63.

6. Фёдоров Ю.И. Потенциалы сопряжённых пар гиперболических уравнений и их интерпретация в моделях сорбции газов // Материалы V Всерос. науч.-практ. конф. «Математическое моделирование процессов и систем», приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова. Ч. III. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – С. 171–175.

7. Фёдоров Ю.И. Преобразование гиперболических уравнений с помощью потенциалов сопряжённых пар // Материалы V Всерос. науч.-практ. конф. «Математическое моделирование процессов и систем», приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова. Ч. III. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – С. 175–178.

Сведения об авторе

Фёдоров Юрий Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент Оренбургского государственного аграрного университета. E-mail: yurf0023@mail.ru.

УДК 517.95

Фёдоров Ю. И.

ПОТЕНЦИАЛЫ СОПРЯЖЁННЫХ ПАР ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Автором вводится понятие потенциала сопряженной пары для гиперболических уравнений второго порядка. Обсуждаются свойства потенциалов гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: потенциалы сопряжённых пар гиперболических уравнений.

Fedorov Yu.I.

THE POTENTIALS OF CONJUGATE PAIRS OF HYPERBOLIC EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

The article introduces the concept of a potential conjugate pair for second order hyperbolic equations. We discuss properties of potentials and hyperbolic equations with constant coefficients.

Key words: potentials conjugate pairs of second order hyperbolic equations.

В работе изучаются некоторые свойства решений линейных гиперболических дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя переменными

$$L(u) \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0 \qquad (1)$$

в односвязной области D плоскости XOY методом, основанным на применении точных дифференциалов и разработанным автором. Метод введён в работах автора [1], [2], [5]–[8] и связан с понятием, так называемого потенциала $\hat{u}(x,y)$ сопряжённой пары $u(x,y)$ и $v(x,y)$ решений исходного (1) и сопряжённого

$$L^*(v) \equiv v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv = 0 \qquad (2)$$

уравнений соответственно. В статье [7] автором показано, что если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям

$$a(x,y), b(x,y), c(x,y), a_x(x,y), b_y(x,y) \in C(\bar{D}), \qquad (3)$$

$\tilde{C} = C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$, то потенциал $\hat{u}(x,y)$ сопряжённой пары $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в односвязной области D определяется системой уравнений

© Фёдоров Ю. И., 2017

$$\begin{cases} \hat{u}_x = \delta u_x - u\omega_x + 2buv, \\ \hat{u}_y = -\omega u_y + u\delta_y - 2auv, \end{cases} \tag{4}$$

где $u, v \in \tilde{C}$ – любые решения уравнений $L(u) = 0$ и $L^*(v) = 0$ соответственно. Выберем вспомогательные функции $\delta(x, y)$ и $\omega(x, y)$ такие, что $\delta(x, y) = \omega(x, y) = v(x, y)$ и преобразуем (4) к виду

$$\begin{cases} \hat{u}_x = vu_x - uv_x + 2buv, \\ \hat{u}_y = -vu_y + uv_y - 2auv. \end{cases} \tag{5}$$

Если $M_0(x_0, y_0)$ – фиксированная, а $M(x, y)$ – переменная точки области D, то функция $\hat{u}(x, y)$ восстанавливается по своему полному дифференциалу с точностью до вещественного постоянного слагаемого $\hat{u}_0 = \hat{u}(x_0, y_0)$ по формуле

$$\hat{u}(x, y) = \hat{u}_0 + \int_{M_0}^{M} (vu_\xi - uv_\xi + 2buv)d\xi + (uv_\eta - vu_\eta - 2auv)d\eta, \tag{6}$$

где (ξ, η) переменная точка линии интегрирования $M_0M \subset D$, криволинейный интеграл не зависит от формы дуги M_0M [4]. Дуги рассматриваются кусочно-гладкие. *Функцию* $\hat{u}(x, y)$ *мы назвали потенциалом сопряжённой пары* $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в D.

Автором рассматривалось прикладное значение потенциалов сопряжённых пар в математических моделях, описываемых системами из двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, которые сводятся к задачами для линейных гиперболических уравнений второго порядка с двумя переменными. Одной из неизвестных функций в этих системах являлся потенциал $\hat{u}(x, y)$ сопряжённой пары [5]–[7]. Таким образом, потенциал $\hat{u}(x, y)$ может являться, в свою очередь, решением некоторого дифференциального уравнения, которое будем называть двойственным уравнению (1). Поэтому интерес представляет вывод двойственного уравнения. Для вывода двойственного уравнения исключим функцию $u(x, y)$ из системы уравнений (5).

Теорема. Если в односвязной области D коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (3), дополнительному условию $a_x(x, y) = b_y(x, y)$, $u(x, y)$ – решение исходного уравнения (1), а

$v(x,y)$ – сопряжённого уравнения (2), $u, v \in \tilde{C}(D)$, то потенциал $\hat{u}(x,y)$ сопряжённой пары $u(x,y)$, $v(x,y)$, определяемый системой уравнений (5), удовлетворяет двойственному уравнению

$$\hat{u}_{xy} + \left(a - \frac{v_y}{v}\right)\hat{u}_x + \left(b - \frac{v_x}{v}\right)\hat{u}_y = 0. \qquad (7)$$

$\hat{u}(x,y)$ восстанавливается по паре $u(x,y)$, $v(x,y)$ по формуле (6).

В работе [7] предложена интерпретация потенциала $\hat{u}(x,y)$ в моделях динамики сорбции газов. Одна из математических моделей сорбции газа, рассмотренная и изученная А. Н. Тихоновым [3], сводится к задаче Гурса [3], [4] для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами. Поэтому представляет интерес свойства потенциалов гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим построение потенциалов сопряжённых пар и двойственных уравнений для линейных гиперболических уравнений

$$L(u) \equiv u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0. \qquad (8)$$

с постоянными коэффициентами a, b, c в односвязной области D.

Пусть $c(x,y) \equiv 0$. Сопряжённое уравнение имеет вид

$$L^*(v) \equiv v_{xy} - av_x - bv_y = 0, \qquad (9)$$

1) случай. Одним из частных решений сопряжённого уравнения будет функция $v(x,y) \equiv 1$. Тогда система уравнений (5) примет вид

$$\begin{cases} \hat{u}_x = u_x + 2bu, \\ \hat{u}_y = -u_y - 2au, \end{cases} \qquad (10)$$

а двойственное уравнение $\hat{u}_{xy} + a\hat{u}_x + b\hat{u}_y = 0$. Как видим, в первом случае двойственное уравнение совпадает с исходным, т.е. потенциал $\hat{u}(x,y)$ является решением исходного уравнения (8).

2) случай. Другим частным решением сопряжённого уравнения будет $v(x,y) = \exp(2bx + 2ay)$. Система уравнений (5) примет вид

$$\begin{cases} \hat{u}_x = vu_x, \\ \hat{u}_y = -vu_y, \end{cases} \qquad (11)$$

а двойственное уравнение $\hat{u}_{xy} - a\hat{u}_x - b\hat{u}_y = 0$. В этом случае коэффициенты двойственного уравнения будут противоположны коэффициентам исходного уравнения (8).

Библиографический список

1. Фёдоров Ю.И., Павлидис В.Д. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений // Тез. док. на 3-й международной конференции, посвящённой 85-летию чл.-корр. РАН, профессора Л.Д. Кудрявцева. – М.: МФТИ, 2008. – С. 338–341.

2. Фёдоров Ю.И. О свойствах линейных дифференциальных операторов, связанных с полными дифференциалами // Тез. док. на 3-й международной конференции, посвящённой 85-летию чл.-корр. РАН, профессора Л.Д. Кудрявцева. – М.: МФТИ, 2008. – С. 341–344.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.

4. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с.

5. Фёдоров Ю.И. Математические аспекты динамики сорбции газов // Известия Оренбургского государственного аграрного университета. – 2014. – № 3 (47). – С. 46–48.

6. Фёдоров Ю.И. Потенциалы сопряжённых пар гиперболических уравнений и их прикладные аспекты // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена: Рецензируемый научный журнал: Физико-математические, химические и биологические науки. – 2015. – № 173. – С. 55–63.

7. Фёдоров Ю.И. Потенциалы сопряжённых пар гиперболических уравнений и их интерпретация в моделях сорбции газов // Материалы V Всерос. науч.-практ. конф. «Математическое моделирование процессов и систем», приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова. Ч. III. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – С. 171–175.

8. Фёдоров Ю.И. Преобразование гиперболических уравнений с помощью потенциалов сопряжённых пар // Материалы V Всерос. науч.-практ. конф. «Математическое моделирование процессов и систем», приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова. Ч. III. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – С. 175–178.

Сведения об авторе

Фёдоров Юрий Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент Оренбургского государственного аграрного университета. E-mail: yurf0023@mail.ru.

УДК 548.544.45

Фейзуллаев Х.А., Халилов М.С., Казымов Б.К.

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЛЛЕКТОРСКИХ СВОЙСТВ РЕЛАКСАЦИОННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО ГАЗОВОГО ПЛАСТА

Предложена методика и алгоритм решения задачи идентификации проницаемости и пористости релаксационно-деформируемого пласта на основе модели фильтрации реального газа при газовом режиме. В качестве критерия оптимизации при нахождении указанных коллекторных свойств пласта принимается минимизация функционала квадратичной невязки расчетных и фактических забойных давлений скважины. На основе специально рассмотренной с известными параметрами модельной задачи проведена теоретическая апробация предложенной методики.

Ключевые слова: пористость, релаксация, реальный газ, идентификация.

Feyzullayev Kh., Khalilov M.S., Kazymov B.K.

PARAMETRIC IDENTIFICATION OF RESERVOIR PROPERTIES OF RELAXATION-DEFORMABLE GAS RESERVOIR

The proposed method and the algorithm of solving the problem of identification of the permeability and porosity of the relaxation-deformable layer based on model of filtering real gas at a gas mode. As criteria of optimization in the presence of these reservoir properties is taken by minimization of a quadratic functional of the residual of the estimated and actual bottom-hole pressures of a well. On the basis of specially examined with known parameters of the model problem there was conducted theoretical approbation of the proposed method.

Keywords: permeability, porosity, relaxation, real gas, identification.

Вопросы повышения углеводородоотдачи и эффективности разработки залежей нефти и газа во многом связаны с умением правильного построения гидрогазодинамической модели пласта. Последнее основано на численном решении уравнений фильтрации пластовых флюидов с идентификацией коллекторных свойств залежей нефти и

© Фейзуллаев Х.А., Халилов М.С., Казымов Б.К., 2017

газа при недостаточном объеме о них информации и проводится в процессе разработки месторождения с использованием получаемых фактических промысловых данных. Для различных случаев данная задача исследовалась во многих работах [1–3]. В этих работах разработаны методика и алгоритм решения задачи идентификации коллекторных свойств (прежде всего, фильтрационно-емкостных параметров) пласта на основе модели фильтрации флюидов при различных режимах. В работе [2] предлагается методика идентификация фазовых проницаемостей коллектора на основе данных разработки газоконденсатной залежи.

В связи с тем, что эти задачи до сих пор еще не рассматривались для случаев неупругих деформаций пласта, данная статья посвящена разработке соответствующей методики и алгоритма решения параметрической идентификации коллекторных свойств (проницаемости и пористости) газового пласта, горные породы которых деформируются с релаксацией.

С целью построения для рассматриваемого случая газодинамической модели газового пласта при фильтрации газа в нем, рассмотрим задачу о фильтрации реального газа к центральной скважине радиусом r_c, вскрывшей пласт мощностью h и работающей с расходом $q_c(t)$ в круговом пласте с радиусом R_k.

Система уравнений, описывающая процесс фильтрации реального газа в релаксационно-деформируемом пласте имеет вид [4, 5]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(\frac{k(p)p\beta}{\mu_c(p)z(p)p_{атм}}\right)\frac{\partial p}{\partial r}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{m(r,t)\left(\frac{p}{z(p)}\right)\right\},$$

$$D = \{r \in (r_c, R_k)\}, t > 0 \ , \qquad (1)$$

$$m = m_0 e^{-\frac{t}{\tau_m}} + \frac{m_0}{\tau_m}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\tau_m}} e^{\beta_c(p-p_0)} d\tau \ , \qquad (2)$$

где $p(r,t)$ – давление; $m(r,t)$ – пористость; $k(p)$ – проницаемость; $p_{атм}$ – атмосферное давление; β и $z(p)$-коэффициенты соответственно температурной поправки и сверхсжимаемости газа; $\mu_c(p)$ – вязкость газа; m_0 – начальная пористость; τ_m – время релаксации

пористости; β_c – упругая сжимаемость горной породы; t – время; D – область фильтрации.

Начальное и граничные условия имеют вид:

$$p(r,t)\big|_{t=0} = p_0\,, \qquad G = \{r \in (r_c, R_k)\}\,, \tag{3}$$

$$2\pi rh\left(\frac{k(p)p\beta}{\mu_г(p)z(p)p_{amm}}\right)\frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=r_c} = q_г(t), \quad t>0\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial p(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=R_k} = 0\,, \quad t>0 \tag{5}$$

где p_0 – начальное пластовое давление.

Предположим, что проницаемость пласта зависит от давления следующим образом [2]:

$$k(p) = k_0 e^{\alpha_k (p-p_0)}\,, \tag{6}$$

где k_0 – начальное значение проницаемости; α_k – коэффициент, учитывающий изменение проницаемости в зависимости от давления.

Отметим, что поставленная газодинамическая задача для ее разрешимости требуют знание коллекторных свойств релаксационно-деформируемого газового пласта как проницаемости и пористости пласта, так и входящие в их выражения (5) и (6) коэффициенты τ_m, β_c, параметры α_k в общем случае являются неопределенными. Таким образом, для построения газодинамической модели фильтрации газа в релаксационно-деформируемом пласте приходим к следующей идентификационной задаче: требуется найти такие значения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, которые минимизируют значение функционала

$$J(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \int_0^T \left[p(r_c,t) - p_c(t)\right]^2 dt + \varepsilon(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2) \Rightarrow \min \tag{7}$$

,

где $p(r_c,t)$ – расчетное значение забойного давления скважины (определяется из решения задачи (1)–(6) при заданных значениях $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$); $p_c(t)$ – фактические значения забойного давления; T – время эксплуатации скважины; $\varepsilon \geq 0$ -параметр регуляризации [6].

Алгоритм решения задачи по идентификации коллекторных свойств пласта заключается в следующем.

С использованием исходных величин коллекторных параметров методом конечных разностей численно решается прямая задача (1)–(6) [1, 7]. В результате находится значение давления в разные моменты времени разработки и в разных точках пласта, в том числе и в скважине. Определяется как функция времени разность фактических и расчетных значений давления в скважине.

Применяя метод минимизации первого порядка с использованием построенных формул градиента функционала J, строится соответствующее направление поиска, определяется шаг вдоль этого направления и уточняются коллекторные свойства пласта. На этом заканчивается первая итерация алгоритма решения обратной задачи, при этом вычисляется и величина функционала (7). С уточненными значениями емкостных и фильтрационных параметров вновь решается прямая задача.

Находятся величины невязок забойных давлений в различные моменты времени. Вновь уточняются параметры пласта и рассчитывается значение функционала (7). Если значения функционала, найденные на двух последовательных итерациях различаются менее, чем на заданную величину погрешности δ, то решение обратной задачи считается завершенным. В противном случае, осуществляется переход к следующей итерации и т.д. В результате решения обратной задачи уточняются значения коллекторных параметров, определяющих в рассмотренном случае проницаемость и пористость коллектора во всех элементарных ячейках пласта, которыми аппроксимируется рассматриваемый газовый пласт.

Отметим, что указанная процедура решения позволяет смоделировать изменение проницаемости и пористости во всех точках релаксационно-деформируемого газового пласта по найденным значениям коэффициентов, входящих в их формулы, а также получить соответствующую газодинамическую прогнозную модель разработки исследуемого пласта.

Библиографический список

1. Фейзуллаев Х.А. Численное исследование задач теории нестационарной фильтрации газа и газоконденсатной смеси в пористой среде: Дис. …кан. тех. наук. – Баку, 1992.

2. Jalalov G.I., Guliyev H.F., Feyzullayev Kh.A., Damirov A.A. Parametrical identification of the filtration models of gas with condensed mixture. An International Journal Applied and computational mathematics. – 2008. – v. 7, № 2. – pp. 214–222 (in English).

3. Джалалов Г.И., Фейзуллаев Х.А. Идентификации параметров неоднородного пласта при фильтрации газоконденсатной смеси //«Научные труды» НИПИ SOCAR. – Баку, 2012. – № 3. – С. 38–41.

4. Закиров С.Н. Разработка газовых, газоконденсатных и нефтегазоконденсатных месторождений. – М.: Струна, 1998.

5. Кулиев А.М., Казымов Б.З. Деформация горных пород и ее влияние на их фильтрационно-емкостные свойства и на процессы фильтрации и разработки месторождений нефти и газа. – Баку: Элм, 2009.

6. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980.

7. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем: Пер. с английского. – М.: Недра, 1982.

Сведения об авторах

Фейзуллаев Хасай Азай оглы, SOCAR, Нефтегазовый научно-исследовательский проектный институт, заведующий лабораторий д.т.н. E-mail: Khasay_F@lan.ab.az.

Халилов Мубариз Севдималы оглы, Бакинский государственный университет, доцент кафедры Информатика к.т.н. E-mail: khalilov_mubariz@mail.ru.

Кязымов Буняд Казым, Институт нефти и газа Национальной Академии Наук Азербайджана, заведующий лаборатори, к.ф.м.н. E-mail: khalilov_mubariz@mail.ru.

УДК 532.546

Филиппов А.И., Ахметова О.В., Губайдуллин М.Р.

КРИТЕРИЙ МОДЕЛИ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ОДНОРОДНОГО ПЛАСТА В ЗАДАЧЕ О ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

На основе решения в нулевом асимптотическом приближении задачи о поле давления в трехслойном неоднородном пористом пласте для произвольного распределения проницаемости по толщине центрального пропластка, установлен необходимый критерий модели эквивалентного однородного пласта.

Ключевые слова: поле давления, асимптотический метод, переменные коэффициенты, слоисто-неоднородный пласт.

Filippov A.I., Akhmetova O.V., Gubaydullin M.R.

CRITERION OF THE MODEL OF THE EQUIVALENT HOMOGENEOUS PLAST IN THE PROBLEM OF THE FIELD OF PRESSURE IN A LAYER-UNHEATELY ENVIRONMENT

Based on the solution in the zero asymptotic approximation of the pressure field problem in a three-layer inhomogeneous porous formation for an arbitrary distribution of permeability along the thickness of the central interlayer, the necessary criterion for the equivalent homogeneous formation model is established.

Key words: pressure field, asymptotic method, variable coefficients, layered heterogeneous formation.

Одним из наиболее распространенных типов неоднородности является слоистость горных пород, которая обусловлена природой осадкообразований, перерывами и резкими изменениями условий накопления осадков. Слоистый характер осадочных горных пород, к которым относятся коллекторы нефти и газа, является следствием таких природных явлений, как сезонные и суточные колебания в климате и погоде, изменение в скорости и направлении течений вод и ветра, и других причин. В зависимости от степени проявления этих факторов мощности слоев могут изменяться от долей сантиметров до метров [1, 5].

По этой причине особую важность представляют задачи, описывающие поле давления в коллекторах нефти и газа с учетом слоистой неоднородности.

© Филиппов А.И., Ахметова О.В., Губайдуллин М.Р., 2017

На рис. 1 представлена геометрия течения флюида в цилиндрической системе координат, ось z_d которой совпадает с осью скважины. Пласт представляет собой систему из трех пропластков с плоскими границами раздела $z_d = \pm h$ покрывающий и подстилающий пласты считаются слабопроницаемыми в горизонтальном направлении, средняя область является проницаемой и в горизонтальном, и в вертикальном направлениях, ее проницаемость зависит от вертикальной координаты.

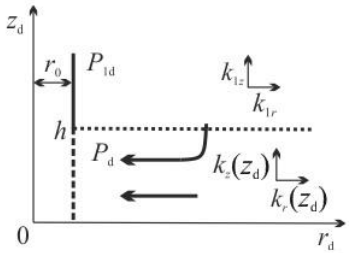


Рис 1. Геометрия задачи о радиальной фильтрации в слоисто неоднородном пласте

Математическая постановка гидродинамической задачи в таких предположениях включает в себя уравнение пъезопроводности для окружающих пород и центрального пропластка. Окружающие породы являются сильно анизотропными, поэтому производной от P_{1d} по r можно пренебречь

$$\frac{\partial P_{1d}}{\partial \tau} - \chi_1 \frac{\partial^2 P_{1d}}{\partial z_d^2} = 0,$$

рассмотрен квазистационарный частный случай [4]

$$k_r(z_d)\frac{1}{r_d}\frac{\partial}{\partial r_d}\left(r_d \frac{\partial P_d}{\partial r_d}\right) + \frac{\partial}{\partial z_d}\left(k_z(z_d)\frac{\partial P_d}{\partial z_d}\right) = 0.$$

Считается, что свойства подстилающих и покрывающих пластов идентичны. В соответствии с этим в постановку задачи введено условие симметрии

$$\left.\frac{\partial P_d}{\partial z_d}\right|_{z_d=0} = 0 \ .$$

Начальное условие может быть записано только для окружающей среды, поскольку уравнение пъезопроводности в центральном пласте является квазистационарным

$$P_{1d}\big|_{\tau=0} = 0 .$$

На границе раздела сред заданы равенства давлений и потоков

$$P_{1d}\big|_{z_d=h} = P_d\big|_{z_d=h}, k_{1z}\left.\frac{\partial P_{1d}}{\partial z_d}\right|_{z_d=h} = k_z(z_d)\left.\frac{\partial P_d}{\partial z_d}\right|_{z_d=h} .$$

Для случая постоянного отбора из неоднородного пласта давление на левой границе, согласно законам Дарси и сохранения массы, удовлетворяет интегральному условию

$$\frac{4\pi}{\mu}\int_0^h k_r(z_\mathrm{d})\lim_{r_\mathrm{d}\to 0}\left(r_\mathrm{d}\frac{\partial P_\mathrm{d}}{\partial r_\mathrm{d}}\right)dz_\mathrm{d} = -Q\,. \qquad (1)$$

Проблема полей давления в слоистых структурах сведена к задаче сопряжения, содержащей переменные коэффициенты. Метод решения таких задач с переменными коэффициентами описан в [3].

С помощью следующих соотношений

$$t = \chi_1\,\tau/h^2\,,\quad z = z_\mathrm{d}/h\,,\quad r = r_\mathrm{d}/h\,,\ P = P_\mathrm{d}/P_0\,,\ P_1 = P_{1\mathrm{d}}/P_0\,,$$
$$k_r(z) = k_r(z_\mathrm{d})/k_{1z}\,,\ k_z(z) = k_z(z_\mathrm{d})/k_{1z}\,,\ q = \mu Q/(4\pi P_0 h k_{1z})$$

задача приведена к безразмерному виду

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right) + \frac{1}{k_r(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z(z)\frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0, \qquad (2)$$

$$P_1\big|_{z=1} = P\big|_{z=1}\,,\ \left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=0} = 0\,,\ \left.\frac{\partial P_1}{\partial z}\right|_{z=1} = k_z(z)\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=1}\,, \qquad (3)$$

$$P_1\big|_{t=0} = 0\,,\ \int_0^1 k_r(z)\lim_{r\to 0}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)dz = -q\,. \qquad (4)$$

Как и в [2], в задачу (2)–(4) перед первой и второй производными от P по z формально введен параметр асимптотического разложения ε. Физический смысл такой параметризации, а так же процедура разложение задачи по степеням ε приведены в [2].

Условие (4) в постановке для нулевого коэффициента имеет вид

$$\int_0^1 k_r(z)\lim_{r\to 0}\left(r\frac{\partial P^{(0)}}{\partial r}\right)dz = -q\,. \qquad (5)$$

Из постановки для наименьшей степени ε следует, что $P^{(0)} = P^{(0)}(r,t)$ является функцией от t и r и не зависит от z. Благодаря этому $P^{(0)}$ можно вынести из под знака интеграла в условии (5). Условие (5) преобразуется к виду

$$\langle k_r(z)\rangle\lim_{r\to 0}\left(r\frac{\partial P^{(0)}}{\partial r}\right) = -q,\ \text{где}\ \langle k_r(z)\rangle = \int_0^1 k_r(z)dz\,.$$

К постановке задачи для нулевого коэффициента применена процедура «расцепления» [3]; благодаря этому она не содержит коэффициентов, зависящих от z. В пространстве оригиналов имеет вид

$$P^{(0)} = \frac{q}{2\langle k_r(z)\rangle\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \int_{r^2/4\tau\langle k_r(z)\rangle}^{\infty} \exp(-u)\frac{du}{u} d\tau,$$

$$P_1^{(0)} = \frac{q}{2\langle k_r(z)\rangle\sqrt{\pi t}} \int_{z-1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \int_{\frac{r^2}{4(\tau-z+1)\langle k_r(z)\rangle}}^{\infty} \exp(-u)\frac{du}{u} d\tau.$$

Найденное решение не содержит переменных коэффициентов проницаемости, однако в него входит среднеинтегральное значение проницаемости. Если принять, что

$$\langle k_r(z)\rangle = k_r^*, \tag{6}$$

где k_r^* – горизонтальная составляющая проницаемости однородного центрального пропластка [2], то решение, полученное в работе, совпадает с решением, полученным для модели с однородным центральным пропластком [2].

Таким образом, выражение (6) является критерием использования эквивалентного однородного пласта. Итак, если при расчетах достаточно точности нулевого приближения, то можно пользоваться моделью однородного пласта [2], полагая при этом его значение проницаемости равным средне интегральному соответствующего неоднородного пласта.

Библиографический список

1. Бан А. и др. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. – М.: Гостоптехиздат, 1962. – 275 с.

2. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Губайдуллин М.Р. Поле давления при радиальной фильтрации в неоднородном ортотропном пласте в асимптотическом приближении // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88. – № 6. – С. 1285–1297.

3. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Губайдуллин М.Р. Асимптотический метод покоэффициентного осреднения в задаче о поле давления в неоднородном трехслойном пласте // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики: Тезисы докладов международной конференции. – М.: МГУ имени М.В. Ломоносова: МАКС Пресс, 2016. – С. 248.

4. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Губайдуллин М.Р. Первое асимптотическое приближение задачи о поле давле-

ния в неоднородной ортотропной пористой среде // Известия Уфимского научного центра РАН. – 2016. – № 1. – С. 5–12.

5. Чекалюк Э.Б. Основы пьезометрии залежей нефти и газа. – Киев: ГИТЛ УССР, 1965.

Сведения об авторах

Филиппов Александр Иванович, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой общей и теоретической физики СФ БашГУ. E-mail: filippovai@rambler.ru.

Ахметова Оксана Валентиновна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник СФ БашГУ. E-mail: ahoksana@yandex.ru.

Губайдуллин Марат Радикович, младший научный сотрудник, СФ БашГУ. E-mail: fir_bmf@mail.ru.

УДК 532.546

Филиппов А.И., Ахметова О.В., Пилюкова Е.Н.

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ В НЕФТЯНОЙ СКВАЖИНЕ

В работе представлены расчеты температурного поля в скважине с учетом зависимости теплоемкости от температуры, осуществленные на основе асимптотического решения задачи сопряжения о нестационарном теплообмене в скважине.

Ключевые слова: нефтяная скважина, теплоёмкость, поле температур, асимптотические решения.

Filippov A.I., Akhmetova O.V., Pilyukova E.N.

NONLINEAR PROBLEM OF THE TEMPERATURE FIELD IN OIL WELL

The paper presents the calculations of the temperature field in the borehole, taking into account the temperature dependence of the heat capacity, based on the asymptotic solution of the conjugation problem on non-stationary heat transfer in the borehole.

Keywords: oil well, heat capacity, temperature field, asymptotic solutions.

Задачи сопряжения о поле температуры в скважине, в общем случае являются нелинейными, а входящие в них уравнения содержат переменные коэффициенты, связанные с учетом зависимости профи-

© Филиппов А.И., Ахметова О.В., Пилюкова Е.Н., 2017

ля скорости и теплопроводности от радиальной координаты, а также плотности и теплоемкости сжимаемой среды от вертикальной координаты и температуры [2–5].

Исследование температурных полей ламинарных и турбулентных потоков сведено к решению нелинейной задачи о нестационарном теплообмене несжимаемой жидкости в скважине радиуса r_0, уравнения в частных производных которой включает переменные коэффициенты, описывающие радиальные профили скорости и теплопроводности от пространственных координат, а также зависимость объемной теплоемкости от температуры.

На основе анализа экспериментальных данных [1] обоснована возможность представления зависимости теплоемкости c и теплопроводности λ от температуры θ с высокой точностью линейной функцией. Указанные линейные функции представляют сумму первых двух слагаемых рядов Тейлора, где θ^* – температура в точке линеаризации, $\sigma^* = \frac{1}{c^*}\frac{\partial c}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta^*}$ – температурный коэффициент теплоемкости. Этот температурный коэффициент может быть принят в качестве малого параметра задачи. Математическая постановка задачи о температурном поле в стволе действующей скважины с учетом вышеизложенного имеет вид

$$c_1\rho_1\frac{\partial\theta_1}{\partial t} - \lambda_{r1}\frac{1}{r_\text{d}}\frac{\partial}{\partial r_\text{d}}\left(r_\text{d}\frac{\partial\theta_1}{\partial r_\text{d}}\right) - \lambda_{z1}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z_\text{d}^2} = 0,\ \ r_\text{d} > r_0,\ t > 0,\ z_\text{d} > 0, \tag{1}$$

$$c\rho\left(1+\sigma^*\left(\theta-\theta^*\right)\right)\frac{\partial\theta}{\partial t} - \lambda_r\frac{1}{r_\text{d}}\frac{\partial}{\partial r_\text{d}}\left(r_\text{d}\lambda\left(\frac{r_\text{d}}{r_0}\right)\frac{\partial\theta}{\partial r_\text{d}}\right) -$$

$$-\lambda_z\frac{\partial^2\theta}{\partial z_\text{d}^2} + c\rho\left(1+\sigma^*\left(\theta-\theta^*\right)\right)v_0 R\left(\frac{r_\text{d}}{r_0}\right)\frac{\partial\theta}{\partial z_\text{d}} = q_\text{d}, \tag{2}$$

$$r_\text{d} < r_0,\ t > 0,\ z_\text{d} > 0,$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_{01} - \Gamma z_\text{d},\ \theta_1\big|_{t=0} = \theta_{01} - \Gamma z_\text{d},\ \theta\big|_{r_\text{d}=r_0} = \theta_1\big|_{r_\text{d}=r_0}, \tag{3}$$

$$\left(\lambda_r\lambda\left(\frac{r_\text{d}}{r_0}\right)\frac{\partial\theta}{\partial r_\text{d}}\right)\Bigg|_{r_\text{d}=r_0} = \lambda_{r1}\frac{\partial\theta_1}{\partial r_\text{d}}\Big|_{r_\text{d}=r_0}, \tag{4}$$

$$\theta_1\big|_{r_\text{d}\to\infty} = \theta_{01} - \Gamma z_\text{d},\ \theta\big|_{z_\text{d}=0} = \theta_{10}(t). \tag{5}$$

Для задачи о теплообмене турбулентного потока в скважине определена базисная совокупность безразмерных параметров: $r = r_{\text{d}}/r_0$, $z = z_{\text{d}}/D$, $\text{Fo} = a_{r1}t/r_0^2$, $T_j = \left(\theta_j - \theta_{01} + \Gamma z_{\text{d}}\right)/\theta_{11}$, $\nu = r_0/D$, $\Lambda = \lambda_{r1}/\lambda_r$, $\text{Pe} = \nu r_0/a_{r1}$, $\theta_{11} = \Gamma D$, $\chi = c_1\rho_1/c\rho$, $\text{H} = \eta\rho g r_0/\nu\theta_{11}$, $\sigma = \sigma^*\,\Gamma D$, позволившая привести задачу к безразмерному виду.

Решение проблем, обусловленных нелинейностью задачи, осуществлено на основе метода малого параметра, каковым является коэффициент σ. Путем разложения по указанным параметрам исходная нелинейная задача сведена к линейным для нулевого коэффициента по σ. Эта задача содержит параметры, зависящие от пространственных координат – переменные коэффициенты. Проблема переменных коэффициентов решается на основе метода покоэффициентного осреднения [5].

Поправка, обусловленная зависимостью теплоемкости от температуры, отыскивается из краевой задачи, полученной при σ^1.

Решения соответствующих задач для нулевого и первого коэффициентов асимптотического по σ в нулевом приближении по формальному параметру имеют вид соответственно:

$$T_{[0]}^{(0)} \approx T_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{\chi z}{R_1(1)\text{Pe}\nu\sqrt{\text{Fo} - z/\left(2R_1(1)\text{Pe}\nu\right)}}\right)\Phi\left(\text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)\text{Pe}\nu}\right) +$$

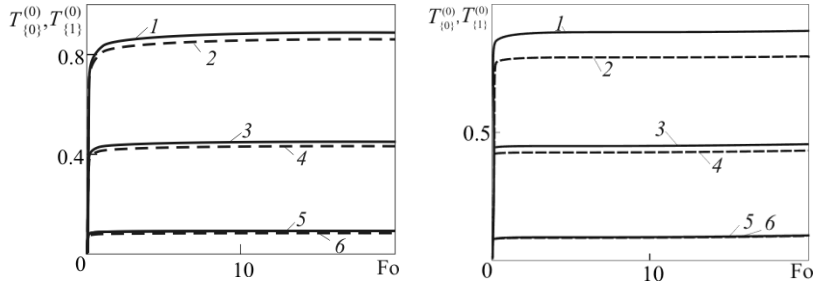
$$+\int_0^z (1-\text{H})\operatorname{erfc}\left(\frac{\chi(z-\xi)}{R_1(1)\text{Pe}\nu\sqrt{\text{Fo} - (z-\xi)/\left(2R_1(1)\text{Pe}\nu\right)}}\right)\Phi\left(\text{Fo} - \frac{z-\xi}{2R_1(1)\text{Pe}\nu}\right)d\xi \text{ и}$$

$$T_{\{1\}}^{(0)} = \int_0^z\int_0^t \frac{F_1}{2R_1(1)\text{Pe}\nu}\psi\left(\frac{\chi}{\text{Pe}\nu}, \text{Fo} - \tau - \frac{z-z'}{2R_1(1)\text{Pe}\nu}\right)\Phi\left(\text{Fo} - \frac{z-z'}{2R_1(1)\text{Pe}\nu}\right)d\tau dz',$$

где $F_1(r,z,\text{Fo}) = -\int_0^r r'\left(T_{\{0\}} - T^*\right)\left(\frac{\partial T_{\{0\}}}{\partial \text{Fo}} + R(r)\text{Pe}\nu\frac{\partial T_{\{0\}}}{\partial z}\right)dr'$, а $\Phi(x)$ – единичная функция Хевисайда.

На рис. 1 представлены кривые зависимости безразмерной температуры от безразмерного времени Fo на разных глубинах. Зависимости температуры от времени без учета нелинейной поправки $T_{\{0\}}^{(0)}$ представлены сплошными линиями, а с учетом этой поправки – $T_{\{1\}}^{(0)}$ –

штриховыми. Из рисунка видно, что учет зависимости теплоемкости от температуры приводит к уменьшению ее абсолютных возмущений.



а *б*

Рис. 1. Динамика температуры в нулевом (сплошные линии) и первом (штриховые линии) асимптотических приближениях по σ на разных глубинах: 1, 2 – z = 1, 3, 4 – 0.5, 5, 6 – 0.1. Расчетные параметры: а) H = 0.1, Pe ν *= 10, T* = 0.1,* χ*=1.3,* σ *= 0.04, б) H = 0.1,* Pe ν *= 50, T* = 0.1,* χ*=2,* σ *= 0.12*

Абсолютная величина вклада нелинейности, как следует из рисунка, увеличивается с ростом времени и увеличением координаты *z*, т.е. с уменьшением глубины. Относительные значения вклада нелинейности по теплоемкости при выбранных на рис. 1, *а* значениях параметров невелики и при Fo > 0.1 не превышают 3 %. В то же время с ростом параметра σ (рис. 1, *б*) вклад нелинейности возрастает и при указанных значениях достигает 11 %, что при необходимости может быть учтено в практических расчетах.

Итак, применение асимптотического метода обеспечило возможность построения аналитического решения нелинейной задачи о температурном поле в скважине.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проектов № 16-08-00548 А, № 16-08-00728 А.

Библиографический список

1. Антониади Д.Г., Гарушев А.Р., Ишханов В.Г. Настольная книга по термическим методам добычи нефти – Краснодар: Советская Кубань, 2000. – 464 с.

2. Филиппов А.И. Ахметова О.В., Родионов А.С. Температурные поля ламинарных и турбулентных потоков жидкости в скважинах. – Уфа: Изд-во УГНТУ, 2013. – 122 с.

3. Филиппов А.И., Филиппов К.А. Интерпретация скважинных термограмм. – Уфа: Гилем, 2004. – 160 с.

4. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В., Горюнова М.А. Анализ температурного поля цилиндрического потока на основе «в среднем точного» решения // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51.– № 3. – С. 84–93.

5. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В., Горюнова М.А. Построение «в среднем точного» асимптотического решения задачи о радиальном распределении температурного поля в скважине // Теплофизика высоких температур. – № 3. – Т. 46. – 2008. – С. 449–456.

Сведения об авторах

Филиппов Александр Иванович, доктор технических наук, профессор СФ БашГУ. E-mail: filippovai@rambler.ru.

Ахметова Оксана Валентиновна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: ahoksana@yandex.ru.

Пилюкова Елена Николаевна, магистрант СФ БашГУ. E-mail: lenochkapilukova@mail.ru.

УДК 532.546

Филиппов А.И., Ковальский А.А., Ахметова О.В.

ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ В СКВАЖИНЕ

В работе представлено решение задачи о фильтрационно-волновом поле в нулевом асимптотическом приближении в неоднородном пласте в цилиндрической системе координат.

Ключевые слова: нефтяной пласт, фильтрационные волны, асимптотические решения.

Filippov A.I., Kovalskiy A.A., Akhmetova O.V.

FILTRATION WAVES IN AN INHOMOGENEOUS RESERVOIR UNDER HARMONIC PERTURBATIONS IN A WELL

The paper presents a solution of the problem of a filtration-wave field in the zero asymptotic approximation in an inhomogeneous reservoir in a cylindrical coordinate system.

Keywords: oil reservoir, filtration waves, asymptotic solutions.

Определение поля давления в нефтяном пласте является основной задачей подземной гидромеханики. Решения таких задач составляют научную основу разработки нефтегазовых месторождений. Для

© Филиппов А.И., Ковальский А.А., Ахметова О.В., 2017

интенсификации нефтеизвлечения, зондирования пластов и при акустическом каротаже используются волновые поля в пласте, возбуждаемые источником в скважине. Особую важность такие исследования имеют для развития акустических методов контроля образования трещин при гидроразрыве пластов.

Математическая постановка гидродинамической задачи о поле давления $\widetilde{P}_{\mathrm{d}1}$, $\widetilde{P}_{\mathrm{d}}$ в симметричном трехслойном пласте в цилиндрической системе координат при гармонических возмущениях в скважине в известных предположениях включает телеграфное уравнение [2], учитывающее преобладание вертикальной проницаемости k_{1z} в верхнем пласте

$$\frac{1}{c_{1r}^2}\frac{\partial^2\widetilde{P}_{\mathrm{d}1}}{\partial\tau^2}+\frac{1}{\chi_{1r}}\frac{\partial\widetilde{P}_{\mathrm{d}1}}{\partial\tau}-\frac{k_{1z}}{k_{1r}}\frac{\partial^2\widetilde{P}_{\mathrm{d}1}}{\partial z_{\mathrm{d}}^2}=0\,,\ \tau>0\,,\ z_{\mathrm{d}}>h\,, \tag{1}$$

волновое уравнение в центральном пласте

$$\frac{1}{c_r^2}\frac{\partial^2\widetilde{P}_{\mathrm{d}}}{\partial\tau^2}+\frac{1}{\chi_r}\frac{\partial\widetilde{P}_{\mathrm{d}}}{\partial\tau}-\frac{k_z}{k_r}\frac{\partial^2\widetilde{P}_{\mathrm{d}}}{\partial z_{\mathrm{d}}^2}-\frac{1}{r_{\mathrm{d}}}\frac{\partial}{\partial r_{\mathrm{d}}}\left(r_{\mathrm{d}}\frac{\partial\widetilde{P}_{\mathrm{d}}}{\partial r_{\mathrm{d}}}\right)=0\,, \tag{2}$$

$$\tau>0\,,\ 0<z_{\mathrm{d}}<h\,,\ r_{\mathrm{d}}>0\,,$$

условие симметрии в центре пласта

$$\left.\frac{\partial\widetilde{P}_{\mathrm{d}}}{\partial z_{\mathrm{d}}}\right|_{z_{\mathrm{d}}=0}=0. \tag{3}$$

В начальный момент времени возмущения давления отсутствуют

$$\left.\widetilde{P}_{\mathrm{d}1}\right|_{\tau=0}=\widetilde{P}_{\mathrm{d}11},\ \left.\widetilde{P}_{\mathrm{d}}\right|_{\tau=0}=\widetilde{P}_{\mathrm{d}01}. \tag{4}$$

На границе раздела сред заданы равенства давлений и потоков

$$\left.\widetilde{P}_{\mathrm{d}1}\right|_{z_{\mathrm{d}}=h}=\left.\widetilde{P}_{\mathrm{d}}\right|_{z_{\mathrm{d}}=h},\quad k_{1z}\left.\frac{\partial\widetilde{P}_{\mathrm{d}1}}{\partial z_{\mathrm{d}}}\right|_{z_{\mathrm{d}}=h}=k_z\left.\frac{\partial\widetilde{P}_{\mathrm{d}}}{\partial z_{\mathrm{d}}}\right|_{z=h}. \tag{5}$$

Давление на левой границе (в скважине радиуса $r_{0\mathrm{d}}$, устремленного к нулю) изменяется по гармоническому закону

$$\lim_{r_{0\mathrm{d}}\to 0}\ 2\pi r_{0\mathrm{d}}h\frac{k_r}{\mu}\left.\frac{\partial\widetilde{P}_{\mathrm{d}}}{\partial r_{\mathrm{d}}}\right|_{r_{\mathrm{d}}=r_{0\mathrm{d}}}=Q\exp\left(i\omega_{\mathrm{d}}\tau\right). \tag{6}$$

С использованием соотношений

$$\widetilde{P}_j=\widetilde{P}_{j\mathrm{d}}\big/P_{01}\,,\ r=r_{\mathrm{d}}/h\,,\ r_0=r_{0\mathrm{d}}/h\,,\ z=z_{\mathrm{d}}/h\,,\ t=\tau\chi_{1r}\big/h^2\,, \tag{7}$$

$$\mathrm{Af} = \chi_{1r}^2 / \left(h^2 c_{1r}^2\right),\ \chi = \chi_{1r}/\chi_r\ ,\ {}^{1z}_{1r}k = k_{1z}/k_{1r}\ ,\ {}^{z}_{r}k = k_z/k_r\ ,$$
$$C = c_{1r}^2 / c_r^2\ ,\ \omega = \omega_{\mathrm{d}} h^2 / \chi_{1r}\ ,\ q = -Q\mu/\left(2\pi h k_r\right),$$

где j – номер области, где c – скорость распространения фильтрационно-волновых возмущений, м/с; k – проницаемость, м^2; h – полутолщина средней области, м; P_0 – амплитуда давления, Па; x_{d}, – горизонтальная координата, м; m – пористость; μ – вязкость, Па·с; ω_{d} – циклическая частота, с$^{-1}$; β – сжимаемость, Па$^{-1}$. Индексы нижние: 0 – начальные значения параметров, 1 – номер среды, z, x – направление, d (dimension) –размерный. Индексы верхние (в скобках) – порядковый номер коэффициента асимптотического разложения.

С использованием (7) запишем задачу (1)–(6) в безразмерном виде. Решение задачи, представленной в безразмерных переменных, отыскивается в виде произведения

$$\widetilde{P}_j = P_j \exp\left(i\omega t\right). \tag{8}$$

Задача для амплитуд давления P_1, P представлена как

$$\left(i\omega - \mathrm{Af}\omega^2\right)P_1 - {}^{1z}_{1r}k \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0\ ,\ z > 1, \tag{9}$$

$$\left(i\omega\chi - \mathrm{Af}\, C\omega^2\right)P - {}^{z}_{r}k \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right) = 0\ ,\ \ 0 < z < 1,\ r > 0, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=0} = 0\ ,\ P_1\big|_{z=1} = P\big|_{z=1}\ ,\ \left.\frac{\partial P_1}{\partial z}\right|_{z=1} = {}^{z}_{1z}k \left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=1}\ , \tag{11}$$

$$\lim_{r_0 \to 0} \left.\frac{\partial P}{\partial r}\right|_{r=r_0} = -q\ . \tag{12}$$

Предполагается, что решение является регулярным на бесконечности, т.е. при устремлении пространственных координат в бесконечность искомое решение, а при необходимости и его производная, обращается в нуль.

Рассмотрим более общую задачу, полученную введением произвольного асимптотического параметра ε перед первой и второй производными от функции возмущения давления в центральном пласте по z, как в уравнениях, так и в граничных условиях задачи

$$\left(i\omega - \mathrm{Af}\omega^2\right)P_1 - {}^{1z}_{1r}k \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0\ ,\ z > 1, \tag{13}$$

$$\left(i\omega\chi - \mathrm{Af}\, C\omega^2\right)P - \frac{z}{r}k\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right) = 0\,,\quad 0 < z < 1,\ r > 0\,, \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=0} = 0\,,\ P_1\big|_{z=1} = P\big|_{z=1}\,,\ \left.\frac{\partial P_1}{\partial z}\right|_{z=1} = \left.\frac{1z}{\varepsilon}k\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=1}\,, \tag{15}$$

$$\lim_{r_0\to 0}\left.\frac{\partial P}{\partial r}\right|_{r=r_0} = -q\,. \tag{16}$$

Отметим, что решение исходной задачи может быть получено из решения параметризованной задачи при $\varepsilon = 1$. Решение задачи (13)–(16) найдено путем представления функции давления P а каждой из областей асимптотической формулой по параметру ε

$$P_j = P_j^{(0)} + \varepsilon P_j^{(1)} + \ldots + \varepsilon^n P_j^{(n)} + \theta_j^{(n)}\,. \tag{17}$$

Подставив выражения (17) в (13)–(16) и сгруппировав слагаемые по степеням параметра разложения ε, получим

$$\left(i\omega - \mathrm{Af}\,\omega^2\right)P_1^{(0)} - \frac{1z}{1r}k\frac{\partial^2 P_1^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon\left[\left(i\omega - \mathrm{Af}\,\omega^2\right)P_1^{(1)} - \frac{1z}{1r}k\frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2}\right] + \ldots = 0\,, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon\left[\left(i\omega\chi - \mathrm{Af}\,\tilde{N}\omega^2\right)P^{(0)} - \frac{z}{r}k\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P^{(0)}}{\partial r}\right)\right] + \\ &+\varepsilon^2\left[\left(i\omega\chi - \mathrm{Af}\,\tilde{N}\omega^2\right)P^{(1)} - \frac{z}{r}k\frac{\partial^2 P^{(2)}}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P^{(1)}}{\partial r}\right)\right] + \ldots = 0\,, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial P^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=0} + \varepsilon\left.\frac{\partial P^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=0} + \ldots = 0\,, \\ &\left(P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \ldots\right)\Big|_{z=1} = \left(P_1^{(0)} + \varepsilon P_1^{(1)} + \ldots\right)\Big|_{z=1}\,, \\ &\left.\frac{1z}{1z}k\frac{\partial P^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=1} + \varepsilon\left[\left.\frac{1z}{1z}k\frac{\partial P^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=1} - \left.\frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=1}\right] + \ldots = 0\,, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\lim_{r_0\to 0}\left.\frac{\partial P^{(0)}}{\partial r}\right|_{r=r_0} + \varepsilon\lim_{r_0\to 0}\left.\frac{\partial P^{(1)}}{\partial r}\right|_{r=r_0} + \ldots = -q\,. \tag{21}$$

Анализ задачи показывает, что сомножители при степенях ε в (19) содержат соседние коэффициенты разложения и в этом смысле

являются «зацепленными». Для решения соответствующего уравнения осуществлена процедура расцепления [3].

Формально устремим ε к нулю в уравнении (19) получим $\left(\partial^2 P^{(0)}/\partial z^2\right)=0$. Результат интегрирования $\left(\partial P^{(0)}/\partial z\right)=A(r,z)$, с учетом граничных условий (20), позволяет установить, что $A(r,z)=0$. Таким образом, в нулевом приближении давление является функцией только от r и не зависит от z: $P^{(0)}=P^{(0)}(r)$, т.е. одинаково в каждой точке любого сечения, параллельного оси z.

Далее, приравнивая к нулю коэффициенты при ε в уравнении (19), получим

$$\left(i\omega\chi-\mathrm{Af}\,\tilde{N}\omega^2\right)P^{(0)}-{}_r^z k\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial z^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P^{(0)}}{\partial r}\right)=0 \qquad (22)$$

или

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial z^2}=\varphi^2 P^{(0)}-\frac{1}{{}_r^z k\, r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P^{(0)}}{\partial r}\right)=\hat{L}P^{(0)}, \qquad (23)$$

где $\hat{L}P^{(0)}=\varphi^2-\frac{1}{{}_r^z k\, r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$, $\varphi=\sqrt{\frac{i\omega\chi-\mathrm{Af}\,\tilde{N}\omega^2}{{}_r^z k}}$.

также не зависит от z. Проинтегрировав последовательно (23), найдем выражения для первой производной от первого коэффициента $P^{(1)}$ по переменной z и первого коэффициента разложения в виде квадратного трехчлена

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial z}=z\hat{L}P^{(0)}+E(r),\ P^{(1)}=\frac{z^2}{2}\hat{L}P^{(0)}+zE(r)+F(r)$$

с функциональными коэффициентами $E(r)$, $F(r)$, подлежащими определению. Воспользовавшись граничными условиями (20) имеем

$$\varphi^2 P^{(0)}-\frac{1}{{}_r^z k\, r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P^{(0)}}{\partial r}\right)=\frac{1}{{}_{1z}^{z}k}\frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z=1}. \qquad (24)$$

Окончательная постановка задачи в нулевом приближении включает также уравнения в покрывающих и подстилающих породах

$$\varphi_1^2 P_1^{(0)}-\frac{\partial^2 P_1^{(0)}}{\partial z^2}=0,\quad \text{где}\quad \varphi_1=\sqrt{\frac{i\omega-\mathrm{Af}\,\omega^2}{{}_{1r}^{1z}k}}, \qquad (25)$$

а также соответствующие граничные и начальные условия

$$P^{(0)} = P_1^{(0)}\big|_{z=1}, \ \lim_{r_0 \to 0} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = -q \ . \qquad (26)$$

Выражения (24)–(26) представляют краевую задачу для нулевого коэффициента разложения или нулевого приближения. Отметим, что эффективность используемого метода обусловлена тем, что первая производная по вертикальной координате исходной задачи трансформировалась в след производной из внешней области – для нулевого коэффициента [4]. Это обстоятельство в известном смысле перекликается с идеей интегральных преобразований, которые преобразуют производные в алгебраические выражения. Однако наиболее результативным в смысле построения конструктивных расчетных формул, как показано ниже, является комплексное использование обоих методов.

Решение в нулевом приближении найдено с использованием интегрального преобразования Фурье – Бесселя [1]. Задача (24)–(26) в пространстве изображений имеет вид

$$\varphi_1^2 P_1^{(0)\grave{e}} - \frac{\partial^2 P_1^{(0)\grave{e}}}{\partial z^2} = 0 \ , \left({}_r^z k\varphi^2 + s^2\right) P^{(0)\grave{e}} + q = \frac{1}{{}_{1z}^{z} k} \frac{\partial P_1^{(0)\grave{e}}}{\partial z}\bigg|_{z=1} \ , \qquad (27)$$

$$P^{(0)\grave{e}} = P_1^{(0)\grave{e}}\big|_{z=1} \ . \qquad (28)$$

Решение уравнения (5.1) с учетом условия ограниченности возмущения давления бесконечности, представлено как

$$P_1^{(0)\grave{e}} = C_1 \exp(-\varphi_1 z) \ . \qquad (29)$$

Константа C_1 определена из условия (28): $C_1 = P^{(0)\grave{e}} \exp(\varphi_1)$. Таким образом в нулевом приближении давление настилающего пласта выражается через давление проницаемого пласта соотношением

$$P_1^{(0)\grave{e}} = P^{(0)\grave{e}} \exp(-\varphi_1 (z-1)) \ . \qquad (30)$$

Используя (5.5) найдем производную по вертикальной оси z: $\dfrac{\partial P_1^{(0)\grave{e}}}{\partial z} = -\varphi_1 P^{(0)\grave{e}}$ и подставив в (5.2), получим уравнение для нахождения $P^{(0)u}$

$$\left(\varphi_2^2 + s^2\right) P^{(0)\grave{e}} + q = 0 \text{, где } \varphi_2 = \sqrt{{}_r^z k \left(\varphi^2 + \frac{\varphi_1}{{}_{1z}^{z} k}\right)} \ . \qquad (31)$$

Решение уравнение (31) запишется как $P^{(0)\grave{e}} = -q\left(\varphi_2^2 + s^2\right)^{-1}$. Переход к оригиналам осуществлен при помощи таблиц [1]

$$\left(x^2+s^2\right)^{-1} \Rightarrow K_0(xr).$$

Выражения для нулевого коэффициента асимптотического разложения в пространстве оригиналов имеет вид

$$P^{(0)} = -qK_0(\varphi_2 r),\ P_1^{(0)} = -qK_0(\varphi_2 r)\exp(-\varphi_1(z-1)).$$

Из полученного решения следует, что в интервале пласта $0<z<1$ величина амплитуды давления $P^{(0)}$ не зависит от вертикальной координаты *z*, а определяется только радиальной координатой *r*. Это означает, что полученное нулевое приближение описывает в интервале пласта цилиндрическую волну, наиболее близкую к реальной, т.е. *эквивалентную цилиндрическую волну* давления.

Таким образом, применение «в среднем точной» модификации асимптотического метода к задаче о фильтрационно-волновом поле в неоднородной анизотропной среде позволяет найти простые аналитические выражения для нулевого коэффициента асимптотического разложения.

Найденные решения описывают фильтрационно-волновые поля давления применительно к реальным условиям в акустическом каротаже, сейсморазведке и при интенсификации нефтеизвлечения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 16-08-00548 А.

Библиографический список

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций – М.: Наука, 1970. – 328 с.

2. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Повленкович Р.Ф. Фильтрационные волны в анизотропной среде // Естественные и математические науки в современном мире. – 2014. − № 14. − С. 57−63.

3. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Заманова Г.Ф., Ковальский А.А. Установившиеся двумерные фильтрационно-волновые поля при заданных гармонических возмущениях давления на границе // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. – 2014. − № 5. − С. 181−208.

4. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Юсупова Л.Р. Нулевое асимптотическое приближение задачи о фильтрационно-волновом поле в пористой среде // Инновации в науке. – 2014. − № 30–1. − С. 27−37.

Сведения об авторах

Филиппов Александр Иванович, доктор технических наук, профессор СФ БашГУ. E-mail: filippovai@rambler.ru.

Ковальский Алексей Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент, директор СФ БашГУ. E-mail: aakov68@mail.ru.

Ахметова Оксана Валентиновна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: ahoksana@yandex.ru.

УДК 51–73

Филиппов А.И., Кириллов А.О., Исангильдин Р.Ф.

ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ БЕГУЩИХ ЯЧЕИСТЫХ ТЕЧЕНИЙ

Исследованы выражения для полей скоростей, индуцированных бегущими ячеистыми течениями (или конвективными ячейками) двумерной сплошной среды. Поле скоростей полагается пространственно периодическим и представлено в виде гармонически изменяющихся по пространственным координатам. Конвективные ячейки считаются бегущими с постоянной скоростью в направлении вертикальной оси. Показано, что поле скоростей бегущих ячеистых квазистационарных течений в среде с достаточной точностью может быть выражено в виде первой гармоники Фурье или двумерного бегущего трансциллятора первого порядка.

Ключевые слова: поле скоростей, бегущая кинематическая волна, двумерный гармонический трансциллятор.

Filippov A.I., Kirillov A.O., Isangildin R.F.

FIELD OF VELOCITY OF RUNNING CELLULAR FLOWS

The expressions for velocity fields induced by running cellular currents (or convective cells) of a two-dimensional continuous medium were investigated. The velocity field is assumed to be spatially periodic and is represented in the form of harmonically varying spatial coordinates. The convective cells are considered to be running at a constant speed in the direction of the vertical axis. It is shown that the velocity field of running cellular quasistationary flows in a medium with sufficient accuracy can be expressed in the form of a first Fourier harmonic or a two-dimensional running transcyllator of the first order.

Key words: velocity field, running kinematic wave, two-dimensional harmonic transcyllator.

В природе широко распространены и технике часто проявляются и используются ячеистые течения. По этой причине они являются

© Филиппов А.И., Кириллов А.О., Исангильдин Р.Ф., 2017

актуальными объектами исследования в связи с естественной тепловой конвекцией – одним из примеров самоорганизующихся систем. В соответствующих задачах возникает необходимость нахождения Фурье – компонент, например, при исследовании нового вида переноса – трансцилляторного [2].

Рассмотрен случай двумерного квазистационарного ячеистого течения с осью вращения *y* сплошной среды, расположенной в начальный момент времени в начале координат и скользящей с постоянной скоростью u в направлении вертикальной оси *z*. На границах двумерной ячейки единичных размеров скорость обращается в нуль. Такое скольжение оси вращения соответствует, например, полю скоростей в жидкости, окружающей всплывающие газовые пузырьки или другие тела.

В качестве плоскости движения выбрана координатная плоскость (*x, z).* Выражения для координат поля скоростей, удовлетворяющие уравнению неразрывности, заданы в виде [1]:

$$\mathrm{v}_x = -(z-ut)\left(1-x^2\right)^2\left(1-(z-ut)^2\right), \tag{1}$$

$$\mathrm{v}_z = x\left(1-x^2\right)\left(1-(z-ut)^2\right)^2. \tag{2}$$

Представление поля скоростей в ячеистой среде в виде ряда Фурье описано в работах [2, 3]. Задача заключается в разложении двух координат скорости в двумерные ряды Фурье. Для вычисления коэффициента разложения использованы формулы [10]:

$$c_{nm} = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \mathrm{v}_x(x,z)\sin(\pi n x)\cos(\pi m z)\,dz\,,\ n = 1, 2,..., m = 0, 1, 2... \tag{3}$$

$$d_{nm} = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \mathrm{v}_z(x,z)\cos(\pi n x)\sin(\pi m z)dz\,,\ n = 1, 2,..., m = 0, 1, 2... \tag{4}$$

В формулах учтена симметрия выражений для поля скоростей, вследствие которой остальные коэффициенты Фурье обращаются в нуль.

Для определения коэффициентов Фурье использованы следующие вспомогательные интегралы:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2\,dx = \frac{16}{15}\,, \tag{5}$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 \cos(\pi n x)dx = -\frac{48(-1)^n}{\pi^4 n^4}, \tag{6}$$

$$b_m = \int_{-1}^{1} z(1-z)^2 \sin(\pi m z)dz = -\frac{12(-1)^m}{\pi^3 m^3}, \tag{7}$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} (1-z^2)dz = \frac{4}{3}, \tag{8}$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\cos(\pi m x)dx = -\frac{4(-1)^m}{\pi^2 m^2}, \tag{9}$$

$$b_n = -\int_{-1}^{1} x(1-x^2)\sin(\pi n x)dx = \frac{12(-1)^n}{\pi^3 n^3}. \tag{10}$$

Окончательно выражения для поля скоростей представлены в виде:

$$\mathrm{v}_x = -\frac{32}{5\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\left[1+\frac{90}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\cos(\pi n x)\right]\sin\left(\pi m\left(z-ut\right)\right), \tag{11}$$

$$\mathrm{v}_z = \frac{32}{5\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{90}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m^4}\cos\left(\pi m\left(z\text{-}ut\right)\right)\right]\sin(\pi n x). \tag{12}$$

Из анализа полученных выражений следует, что поля скоростей в рассматриваемом случае представляется *двумя бесконечными совокупностями одномерных и двумерных трансцилляторов*.

Совокупность ячеек в нулевом приближении эквивалентна множеству встречных потоков, поле скорости в которых определяется выражениями

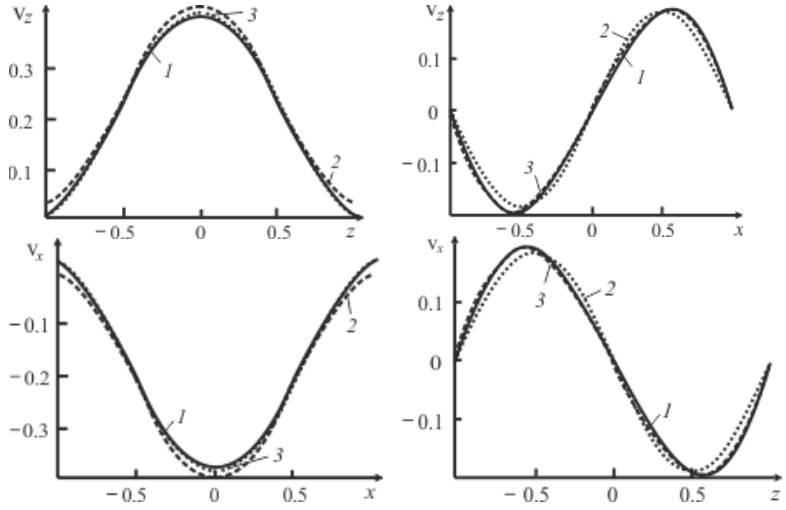
$$\mathrm{v}_x = -\frac{32}{5\pi^3}\sin\left(\pi\left(z-ut\right)\right), \tag{13}$$

$$\mathrm{v}_z = \frac{32}{5\pi^3}\sin(\pi x). \tag{14}$$

Отсюда следует, что v_x компонента поля скорости не зависит от x, как и v_z не зависит от z. Поскольку координаты скорости опреде-

ляются гармоническими зависимостями, то каждое из выражений представляет чередующиеся и равные по величине встречные потоки.

Для поверки полученного разложения и оценки вкладов коэффициентов рядов Фурье осуществлен вычислительный эксперимент, некоторые результаты которого представлены на рис. 1(*а*, *б*).



а *б*

Рис. 1. Сопоставление результатов расчетов по точным зависимостям (кр. 1) и формулам разложения в ряд Фурье с одним (кр. 2) и двумя слагаемыми (кр. 3). В расчетах приняты значения: t = 0, z = 0,5 и x = 0,5

Как видно из графиков, что разложение Фурье в нулевом приближении обеспечивает по сравнению с точным решением точность 94.1 %, а в первом – 97.3 %. В других сечениях потока согласие между точным выражением и нулевым коэффициентом несколько ниже, однако максимальное расхождение между ними не более 28 %.

Это означает, что сохранение в ряде Фурье только одного слагаемого обеспечивает точность, достаточную для многих физических приложений. Сохранение двух слагаемых повышает точность аппроксимации и, главное, значительно улучшает согласие приближенных и численных значений координат скорости в граничных точках.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проектов 16-08-00728 А, 16-08-00548 А.

Библиографический список

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Устойчивость конвективных течений. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
2. Мухаметзянов Э.В. Теплоперенос в среде с конвективными ячейками: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.04.14 / Мухаметзянов Эльвир Венерович. – 2013. – 115 с.
3. Филиппов А.И., Филиппов К.А. О диффузии под воздействием звука // Акустический журнал. – 1991. – Т. 45. – № 3. – С. 414–417.
4. Нигматулин Р.И., Филиппов А.И., Ахатов И.Ш., Ниязгулов С.А. Уравнения с периодическими коэффициентами и теория хаоса // Статика и динамика упорядоченных сред: Межвузовск. научн. сб. Башк. ун-т. – Уфа, 1994. – С. 81–93.
5. Нигматулин Р.И., Филиппов А.И., Хисматуллин А.С. Трансцилляторный перенос тепла в жидкости с газовыми пузырьками // Теплофизика и аэромеханика. – 2012. – Т. 19. – № 5 – С. 595–612.
6. Филиппов А.И., Садриев А.Ф., Мухаметзянов Э.В., Леонтьев А.И. Полигармонический трансциллятор бегущей волны // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 2. – С. 39–44
7. Филиппов А.И., Мухаметзянов Э.В. Представление температурного поля конвективного потока в виде функционала от градиента // Известия уфимского научного центра РАН. – 2016. – № 2. – С. 11–14.
8. Филиппов А.И., Мухаметзянов Э.В., Садриев А.Ф., Леонтьев А.И., Садыкова Л.Ф. Математическая модель классического линейного трансциллятора // Вестник Башкирского университета. – 2013. – Т. 18. – № 2. – С. 359–362.
9. Филиппов А.И., Мухаметзянов Э.В., Леонтьев А.И., Садриев А.Ф. Новая модель теплопереноса – трансциллятор бегущей волны // Международный научно-исследовательский журнал. – 2012. – № 5–2 (5). – С. 28–30.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

Сведения об авторах

Филиппов Александр Иванович, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой общей и теоретической физики СФ БашГУ. E–mail: filippovai@rambler.ru.

Кириллов Андрей Олегович, магистр 2 курса, СФ БашГУ. E–mail: avanfer.@yandex.ru.

Исангильдин Рафис Фанисович, магистр 2 курса, СФ БашГУ. E–mail: eavilmyhero@gmail.com.

УДК 51.73

Филиппов А.И., Мухаметзянов Э.В., Филиппов И.К.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОДНОМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО ТРАНСЦИЛЛЯТОРА

Рассмотрены явления теплопереноса, возникающие в среде со встречными равными по величине потоками, скорость в которых зависит от пространственной координаты по гармоническому закону. Показано, что при наложении градиента температуры в направлении движения возникает дополнительный поток тепла, пропорциональный величине градиента и направленный противоположно ему независимо от направления скорости движения среды.

Ключевые слова: трансцилляторный перенос теплоты, слоистое течение, теплопроводность.

Filippov A.I., Mukhametzyanov E.V., Filippov I.K.

MATHEMATICAL MODEL OF ONE-DIMENSIONAL STATIONARY TRANSTSILLYATOR

Considered the phenomenon of heat transfer occurring in the environment with the counter equal in magnitude to the flow speed which depends on the spatial coordinates according to a harmonic law. It is shown that the imposition of a temperature gradient in the direction of motion there is an additional heat flow propor-tional to the gradient magnitude and are directed oppositely, regardless of the direction of the velocity of the medium. It is established that the additional flow is due to transilating mechanism. The effect refers to the non-equilibrium thermodynamic processes and is the scientific basis for studying a number of phenomena in nature and technology

Key words: transcyllatory heat transfer, laminar flow, heat conduction.

В работах [1–12] показано, что в текущей среде, с переменным неоднородным полем скоростей при наличии градиента температуры или химического потенциала возникает дополнительный поток массы или тепла. Величина соответствующего потока пропорциональна градиенту температуры или химического потенциала, что позволяет сравнивать его с молекулярным или кондуктивным.

В данной статье показано, что трансцилляторный эффект происходит в среде, охваченной слоистым течением, со встречными равными по величине конвективными потоками.

© Филиппов А.И., Мухаметзянов Э.В., Филиппов И.К, 2017

Рассмотрим охватывающее все пространство слоистое стационарное течение среды, в котором величина скорости зависит по гармоническому закону от пространственной координаты, ориентированной нормально к линиям тока. При наличии градиента температуры в направлении движения существенно изменяются переносные свойства системы, поскольку в направлении движения возникает дополнительный к молекулярному поток тепла.

Возрастание коэффициента теплопроводности происходит за счет трансцилляторного эффекта [1–3]. Трансцилляторный теплоперенос относится к диффузионно-конвективным процессам, возникающим при наложении градиента температуры в среде с колебательным относительным перемещением ее участков или частей [4]. Для изучения таких процессов переноса развит математический аппарат, использующий достижения квантовой теории поля [6, 7, 9, 10]. Здесь развитый аппарат применен к наиболее простому случаю – слоистому стационарному течению среды.

Ось x прямоугольной декартовой системы координат направим параллельно линиям тока, а нормально к границам слоев ориентируем ось z. Обозначим пространственный период слоев через L, тогда эффективное волновое число выразится как $k = 2\pi / L$. Ось y направлена параллельно линиям тока, что обеспечивает трансляционную симметрию задачи в направлении данной оси, поэтому $\partial\theta / \partial y = 0$.

В этих предположениях поле скоростей определятся выражением

$$\mathrm{v}_x = A_x \cos kz\,,\ \mathrm{v}_y = \mathrm{v}_z = 0\,, \qquad (1)$$

где Ах – амплитудное значение скорости. Для такого поля скоростей выполняется уравнение непрерывности, а суммарный конвективный поток массы в такой слоистой системе равен нулю, что следует из (1). В отсутствие градиента температуры суммарный конвективный поток тепла также равен нулю.

Такие процессы (рис. 1) широко распространены в природе и технике, поэтому описанная модель представляет значительный научный и практический интерес. По существу, она представляет одномерный стационарный трансциллятор, с помощью линейной комбинации которых могут быть описаны процессы переноса в слоистых встречных потоках с произвольным вертикальным распределением скорости.

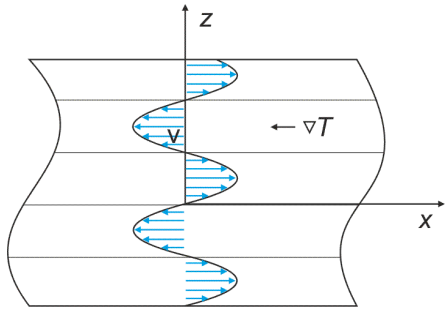


Рис. 1 одномерный стационарный трансциллятор

Следствием слоистого течения является конвективный перенос тепла, который в реальных физических системах преобладает над процессом молекулярной теплопроводности в направлении оси x. Это позволяет опустить соответствующие члены в уравнении теплопроводности, сохранив теплопроводный член вдоль оси *z*.

Определение температурного поля T среды сводится к решению задачи Коши для уравнения конвективной теплопроводности для температурного перепада $\theta = T - T\big|_{t=0}$:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - a_z \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = -\mathrm{v}_x\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} - \Gamma_x\right) = q(x,z,t), \tag{2}$$

$$\theta\big|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

где введены обозначения для координат антиградиента в начальный момент времени $\Gamma_x = -\partial T/\partial x\big|_{t=0}$. Далее по аналогии с [1] осуществлена редукция к эквивалентному интегральному уравнению, связывающему температуру и ее градиент

$$T = T\big|_{t=0} + \frac{1}{4\pi^{3/2}\sqrt{a_z}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t}\left(-\mathrm{v}_x \frac{\partial T}{\partial x}\right)\times$$
$$\times \frac{\delta(x-x')}{\sqrt{t-t'}} \exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4a_z(t-t')}\right] dx'dz'dt'. \tag{4}$$

Для исследования явления переноса тепла предположим, что в среде в течение достаточно длительного времени поддерживается преобладающий градиент температуры, соответствующий начальному антиградиенту $\Gamma_x = -\partial T/\partial x\big|_{t=0}$, а его отклонения, вызванные те-

чением в среде с конвективными ячейками, относительно малы, и в первом приближении ими можно пренебречь. Это означает, что в подынтегральном выражении можно положить

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\Gamma_x , \tag{5}$$

где Γ_x не зависит от времени и от пространственных координат.

Для вычисления среднего значения конвективного потока $\vec{j}_{\text{cv}} = c_l \rho_l \vec{\text{v}} T$ преобразуем сначала выражение для температуры (4). Подставляя (1), в (4) и учитывая (5), и вычислив получившиеся интегралы получим выражение для поля температуры, зависящее от координаты z и времени t

$$T = T\big|_{t=0} + \frac{A_x \Gamma_x}{4\pi k^2 a_z}\left(e^{ikz} + e^{-ikz}\right)\left(1 - e^{-k^2 a_z t}\right). \tag{6}$$

Последнее соотношение использовано для вычисления осредненных значений конвективного потока. Легко показать, что среднее по вертикальной координате значение $\left\langle \vec{\text{v}} T\big|_{t=0} \right\rangle$ = $\left\langle A_x \cos kz\left(-\Gamma_x x + const\right)\right\rangle_z$ равно нулю для слоистого течения жидкости.

С учетом того, что среднее значение $\left\langle \vec{\text{v}} T\big|_{t=0} \right\rangle$ равно нулю, для достаточно больших времен $k^2 a_z t \gg 1$ усредняемое выражение для конвективного потока по оси x представляется в виде

$$\left\langle j_{\text{cv}} \right\rangle = \left\langle c_l \rho_l \text{v}_\text{x} T \right\rangle = \frac{c_l \rho_l A_x^2 \Gamma_x}{4\pi k^2 a_z} \left\langle \cos^2 kz \right\rangle = \frac{c_l \rho_l A_x^2 \Gamma_x}{4\pi k^2 a_z} . \tag{7}$$

Отсюда следует, что среднее значение конвективного потока при наличии градиента температуры в среде со встречными потоками отлично от нуля и пропорциональна величине градиента.

Эффективный коэффициент трансцилляторного переноса, как следует из (8), пропорционален квадрату амплитуды скорости Ax и обратно пропорционален коэффициенту температуропроводности az

$$\lambda_{tr} = \frac{A_x^2}{4\pi k^2 a_z} \tag{8}$$

Это означает, что трансцилляторный перенос вызван движением жидкости вдоль оси x и теплопроводностью в перпендикулярном направлении z.

Итак, встречные потоки равной величины в среде обладают важным свойством, заключающимся в том, что при наложении градиента температуры возникает дополнительный к молекулярному поток тепла, обусловленный трансцилляторным эффектом. Обнаруженный неравновесный термодинамический эффект позволяет объяснить ряд природных явлений и важен для технических приложений.

Библиографический список

1. Филиппов А.И., Филиппов К.А. О диффузии под воздействием звука // Акустический журнал. – 1991. – Т. 45. – № 3. – С. 414–417.
2. Несис Е.И., Шаталов А.Ф., Кармацкий Н.П. Зависимость коэффициента теплоотдачи от амплитуды и частоты вибрации вертикального тонкого нагревателя // Инженерно-физический журнал. – 1994. – Т. 67. – № 1–3. – С. 20–22.
3. Зельдович Я.Б. Точное решение задачи диффузии в периодическом поле скорости и турбулентная диффузия // ДАН СССР. – 1982. – Т. 266. – № 4. – С. 821–826.
4. Нигматулин Р.И., Филиппов А.И., Ахатов И.Ш., Ниязгулов С.А. Уравнения с периодическими коэффициентами и теория хаоса // Статика и динамика упорядоченных сред: Межвузовск. научн. сб. Башк. ун-т. – Уфа, 1994. – С. 81–93.
5. Нигматулин Р.И., Филиппов А.И., Хисматуллин А.С. Трансцилляторный перенос тепла в жидкости с газовыми пузырьками // Теплофизика и аэромеханика. – 2012. – Т. 19. – № 5 – С. 595–612.
6. Филиппов А.И., Котельников В.А., Минлибаев М.Р. Некоторые особенности явления переноса тепла при колебаниях в пористой среде // Теплофизика высоких температур. – 1996. – Т. 34. – № 65. – С. 708–713.
7. Mols B.,Oliemans R. A turbulent diffusion model for particle dispersion and deposition in horizontal tube flow // Int. J. Multiphase Flow. – 1998. – V. 24. – № 1. – P. 55–75.
8. Филиппов А.И., Садриев А.Ф., Мухаметзянов Э.В., Леонтьев А.И. Полигармонический трансциллятор бегущей волны // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 2. – С. 39–44
9. Филиппов А.И., Каримов А.Р., Галимова А.К. Трансцилляторный эффект в среде с двумерным стационарным ячеистым течением // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58. – № 4. – С. 58–64.
10. Филиппов А.И., Мухаметзянов Э.В. Представление температурного поля конвективного потока в виде функционала от градиента // Известия уфимского научного центра РАН. – 2016. – № 2. – С. 11–14.

11. Филиппов А.И., Мухаметзянов Э.В., Садриев А.Ф., Леонтьев А.И., Садыкова Л.Ф. Математическая модель классического линейного трансциллятора // Вестник Башкирского университета. – 2013. – Т. 18. – № 2. – С. 359–362.

12. Филиппов А.И., Мухаметзянов Э.В., Леонтьев А.И., Садриев А.Ф. Новая модель теплопереноса – трансциллятор бегущей волны // Международный научно-исследовательский журнал. – 2012. – № 5–2 (5). – С. 28–30.

Сведения об авторах

Филиппов Александр Иванович, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой общей и теоретической физики СФ БашГУ. E-mail: filippovai@rambler.ru.

Мухаметзянов Эльвир Венерович, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры общенаучных дисциплин филиала УГНТУ в г. Салават. E-mail: mukhametzuanov.ev@gmail.com.

УДК 532.517.2

Филиппов А.И., Щеглова Е.П.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАДИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В СКВАЖИНЕ

На основе простейшей модели осуществлен анализ радиальных распределений температуры потока жидкости в скважине в режиме отбора.

Ключевые слова: Температурное поле, скважина, преобразование Лапласа – Карсона.

Filippov A.I., Shcheglova E.P.

MATHEMATICAL MODEL OF RADIAL DISTRIBUTIONS OF TEMPERATURE IN THE WELL

On the basis of the prime model the analysis of radial distributions of temperature of a fluid flow in the well in the selection mode is carried out.

Key words: Temperature field, well, Laplace – Carson transform.

Измерение поперечных (радиальных) профилей температуры представляет новое направление каротажа скважин. Однако до настоящего времени не созданы основы теории поперечных к направлению потока жидкости распределений температуры в скважине. Причина

© Филиппов А.И., Щеглова Е.П., 2017

этого заключается в существенной сложности задачи, по причине которой большинство известных моделей температурных полей предназначено только для усредненных по сечению скважины значений температуры.

В данной работе на основе развитого авторами асимптотического метода [1], [2] показано, что усредненные значения температуры соответствуют нулевому асимптотическому коэффициенту. Для построения поперечных профилей температуры необходимо выражение для первого и более высоких коэффициентов асимптотического разложения по формальному параметру, добавляемому в задачу в качестве множителя перед отношением радиальных коэффициентов теплопроводности в окружающих породах и скважине.

Полученные таким образом решения позволяют определить совокупность теплофизических и гидродинамических параметров, которые могут быть определены с помощью радиального термокаротажа, а также разработать способы интерпретации измеренных поперечных профилей температуры.

Постановка наиболее простой задачи переноса тепла потоком жидкости в стволе скважины, представленной в виде галереи, при отборе с учетом следующих соотношений для безразмерных величин:

$$x = x_{\mathrm{d}}/R\,,\ z = z_{\mathrm{d}}/R\,,\ \mathrm{Fo} = \tau a \Big/ R^2\,,$$
$$T = \left(\theta - \theta_{01} + \Gamma z_{\mathrm{d}}\right)/\theta_0\,,\ \mathrm{Pe} = \mathrm{v}R/a\,,\ \theta_0 = \Gamma R\,, \tag{1}$$

с формальным параметром ε имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mathrm{Pe}\,,\ x < 1\,,\ \mathrm{Fo} > 0\,,\ z > 0\,, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=1} = -\frac{\alpha R}{\lambda} T\big|_{x=1}\,, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0\,,\ T\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0\,, \tag{4}$$

$$T\big|_{z=0} = \frac{\theta_{10}(\tau) - \theta_{01} + \Gamma z_{\mathrm{d}}}{\theta_0} = T_0(\mathrm{Fo})\,, \tag{5}$$

где Pe – аналог параметра Пекле, Fo – число Фурье, $T_0(\mathrm{Fo})$ – температура поступающей в скважину жидкости (или температурный сигнал пласта).

Решения задачи (2)–(5) отыскивается в виде асимптотической формулы по параметру ε

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)} + \ldots, \tag{6}$$

где верхние индексы у безразмерной температуры T относятся к порядковому номеру приближения. Подставляя (6) в (2), получим

$$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x^2} - \mathrm{Pe} + \\ + \varepsilon\left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial x^2}\right) + \ldots = , \; x<1, \; \mathrm{Fo}>0, \; z>0. \tag{7}$$

Граничные и начальные условия примут вид

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x}\bigg|_{x=1} + \frac{\alpha R}{\lambda} T^{(0)} + \ldots = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial x}\bigg|_{x=0} + \varepsilon\frac{\partial T^{(1)}}{\partial x}\bigg|_{x=0} + \ldots = 0, \; T^{(0)}\big|_{\mathrm{Fo}=0} + \varepsilon T^{(1)}\big|_{\mathrm{Fo}=0} + \ldots = 0, \tag{9}$$

$$T^{(0)}\big|_{z=0} + \varepsilon T^{(1)}\big|_{z=0} + \ldots = T_0(\mathrm{Fo}). \tag{10}$$

Умножив (7) на ε и устремив его затем к нулю, получим $T^{(0)} = T^{(0)}(z, \mathrm{Fo})$. Затем, при ε в первой степени, имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x^2} = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - \mathrm{Pe}. \tag{11}$$

Воспользовавшись условием, следующим из (8) при ε в нулевой степени, получим

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial x}\bigg|_{x=1} = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - \mathrm{Pe} = -\frac{\alpha R}{\lambda} T^{(0)}. \tag{12}$$

Выражение для определения первого коэффициента разложения температуры $T^{(1)}$ найдем, проинтегрировав повторно по x уравнение (11)

$$T^{(1)} = \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - \mathrm{Pe}\right)\frac{x^2}{2} + D,$$

которое, с учетом (12), запишется как

$$T^{(1)} = -\frac{\alpha R}{\lambda} T^{(0)} \frac{x^2}{2} + D. \qquad (13)$$

Разность температур между стенкой скважины и любой точкой внутри скважины представится как

$$\tilde{T} = T^{(1)} - T^{(1)}\Big|_{x=1} = \frac{\alpha R}{\lambda} T^{(0)} \frac{1-x^2}{2}. \qquad (14)$$

налитические зависимости построены на основе решения задач для нулевого и первого приближений в пространстве преобразований Лапласа – Карсона с использованием [3] для обращения.

Ниже представлен анализ среднего по сечению температурного поля в скважине (нулевого приближения) и радиальных распределений.

На рис. 1 представлены графические зависимости относительной температуры потока нефти в скважине от безразмерного времени в зоне влияния температурных сигналов пласта для различных значений вертикальной координаты. Штриховые кривые соответствуют нулевому температурному сигналу пласта $T_0 = 0$, сплошные – $T_0 = 500$ (~1 ^oC).

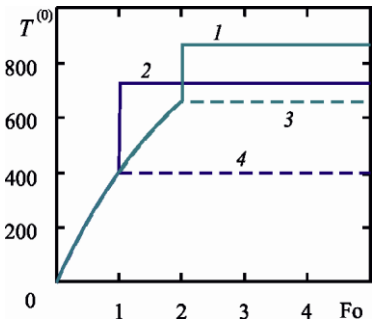


Рис. 1. Зависимость относительной температуры потока нефти в скважине от безразмерного времени в зоне влияния температурных сигналов пласта при различных значениях вертикальной координаты: 1, 3 – z = 1000; 2, 4 – z = 500. Штриховые кривые соответствуют нулевому температурному сигналу пласта, сплошные – абсолютной величине порядка 1 ^oC

На рис. 2 иллюстрируется зависимость перепада температуры между центром нефтяного потока и стенкой скважины от безразмерного времени при температурном сигнале пласта около 1 ^oC ($T_0 = 500$) для различных значений *z*.

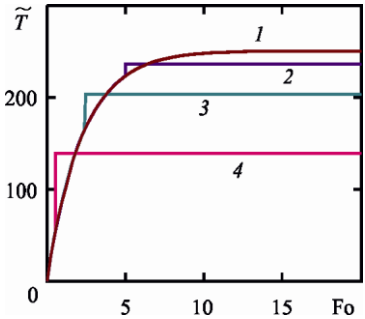


Рис. 2. Зависимость максимального радиального перепада температуры $\widetilde{T} = T^1 - T^1\big|_{x=1}$ *в скважине от времени для потока нефти при различных значениях вертикальной координаты: 1 – z = 10000; 2 – 2500; 3 – 1200; 4 – 250*

Рис. 3 представляет радиальные профили относительной температуры $\widetilde{T} = T^{(1)} - T^{(1)}\big|_{x=1}$, т. е. ее перепады между точками в скважине и ее стенкой, в потоке нефти при различных временах (кривые *2–6*) и стационарное распределение (кривая *1*) при *z* = 750. Графики рис. 3 иллюстрируют эволюцию температурных профилей от исходного нулевого до стационарного.

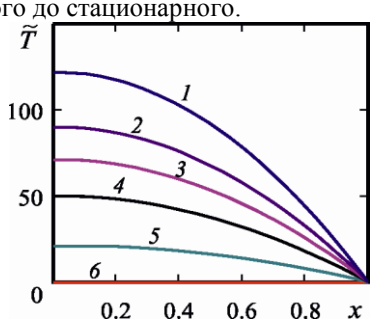


Рис. 3. Радиальные профили температуры (кривые 2–6) и стационарное распределение (кривая 1) для нефти при различных временах: 1 – Fo *→∞, 2 –* Fo *=1, 3 – 0.75, 4 –0.5, 5 – 0.2, 6 – 0*

На основе анализа кривых можно сделать вывод, что в центре скважины температура растет интенсивно до Fo = 1. Затем наблюдается стабилизация радиального профиля, а температурные кривые становятся близкими к стационарному. Полученные результаты хорошо согласуются с выводами, полученными в работах [4, 5] для асимптотики малых и больших времен.

Библиографический список

1. Филиппов А.И., Ахметова О.В. Температурное поле в пласте и скважине. – Уфа: АН РБ, Гилем, 2011. – 336 с.

2. Щеглова Е.П., Карасев Е.М., Филиппов А.И. Расчет полей температур в скважине на основе асимптотических формул // Известия Вузов. Нефть и газ. – 2010. – № 3. – С. 23–27.

3. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1966. – 406 с.

4. Щеглова Е.П., Филиппов А.И. Температурные поля в скважине в областях с малоизменяющимся вертикальным градиентом // Актуальные проблемы науки и техники: Сб. тр. I Междунар. конф. мол. ученых, 3 дек. 2009 г. УГНТУ. – Уфа: Изд-во УГНТУ, 2009. – С. 140–144.

5. Филиппов А.И., Зеленова М.А., Щеглова Е.П. Применение численной инверсии к задаче о температурном поле в скважине // Юность и Знания – Гарантия Успеха – 2015: сборник научных трудов 2-й Международной научно-практической конференции. – Курск, 2015. – С. 259–262.

Сведения об авторах

Филиппов Александр Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики СФ БашГУ. E-mail: filippovai@rambler.ru.

Щеглова Екатерина Павловна, ассистент кафедры физики УГНТУ. E-mail: ekaterina-scheglova@rambler.ru.

УДК 004.023

Хабиров А.А., Валиахметова Ю.И.

УПАКОВКА ДВУМЕРНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ В ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ КОНТЕЙНЕР

В данной работе рассматривается задача упаковки двумерных выпуклых многоугольных объектов в прямоугольный контейнер с минимизацией площади неиспользованного пространства. Приведена общая постановка задачи, предложен алгоритм.

Ключевые слова: двумерная упаковка, контейнер, минимизация, многоугольник.

Khabirov A.A., Valiakhmetova Y.I.

PACKING OF TWO-DIMENSIONAL CONVEX POLYGONS INTO THE RECTANGULAR CONTAINER

In this paper we consider the problem of packing of two-dimensional convex polygons into the rectangular container while minimizing unutilized area size. We show the general formulation of the problem and propose an algorithm.

Key words: two-dimensional packing, container, minimization, polygon.

Введение. Задачи упаковки возникают во множестве ситуаций, включающем загрузку поддонов, раскрой текстиля, заполнение контейнеров и задачи размещения. Такие задачи – это задачи оптимизации, смысл которых заключается в нахождении рационального расположения множества 2D– или 3D-объектов в некоторой рабочей области без пересечений. Обычно цель упаковки – максимизация использования ресурса и, следовательно, минимизация отходов.

На сложность таких задач влияет не только количество, но и форма объектов – прямоугольники значительно проще в рассмотрении, нежели многоугольные невыпуклые фигуры. [2] В настоящей статье рассматривается алгоритм упаковки выпуклых многоугольников в прямоугольный контейнер.

Постановка задачи. В общем случае имеется прямоугольный контейнер с заданными шириной и высотой, а также набор объектов, которые необходимо упаковать в контейнер с соблюдением определённых условий. [1] В статье рассмотрен вариант с выпуклыми многоугольными объектами.

© Хабиров А.А., Валиахметова Ю.И., 2017

Исходные данные: контейнер $R = \{W, H\}$, множество объектов $O = \{o_i\}, o_i = \{V_i, E_i, t_i, D_i, c_i\}, i = \overline{1,n}$, подлежащих упаковке (рис. 1), где:

– W – ширина контейнера,

– H – высота контейнера,

– $V_i = \{v_i^j\}, v_i^j = \{x_i^j, y_i^j\}, \ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$ – множество вершин объекта $o_i \in O$ с заданными координатами на осях OX и OY в системе координат контейнера,

– $E_i = \{e_i^j\}, e_i^j = \{v_k, v_l\}, \ k, l = \overline{1,m}$ – множество рёбер объекта $o_i \in O$, у каждого из которого заданы начальная и конечная точки v_k, v_l соответственно,

– $D_i = \{\chi_i^j, \gamma_i^j, \alpha_i^j, \beta_i^j\}, \ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$ – минимальный охватывающий прямоугольник объекта o_i, то есть прямоугольник минимального размера, в который можно вписать объект o_i, где χ_i^j, γ_i^j – координаты прямоугольника на осях OX и OY, а α_i^j, β_i^j – его ширина и высота соответственно,

– c_i – коэффициент вытянутости: $c_i = \frac{\sum_{v=1}^{m} |e_i^u| / |e_i^v|}{m-1}$, где e_i^u – ребро объекта o_i с наименьшей длиной $|e_i^u|$, $|e_i^j|$ – длина ребра e_i^j, $i = \overline{1,n}, j, v = \overline{1,m}, u \neq v$,

– t_i – угол поворота объекта o_i.

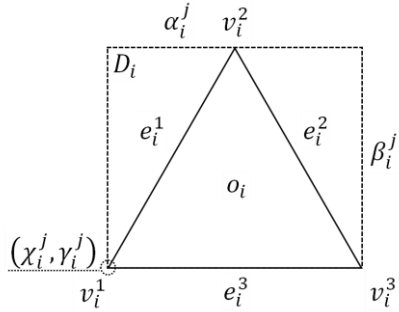


Рис. 1. Пример многоугольника

Необходимо упаковать объекты в контейнер, минимизируя площадь неиспользованного пространства. Целевая функция: $S_R - \sum_{i=1}^{n} S_i \to min$, где S_R – площадь контейнера, S_i – площадь объекта $o_i, i = \overline{1,n}$.

Упаковка происходит согласно следующему алгоритму:

1. Сортировка и подготовка (рис. 2):

1.1. Объекты упорядочиваются по убыванию коэффициента c_i.

1.2. Объекты упорядочиваются по убыванию площади S_i.

1.3. Каждый объект o_i поворачивается на угол t_i так, что e_i^j ребро с максимальной длиной $|e_i^j|$ располагается в нижней части объекта параллельно оси OX.

2. Первичная упаковка: каждый объект o_i из списка необработанных упаковывается в контейнер в виде охватывающего прямоугольника D_i (рис. 3).

3. Уплотнение. Объекты обрабатываются по порядку первичной упаковки, каждый объект o_i рассматривается без учёта охватывающего прямоугольника D_i (рис. 4):

3.1. Сдвиг объекта o_i влево до пересечения с границей контейнера или другим объектом.

3.2. Сдвиг объекта o_i вниз до пересечения с границей контейнера или другим объектом.

3.3. Возврат в п. 3.1, если $\Delta x_i^j \neq 0$ или $\Delta y_i^j \neq 0$, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$.

4. Возврат в п. 3, пока есть неупакованные объекты, иначе КОНЕЦ.

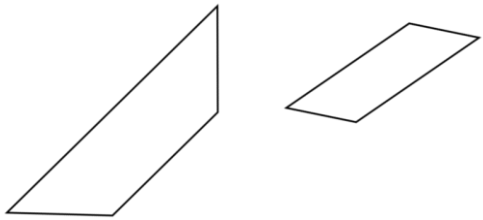


Рис. 2. Пример. Начальное положение объектов

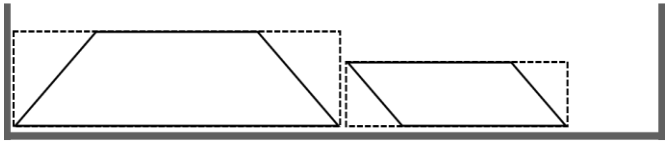


Рис. 3. Пример. Первичная упаковка объектов

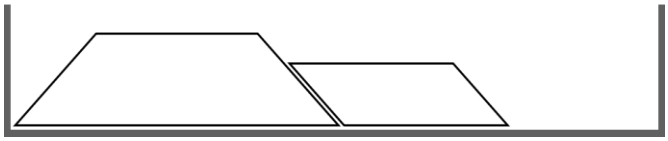


Рис. 4. Пример. Уплотнение объектов

Возможно внесение модификаций в вышеописанный алгоритм: иная логика сортировки объектов и их поворотов, первичная упаковка объектов по одному или партиями заданного размера. Небольшие изменения на каждом шаге могут значительно изменить итоговый результат.

Предложенный алгоритм с различными модификациями дал неплохие результаты на тестовых примерах. В данный момент разрабатывается ПО, реализующее алгоритм, планируется дальнейшее изучение его эффективности и возможностей для модификации.

Библиографический список

1. Хабиров А.А., Валиахметова Ю.И., Тухватуллин Э.Р. Решение задачи упаковки заготовок сложной формы // Математические методы и модели в исследовании государственных и корпоративных финансов и финансовых рынков: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции (10–11 декабря 2015 г., г. Уфа). В 2-х ч. Ч. II / Отв. ред. И.У. Зулькарнай. – Уфа: Аэтерна. – 2015. – С. 136–140.

2. Tukhvatullin E., Khabirov A., Valiakhmetova Y. Solving The Problem Of Rectangular Cutting The Material Into Complex Shaped Blanks With The Use Of Multimethod Algorithm With Liberal Heuristics // Proceeding of the 1th International Workshop on Technologies of Digital Signal Processing and Storing (DSPTech’2015) / Ufa, Russia. December 10–13, 2015. Volume 1. – p. 116–119.

Сведения об авторах

Хабиров Анвар Айратович, студент УГАТУ. E-mail: khabirov.anvar.it@gmail.com.

Валиахметова Юлия Ильясовна, кандидат технических наук, доцент кафедры УГАТУ. E-mail: julikas@inbox.ru.

УДК 517.9

Хайдаров.Д.Р., Латыпов Д.Г.

СОИЗМЕРИМОСТИ И ГИПОТЕЗА МОЛЧАНОВА. СОЛНЕЧНАЯ СИСТЕМА

А.М. Молчанов предложил гипотезу о существовании резонансной структуры Солнечной системы, откуда следовало, что в процессе ее развития планеты неизбежно выходят на такие орбиты, при которых отношение периодов их обращения вокруг Солнца становится близким к отношению небольших натуральных чисел. По мнению Молчанова, резонансность обеспечивается малыми диссипативными силами. В данной работе показано, что это явление можно объяснить, оставаясь в рамках консервативного подхода.

Ключевые слова: резонанс, соизмеримость.

Khaydarov.D.R., Latypov D.G.

MOLCHANOV'S COMPLEXITY AND HYPOTHESIS. THE SOLAR SYSTEM

A.M. Molchanov proposed a hypothesis about the existence of a resonant structure of the solar system, from which it followed that in the process of its development, the planets inevitably reach such orbits that the ratio of the periods of their revolution around the Sun becomes close to the ratio of small natural numbers. According to the opinion of Molchanov, resonance is provided by small dissipative forces. In this paper it is shown that this phenomenon can be explained by remaining within the framework of a conservative approach.

Key words: resonance, commensurability.

Для того чтобы разобраться в гипотезе Молчанова, нам для начало надо рассмотреть модельную задачу: Рассмотрим три тела с массами 1, m, M. Будем их далее называть астероид, планета и звезда соответственно, и будем считать, что $1 \ll m \ll M$, то есть астероид никак не влияет на движение планеты и звезды, а планета – на движение звезды. Известно, что динамика астероида в полярной системе координат, связанной со звездой (движение планеты пока не учитывается), удовлетворяет системе уравнений:

© Хайдаров.Д.Р., Латыпов Д.Г., 2017

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\dfrac{GM}{r^2} \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Отсюда мы получим уравнение для r:

$$\ddot{r} = \frac{C^2 - GMr}{r^3} + Fr\Big|_{\varphi = C\int_0^t \frac{d\nu}{r^2(\nu)}} \tag{2}$$

и

$$\ddot{r} = -\omega_a^2 (r - r_a) + Fr(r_a, b) + \frac{\partial Fr(r_a, t)}{\partial r}(r - r_a) \tag{3}$$

Из уравнения (3) получим:

$$\ddot{r} = -\omega_a^2 (1 + \varepsilon f_1(t))r + f_0(t) \tag{4}$$

Выписывая условия параметрического резонанса и разрешая их относительно ω_a, приходим к следующим соотношениям:

$$\omega_a \approx \frac{l}{l-2}\omega_m, l = 3,4,\ldots; \omega_a \approx \frac{k}{k+2}\omega_m, k = 1,2,\ldots \tag{5}$$

Попробуем теперь применить полученные результаты к тому случаю, когда вокруг центрального тела с массой M движутся два тела с малыми массами относительно M, но при этом сопоставимые в каком-то смысле по массе друг с другом. Если угодно, то к такой ситуации можно подойти постепенно, увеличивая массу астероида из модельной задачи предыдущего параграфа. Итак, рассмотрим планетную систему, состоящую из звезды и всего двух планет. В этом случае вместо идеализированного одностороннего влияния планеты на астероид возникает взаимовлияние, и в случае выполнения (5) (в этом случае можно считать, что ω_a – частота обращения менее массивной планеты) планеты обмениваются энергией и (или) кинетическим моментом, более интенсивно по сравнению с тем случаем, когда (5) не выполняется. Такие интенсивные обмены будут продолжаться до тех пор, пока планеты как-то не изменят параметры своих орбит таким образом, чтобы перестали выполняться условия резонанса. Понятно, что при этом параметры орбиты более массивной планеты претерпят меньшие изменения. Примечательно, что ничего не поменяется в приведенных рассуждениях, если формально считать «астероидом» более массивную планету.

Таблица 1.

Планеты Солнечной системы

Планета	Масса	Большая полуось	Период	Экстреситент	Наклонение x^o
Меркурий	0.06	0.39	0.241	0.206	7
Венера	0.82	0.72	0.615	0.017	3.39
Земля	1	1	1	0.017	-
Церера	0.00013	2.76	4.6	0.08	10.59
Юпитер	318	5.2	11.86	0.049	1.03
Сатурн	95	9.58	29.46	0.056	2.49
Уран	14.6	19.23	84.01	0.044	0.77
Марс	0.11	1.52	1.88	0.093	1.85
Нептун	17.2	30.10	164.79	0.011	1.77
Плутон	0.0017	39.48	248.09	0.249	17.14

Хороший приближенный пример двухпланетной системы предоставляет Солнечная система, если в качестве планет рассмотреть Юпитер и Сатурн. Сатурн менее массивен, чем Юпитер примерно в три раза, но при этом превосходит все остальные планеты, вместе взятые по массе также примерно в три раза. В таблице приведены основные данные планет Солнечной системы, а также Цереры (как самого массивного представителя пояса астероидов) и Плутона, хотя их и не относят к полноценным планетам и называют карликовыми планетами. Итак, если обратиться к примеру Юпитера и Сатурна, то можно заметить, что они находятся примерно в серединах промежутков резонансных зон друг друга (вопрос ширины зон пока не поднимается). А именно, Сатурн находится между первой и второй внешними резонансными зонами Юпитера (k = 1, 2) или, что равносильно, Юпитер находится между первой и второй внутренними резонансными зонами Сатурна (l = 3, 4 см. (5)). Более точно: Тс/3 = 9.82 < < Тю = 11.86 < 14.73 = Тс/2, 2Тю = 23.72 < Тс = 29.46 < 35.58 = 3Тю. Это наглядно можно увидеть, если на числовой оси времени отметить точками периоды обращения соответствующих планет, а отрезками – перпендикулярными оси резонансные зоны, созданные планетами. Если формально сделать это не только для Юпитера и Сатурна, а для всех планет из таблицы, то обнаружится очень примечательная, явно не случайная картина. В попытке объяснить, почему Юпитер и Сатурн расположены именно примерно посередине соответствующих резонансных зон, что равносильно вопросу, почему они тяготеют к соизмеримости 2:5, приходим к закономерному вопросу: насколько

широки резонансные зоны? Проведем оценку сверху (весьма приблизительную) ширины первой внешней резонансной зоны (k = 1, см. (5)). Знаем, что для уравнения Матье $r'' = -\omega_a^2(1+\varepsilon\cos(\omega t))$ (ради удобства обозначения переменных и параметров согласованы с нашими) в случае первой резонансной зоны, то есть при $\omega \approx 2\omega_a$ параметрический резонанс возникает при $2\omega_a\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right) < \omega < 2\omega_a\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)$. Если применить это неравенство в нашем случае, в уравнении (9), считая f_1 чисто колебательной и приближая ее первой гармоникой, отбрасывая f_0, используя равенство $\omega = \omega_m - \omega_a$ и разрешая относительно ω_a, то получим следующее неравенство $\left(\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{18+3\varepsilon}\right)\omega_m < \omega_a < \left(\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon}{18+3\varepsilon}\right)\omega_m$. В частности, применим полученную формулу к первой внешней резонансной зоне Юпитера, взяв ε = 0, 014 (это ранее подсчитанное значение выступало в качестве оценки сверху для ε первой внешней резонансной зоны Юпитера). Подсчет приводит к следующим результатам: резонансная зона заключена в промежутке от 35.49 до 35.66 земных лет. В случае последующих резонансных зон уравнения Матье ширина их убывает пропорционально ε^n, где n – номер резонансной зоны. При этом в нашей задаче одновременно увеличивается оценка глубины модуляции ε. Будем грубо считать, что эти два процесса взаимно нейтрализуют друг друга, и что для нескольких следующих резонансных зон Юпитера оценки их ширины такие же, хотя бы по порядку величин, то есть узки. Косвенным подтверждением правильности проведенных рассуждений служат щели Киркувуда. Их ширина того же порядка, то есть не превышает нескольких десятых долей земных лет. Поскольку оценка глубины модуляции пропорциональна $\frac{m}{M}$, то для Сатурна (и тем более для всех других планет) резонансные зоны с небольшими номерами (а только такими мы и интересуемся) получаются также узкими. Поэтому описанный ранее способ визуализации резонансных зон в виде отрезков, перпендикулярных оси времени, вполне законен.

Учет того факта, что резонансы могут происходить на высших гармониках, позволяет уточнить (5) и выписать целую иерархию резонансов:

$$\omega_a \approx \frac{n}{n-p}\omega_m, \omega_a \approx \frac{n-p}{p}\omega_m, p = 1,2,\ldots; n = p+1, p+2,\ldots \qquad (6)$$

Еще более точное соответствие соизмеримостям можно обнаружить в упоминавшейся четверке галилеевых спутников системы Юпитера. Их периоды обращения вокруг Юпитера в земных сутках составляют: 1.76914; 3.55118; 7.15455; 16.68902 не более процента. Упомянутый парадокс заключается в том, что такие диаметрально противоположные явления, как щели Кирквуда и зафиксированные в табл. 1 соизмеримости несомненно имеют одну природу. Возможное разрешение этого парадокса раскрывает рис. 1. Он был получен следующим способом.

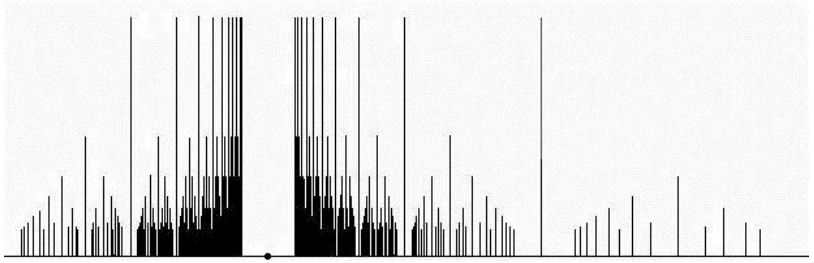


Рис. 1. Распределение резонансов

Горизонтальная ось – это ось времени. Выделенная точка на ней изображает некую условную планету. Точнее говоря, ее период обращения вокруг звезды (один условный год). Станем последовательно (сначала $p = 1$, а n пробегает натуральный ряд, начиная с двух, затем $p = 2$, n пробегает натуральный ряд, начиная с трех и так далее) изображать отрезками, перпендикулярными к оси резонансные зоны из (6), создаваемые данной планетой. При переходе к следующему p будем уменьшать длины отрезков (вообще говоря, чем больше p, тем на более высокой гармонике действует резонанс, тем большего времени он требует для своего проявления, и тем он менее важен). Самый длинный отрезок левее планеты соответствует 1/2, следующий такой же длины соответствует 2/3. Соответственно, самый длинный справа от планеты отвечает 2/1, затем 3/2 и так далее. Разумеется, не все резонансы фактически могут быть изображены, при каждом p диапазон изменения n приходится ограничивать сверху. На рис. 1 это проявляется в виде окрестности планеты, лишенной отрезков. Но это

не важно, так как при $n \to +\infty$, дробь $\frac{n}{n-p}$ и ей обратная стремятся к единице, тогда как в модельной задаче из второго параграфа требовалось, чтобы r_a и r_m не были слишком близкими. При нарушении этого требования астероид будет слишком близко подходить к планете, и соглашение о том, что динамика астероида в основном определяется звездой, будет нарушено. Отметим, что одновременно с изменением длин отрезков, можно было бы менять их цвет. Это бы дало возможность отслеживать наложения отрезков или, что эквивалентно кратности дробей из (6). Но это тоже не так важно. Важнее другое: (5) видно, что вокруг отрезков большей длины образуются свободные (при данном диапазоне изменения p) от отрезков меньшей длины промежутки. Напрашивающееся нестрогое объяснение этого эффекта в том, что дроби из (6), соответствующие малым p и n, имеют в некотором смысле большую кратность, чем дроби с большими p и n. За счет чего окрестность таких дробей (отрезков) обедняется следующими дробями (отрезками). В переводе на язык резонансов, это означает, что существуют, так сказать, локальные минимумы, каким-нибудь разумным образом определенной плотности распределения резонансов.

Библиографический список

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1979.

2. Рой А. Движение по орбитам. – М.: Мир, 1984.

3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматлит, 1958.

4. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. – М.: Физматлит, 1961.

5. Молчанов А.М. Гипотеза резонансной структуры Солнечной системы. – Пущино: Препринт, НЦБИ АН СССР, 1974.

Сведения об авторах

Латыпов Дамир Гакилович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа БашГУ. E-mail: DamGak@mail.ru.

Хайдаров Денис Раилевич, студент 4 курса БашГУ. E-mail: 1447120min@mail.ru.

УДК 534.113

Хакимов А.Г., Юлмухаметов А.А.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В ТРУБОПРОВОДЕ, КОЭФФИЦИЕНТА ПОСТЕЛИ И ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ ГРУНТА ОСНОВАНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Изгибные колебания трубопровода, провисающего над грунтовыми берегами, изучаются с учетом влияния внутреннего давления. Влияние грунта моделируется распределенной системой пружин. Определяется спектр частот в зависимости от входных параметров задачи. Решена обратная задача для определения давления в трубопроводе, коэффициентов постели и присоединенной массы грунта основания по собственным частотам изгибных колебаний.

Ключевые слова: трубопровод, грунт, спектр частот, обратная задача.

Khakimov A.G., Yulmukhametov A.A.

DETERMINATION OF PRESSURE IN A PIPELINE AND COEFFICIENTS OF SUBGRADE REACTION AND APPARENT MASS OF BOTTOM SOIL USING NATURAL FREQUENCIES OF FLEXURAL VIBRATIONS

The paper investigates flexural vibrations of a pipeline running over earthen riverbanks in view of the influence of the internal pressure. The influence of soil characteristics is modelled by the distributed system of springs. The frequency range is determined depending on input parameters of the problem. An inverse problem was solved to determine pressure in a pipeline and coefficients of subgrade reaction and apparent mass of bottom soil using natural frequencies of flexural vibrations.

Key words: pipeline, soil, range of frequencies, inverse problem.

Введение. Начиная с работ [3–5], исследованию колебаний и устойчивости трубопроводов посвящено множество трудов. Во всех из них принимается модель трубчатой балки без деформации ее поперечного сечения, при этом учитывается движение транспортируемой жидкости, которая считается несжимаемой. При изгибе оси трубопровода возникает центробежная сила жидкости, которая направлена в сторону выпуклости трубопровода. Среди одной из последних работ в этом направлении является [6].

© Хакимов А.Г., Юлмухаметов А.А., 2017

Возможно, первыми исследованиями колебаний первоначально изогнутого и прямого трубопровода являются работы [1, 2]. Распределенная по длине трубы поперечная сила направлена в сторону выпуклости осевой линии и равна произведению внутреннего давления p, площади поперечного сечения трубы πR^2 и кривизны осевой линии $\partial^2 w/\partial x^2$. Здесь R – внутренний радиус, x – осевая координата, $w(x,t)$ – прогиб осевой линии, t – время. С целью наиболее простой демонстрации влияния внутреннего давления рассматриваются случаи концевых опор трубы, не допускающих свободный поворот при изгибе при большой (w=0, $\partial w/\partial x$=0) относительной жесткости грунта.

Постановка задачи. Рассматриваются свободные изгибные колебания трубопровода, имеющего свободно провисающие участки длиной L ($0<x\le L$) и участки ($-\infty<x<0$, $L<x<\infty$) в грунте. Изгибные колебания, являющиеся основными, сопровождаются осесимметричными и продольными волнами. Участки $-\infty<x<0$ и $L<x<\infty$ имеют одинаковые свойства. Поперечная и продольная реакция в них равны $q_s w$ и $t_s w$. Здесь будем решать динамическую задачу, система уравнений для которой имеет вид:

$$\frac{\partial^4 W_1}{\partial \xi^4} + 2\mu^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} - \lambda^4 W_1 = 0 \quad (0 \le \xi \le 1),$$
$$\frac{\partial^4 W_2}{\partial \xi^4} + 2\mu^2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} - (\lambda^{*4} - \beta) W_2 = 0 \quad (\xi < 0, \xi > 1) \quad . \tag{1}$$

$$\xi = \frac{x}{L},\ W = \frac{w}{L},\ \mu^2 = \frac{\pi R^2 (1-2\nu) p L^2}{2D},\ \beta = \frac{q_s L^4}{D},\ \lambda^4 = \frac{ML^4\omega^2}{D} = \Omega^2,$$
$$\lambda^{*4} = \frac{(M + M_s) L^4 \omega^2}{D} - \beta = (1+n)\Omega^2 - \beta,\ m = \frac{ML^4}{D},\ n = \frac{M_s}{M},$$

Здесь D, E, ρ, J, h – изгибная жесткость, модуль упругости, плотность, осевой момент инерции и толщина стенки трубопровода; ρ_f, M – плотность продукта в трубопроводе, масса единицы длины трубопровода с продуктом; M_s, p, x_1, ν – присоединенная масса грунта, давление внутри трубопровода, x – координата, коэффициент Пуассона, ω – круговая частота изгибных колебаний трубопровода, β, n – коэффициенты относительной жесткости грунта и присоединенной массы грунта.

Граничные условия следующие:

$$W_1 = W_2,\ \frac{\partial W_1}{\partial \xi} = \frac{\partial W_2}{\partial \xi},\ \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2},\ \frac{\partial^3 W_1}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 W_2}{\partial \xi^3}\ \ (\xi = 0),$$
$$W_1 = W_3,\ \frac{\partial W_1}{\partial \xi} = \frac{\partial W_3}{\partial \xi},\ \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 W_3}{\partial \xi^2},\ \frac{\partial^3 W_1}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 W_3}{\partial \xi^3}\ \ (\xi = 1), \tag{2}$$

$$W_2 = 0, \frac{\partial W_2}{\partial \xi} = 0\ \ (\xi \to -\infty),\ W_3 = 0, \frac{\partial W_3}{\partial \xi} = 0\ \ (\xi \to \infty). \tag{3}$$

Спектр собственных частот изгибных колебаний трубопровода при малой относительной жесткости грунта. Решение системы уравнений (1) в общем случае представляется в виде

$$W_1(\xi) = C_1 \cos\lambda_1\xi + C_2 \sin\lambda_1\xi + C_3 \operatorname{ch}\lambda_2\xi + C_4 \operatorname{sh}\lambda_2\xi,\ (0 \le \xi \le 1)$$
$$W_2(\xi) = C_5 \cos\lambda_3\xi + C_6 \sin\lambda_3\xi + C_7 \operatorname{ch}\lambda_4\xi + C_8 \operatorname{sh}\lambda_4\xi,\ (\xi < 0) \tag{4}$$
$$W_3(\xi) = C_9 \cos\lambda_3\xi + C_{10} \sin\lambda_3\xi + C_{11} \operatorname{ch}\lambda_4\xi + C_{12} \operatorname{sh}\lambda_4\xi,\ (\xi > 1)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\sqrt{\mu^4 + \lambda^4} + \mu^2},\ \lambda_2 = \sqrt{\sqrt{\mu^4 + \lambda^4} - \mu^2},$$
$$\lambda_3 = \sqrt{\sqrt{\mu^4 + \lambda^{*4}} + \mu^2},\ \lambda_4 = \sqrt{\sqrt{\mu^4 + \lambda^{*4}} - \mu^2}.$$

Условия на бесконечности (3) дают C_7=C_8=C_{11}=C_{12}=0. Удовлетворяя уравнения (4) условиям сопряжения (2), получим однородную систему уравнений. Приравнивая нулю определитель этой системы, запишем частотное уравнение в виде

$$\lambda_3^2\left(\lambda_2^2 + \lambda_3^2\right)^2\left(\lambda_1^2 - \lambda_3^2\right)^2\left[\left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right)\sin\lambda_1 \operatorname{sh}\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2\left(1 - \cos\lambda_1 \operatorname{ch}\lambda_2\right)\right] = 0.$$

В частности, при μ=0 следует λ_1=λ_2=λ, λ_3=λ_4=λ^*, откуда частотное уравнение можно представить в виде

$$\lambda^2\lambda^{*2}\left(\lambda^4 - \lambda^{*4}\right)^2\left(1 - \cos\lambda \operatorname{ch}\lambda\right) = 0. \tag{5}$$

При β→∞ частотное уравнение записывается как

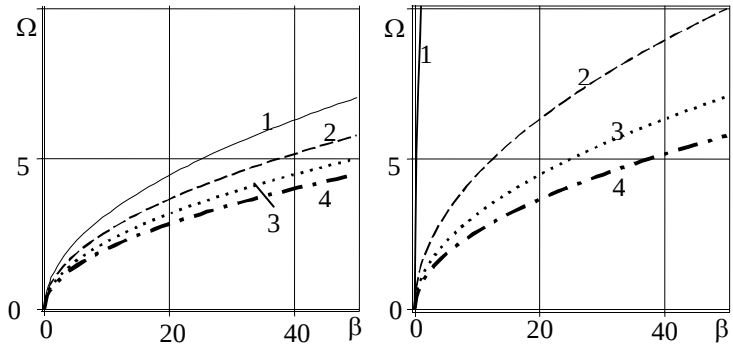
$$1 - \cos\lambda \operatorname{ch}\lambda = 0.$$

Если λ^*=0, то $\Omega = \sqrt{\beta/(1+n)}$, что соответствует колебаниям трубопровода, как абсолютно твердого тела на упругом основании.

Если $\lambda^4 = \lambda^{*4}$, то $\Omega = \sqrt{\beta/n}$, что соответствует изгибным колебаниям трубопровода с одинаковыми волновыми числами на обоих участках.

На рис. 1 представлены зависимости безразмерной круговой частоты Ω колебаний трубопровода как твердого тела (фрагмент а) и

изгибных колебаний с одинаковыми волновыми числами на обоих участках (фрагмент б) от параметра β для безразмерного давления в трубопроводе μ^2=0 и разных *n* (кривая 1 – *n*=0.01; 2 – 0.50; 3 – 1.00; 4 – 1.50).



а *б*

Рис. 1. Зависимости безразмерной круговой частоты Ω колебаний трубопровода как твердого тела (фрагмент а) и изгибных колебаний с одинаковыми волновыми числами на обоих участках (фрагмент б) от параметра β для безразмерного давления в трубопроводе μ^2=0 и разных n (кривая 1 – n=0.01; 2 – 0.50; 3 – 1.00; 4 – 1.50)

Частоты, построенные по уравнению (5), приводятся на рис. 2 для безразмерного давления в трубопроводе μ^2=0 и *n*=1 (кривая 1 – волновое число и, соответственно, круговая частота колебаний трубопровода равны нулю, кривая 2 – для колебаний трубопровода как твердого тела, кривая 3 – для изгибных колебаний трубопровода с одинаковыми волновыми числами на обеих участках, кривая 4 – низшая частота изгибных колебаний центральной части трубопровода). Видно, что частоты изгибных колебаний Ω центральной части трубопровода не зависят от параметра β. Из частотного уравнения следует, что собственные частоты колебаний центральной части трубопровода не зависят от коэффициентов от коэффициентов относительной жесткости грунта и присоединенной массы грунта.

Обратная задача. Для определения давления в трубопроводе, коэффициента постели и присоединенной массы грунта основания по собственным частотам изгибных колебаний запишем систему уравнений

$$\lambda_3^2 = 0,\ \ \lambda_1^2 - \lambda_3^2 = 0,\ \ \left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right)\sin\lambda_1 \mathrm{sh}\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2\left(1 - \cos\lambda_1 \mathrm{ch}\lambda_2\right) = 0. \quad (6)$$

или

$$\left(1+n\right)\Omega^2 - \beta = 0,\ \ n\Omega^2 - \beta = 0,\ \ \ \Omega_1 = \sqrt{\beta/\left(1+n\right)},\ \ \ \Omega_2 = \sqrt{\beta/n},$$

откуда определяются коэффициенты постели β и присоединенной массы грунта основания n

$$\beta = \frac{\Omega_1^2\Omega_2^2}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2},\ \ \ n = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}.$$

А из уравнения

$$\left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right)\sin\lambda_1 \mathrm{sh}\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2\left(1 - \cos\lambda_1 \mathrm{ch}\lambda_2\right) = 0$$

находится давление в трубопроводе.

Авторы благодарят член-корреспондента РАН М.А. Ильгамова за постановку задачи и обсуждение результатов.

Библиографический список

1. Ильгамов М.А. К расчету упругих круговых колец на колебания // Изв. Казанского филиала АН СССР. Сер. общая. – 1961. – № 1. – С. 27–35.

2. Ильгамов М.А. Колебание упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. – М.: Наука, 1969. – 182 с.

3. Феодосьев В.И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. – 1951. – № 10.– С. 169–170.

4. Ashley H., Haviland G. Bending vibration of pipe line containing flowing fluid. J Appl Mech. – 1950. – № 3. – P. 229–232.

5. Housner G.W. Lateral vibrations of a pipeline containing flowing fluid. J. Appl. Mech. – 1952. – № 2. – P. 58–63.

6. Li-Qun Chen, Yan-Lei Zhang, Guo-Ce Zhang, Hu Ding. Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2014. – № 58. – P. 11–21.

Сведения об авторах

Хакимов Аким Гайфуллинович, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. E-mail: hakimov@anrb.ru.

Юлмухаметов Артур Ахмарович, аспирант лаборатории механики твердого тела Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. E-mail: artyr_yulmuhametov@mail.ru.

УДК 519.245:678.7

Хисматуллин Р.А.

РАЗРАБОТКА ВИРТУАЛЬНОГО ТУРА

В работе проведено ознакомление с понятием виртуального тура и проведено объяснение их использования в образовательной среде.

Ключевые слова: трехмерное моделирование.

Khismatullin R.A.

DEVELOPMENT OF THE VIRTUAL TOUR

The paper presents an introduction to the concept of the virtual tour and held an explanation of their use in an educational environment.

Key words: three-dimensional modeling.

В век интернета невозможно себе представить поиск информации без использования всемирной паутины. Любая необходимая информация может быть найдена в течение пары минут. Однако не вся найденная информация может в полной мере показать содержимое того или иного ресурса.

Иногда не достаточно просто прочитать статью для того чтобы иметь полное представление о заданном вопросе. Видеозаписи или фотографии неплохо справляются с данной проблемой, однако и этого может быть недостаточно, так как, например, просматривая видеозапись, пользователь ограничивается его сюжетом, а просматривая фотографию, ограничивается лишь одним плоским изображением. Каким образом можно добавить интерактив, при помощи которого пользователи в полной мере смогут получить информацию об объекте исследовании? Данную проблему уже давно смогли решить различные сайты при помощи виртуальных туров.

Виртуальный тур это возможность реалистичного отображения реального многоэлементного трехмерного пространства на экране монитора, в котором пользователь можно посмотреть объект с любого удобного ракурса в интерактивном режиме. Особенностью виртуальных туров являются панорамные изображения, которые при помощи специального программного обеспечения объединяются в единый виртуальный тур. Все сферические панорамы объединяются друг с другом. А также они взаимодействуют при помощи интерактивных ссылок-переходов, так называемыми хот-спототами. Пользователь имеет возможность приближаться к объектам, рассмотреть их с любого угла об-

© Хисматуллин Р.А., 2017

зора, а так же перейти в другие комнаты виртуального объекта и продолжить экскурсию. Данный способ предоставления информации предоставляется на официальных сайтах различных музеев, выставок, антикварных магазинах, а также на официальных сайтах компаний предоставляющих курортные услуги: отели, гостиницы, поездки на различных кораблях, теплоходах и т.п. Пользователь лишь заходит на официальный сайт и может виртуально «прогуляться» по интересующей его достопримечательности. Пример на рис. 1.

Рис. 1. «Обрыв»

На примере изображен часть виртуальной экскурсии пляж и его фрагмента обрыва. На данном этапе разработки есть возможность осуществить просмотр под углом обзора равным 360 градусов.

Однако данный способ предоставления информации не используется в образовательных учреждениях. При поступлении учеников и при подачи документов в школы или в вузы, одним из важных факторов является внешний вид образовательного учреждения: вид здания изнутри и снаружи. Внедрение виртуальных туров может очень полезным для абитуриентов, которые хотят обучаться в определенном образовательном учреждении, но у которых нет возможности его увидеть «вживую».

Именно по этой причине внедрение виртуальных туров в официальные сайты образовательных учреждений является одним из необходимых элементов для привлечения новых учеников.

Сведения об авторах

Хисматуллин Рустэм Альбертович, Магистр 2 года БашГУ. E-mail: rustam_khismatullin@rambler.ru.

УДК 536.532

Хусаинова Г.Я., Камагаева А.В.

ПЛОСКОРАДИАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ

В работе выполнено исследование полей давления аномальных жидкостей при плоскорадиальной фильтрации.

Ключевые слова: аномальные жидкости, поля давления, фильтрация жидкости.

Khusainova G.Ja., Kamagaeva A.V.

PLOSKORELEFNAJA FILTRATION OF AN INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC LIQUID

The work associated with the study of the pressure fields of anomalous fluids in a plane radial filtration.

Keywords: abnormal fluid pressure field, fluid filtration.

При рассмотрении фильтрации аномальных жидкостей существенную роль играет пористая среда. Изменение реологических параметров жидкости (например, вязкости) приводит к изменению взаимодействия материала скелета с фильтрующейся жидкостью. По причине вышеперечисленного эффекта появляются фильтрационные аномалии.

Мирзаджанзаде А.Х. предложил феноменологическую теорию фильтрации вязкопластичной жидкости и ввел следующий закон фильтрации:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} grad\, P\left(1 - \frac{G_0}{|grad\, P|}\right),\ |grad\, P| > G_0$$

$$\vec{v} = 0,\ |grad\, P| \le G_0 . \qquad (1)$$

Предельное значение G_0 определяет ту величину градиента давления, по достижении которой начинается движение жидкости. При меньших значениях градиента движение отсутствует. Значение G_0 определяется соотношением

$$G_0 = \frac{\alpha \tau_0}{\sqrt{k}}, \qquad (2)$$

© Хусаинова Г.Я., Камагаева А.В., 2017

где α – некоторая постоянная, k – проницаемость, τ_0 – предельное напряжение сдвига.

Уравнение для определения давления при упругом режиме пласта можно получить, дополнив закон фильтрации (1) уравнениями состояния флюида и пористой среды, а так же уравнением неразрывности [1, 4, 5].

Дифференциальное уравнение, определяющее давление имеет вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi div\left[\nabla P\left(1-\frac{G_0}{|\nabla P|}\right)\right], |\nabla P > G_0|, \qquad (3)$$

где χ – коэффициент пьезопроводности.

При решении подобных задач на основе выше представленной модели фильтрации, то есть с предельным градиентом давления, в пласте образуется такая область фильтрации жидкости, на границе которой модуль градиента давления должен равняться предельному градиенту G_0 [2].

Движение аномальных жидкостей в пластах по закону (1) приводит к существенному изменению распределения полей давления [1, 3].

Рассмотрим плоскорадиальный приток несжимаемой аномальной жидкости к скважине с дебитом Q. Найдем решение задачи для установившегося течения.

Формулу (1) перепишем в виде:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\mu}{k}v + G_0, npu \quad v > 0 \qquad (4)$$

$$\frac{dP}{dr} \le G_0, npu \quad v = 0.$$

С другой стороны, учитывая связь между скоростью фильтрации жидкости в точке с координатой r и дебитом скважины Q в круговом пласте, формулу (1) для плоскорадиальной задачи можно переписать в виде [1]:

$$v = \frac{Q}{2\pi hr} = \frac{k}{\mu}\left(\frac{dP}{dr} - G_0\right), \; если \; \frac{dP}{dr} > G_0$$

$$v = 0, если \quad \frac{dP}{dr} \le G_0. \qquad (5)$$

Для установившегося течения жидкости будем считать известными давления на забое скважины и в контуре питания

$$P(r_c) = P_c, \qquad P(R_k) = P_k. \qquad (6)$$

Из уравнения (4) находим:

$$dP = \frac{\mu}{k}\frac{Q}{2\pi h}\frac{dr}{r} + G_0 dr.$$

Отсюда после интегрирования получим решение, описывающее распределение давления в пласте

$$P(r) = P_c + G_0(r - r_c) + \frac{\mu Q}{2\pi kh}\ln\frac{r}{r_c}, \qquad r_c \le r \le R_k. \quad (7)$$

Аналогично можно найти распределение давления в пласте для линейной задачи:

$$P(x) = P_c + \left(G_0 + \frac{\mu}{k}\frac{Q}{S}\right)(x - x_c). \quad (8)$$

Для радиально-сферической задачи распределение давления в пласте имеет вид:

$$P(r) = P_c + G_0(r - r_c) + \frac{1}{4\pi}\frac{Q\mu}{k}\left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r}\right). \quad (9)$$

Таким образом, в работе приведены аналитические решения, описывающие распределение давления в пласте вокруг скважины с постоянным дебитом, для установившегося течения аномальной жидкости.

Библиографический список

1. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидродинамика. – М.: Недра, 1993. – 416 с.
2. Хусаинова Г.Я. Исследование температурных полей при фильтрации аномальных жидкостей. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Уфа, 1998. – 14 с.
3. Хусаинова Г.Я. Исследование температурных полей аномальных жидкостей // NovaInfo.Ru (Электронный журнал.) – 2015 г. – № 35; URL: http://novainfo.ru/archive/35/issledovanie-temperaturnykh-poley-anomalnykh-zhidkostey.
4. Пыхачев Г.Б. Подземная гидравлика. – М.: Недра, 1972.– 360 с.
5. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – М.: Изд.-во Нефтяной и горно-топливной лит-ры, 1963. – 396 с.

Сведения об авторах

Хусаинова Гузалия Ядкаровна, доцент СФ БашГУ. E-mail: gkama@mail.ru.

Камагаева Анастасия Валерьевна, магистр СФ БашГУ. E-mail: nastasiya1206@mail.ru.

УДК 519.6

Хусаинов И.Г.

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПУЗЫРЬКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Построена математическая модель, описывающая поведение одиночного газового пузырька, находящегося в центре сферической колбы под действием акустического поля. Система уравнений была протестирована с помощью вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: волна, колба, пузырь, акустическое поле.

Khusainov I.G.

OSCILLATORY MOVEMENT BUBBLE UNDER ACTION OF AN ACOUSTIC FIELD

The mathematical model describing behaviour single gas bubble, being in the center of a spherical flask under action of an acoustic field is constructed. The system of the equations has been tested by means of computing experiment.

Keywords: a wave, a flask, a bubble, an acoustic field.

Жидкости, содержащие газовые пузырьки, часто встречаются в нефтегазодобывающей промышленности, энергетики и химической технологии и т.д. В связи с этим, исследования поведения газового пузырька, находящегося в жидкости, в акустическом поле имеют важные практические значения. В работах [1–8] выполнены исследования системы скважина – пористая среда при воздействии акустического поля.

Рассмотрим сферическую колбу, наполненную жидкостью, внутри которой в центре находится одиночный газовый пузырек. Вокруг сферической колбы сформирована акустическая сферическая стоячая волна. Наличие сферической волны означает, что давление жидкости внутри колбы задается функцией

$$P(r,t) = P_0 + \frac{\sin(kr)}{kr} P_a(t) \qquad (1)$$

где акустическое давление в центре сферической колбы с амплитудой P_a описывается с помощью выражения

$$P_a(t) = -P_a \sin(\omega \cdot t).$$

Здесь r – радиальная координата; ω – частота; k – волновое число акустического поля.

© Хусаинов И.Г., 2017

Под действием акустического поля пузырь будем совершать колебательные движения. В то же время пузырек пульсирует с высокой частотой, т.е. происходит рост и схлопывание (коллапс) пузырька, во время которого возникает свечение. Если пузырек имеет размеры около 30-40 микрон, то колебательные движение происходит с амплитудой порядка нескольких миллиметров. Смещение пузырька можно наблюдать невооруженным глазом, тогда как размеры пузырька очень малы.

На пузырек действуют следующие силы.

Сила Архимеда и сила тяжести. Так как пузырек заполнен газом, то его плотность меньше плотности воды. Поэтому действует выталкивающая сила – сила Архимеда. Эта сила направлена противоположно силе тяжести

$$\vec{F}_a = -V_b \cdot (\rho_l - \rho_g)\vec{g} \,. \qquad (2)$$

Здесь V_b – объем пузырька, который вычисляется по формуле $V_b = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$; ρ_l – плотность жидкости; R – радиус пузырька; ρ_g – плотность газа; $V_b \cdot \rho_l$ – масса вытесненной пузырьком жидкости.

Сила Бьеркнеса.

$$\vec{F}_b = -V_b \cdot \vec{\nabla} P \qquad (3)$$

Сила Бьеркнеса появляется тогда, когда пузырек испытывает на себе действие некой силы, зависящей от изменения давления, т.е. пузырек «шевелится», если давление жидкости вокруг него распределено неравномерно.

Природа сил $\vec{F}_a$ и $\vec{F}_b$ одинакова. Выражения (2) и (3) похожи. Выражение (3) показывает, что пузырек находится в поле силы, действующей вертикально, т.е. в поле силы тяжести. Формула (2) показывает, что на пузырек действует поле сил давления окружающей жидкости.

Сила присоединенной массы. Предполагается, что пузырек меняет объем, т.к. под действием акустического поля пузырек сжимается и расширяется. Таким образом, пузырек заставляет двигаться жидкость, окружающую его, и масса этой жидкости зависит от величины толкающей поверхности пузырька, т.е. от его радиуса. При этом предполагается, что пузырек сохраняет сферическую форму. Исходя из описанного, будем рассматривать радиус пузырька как функцию

времени $R = R(t)$. Сила присоединенной массы описывается с помощью уравнения

$$\vec{F}_{\text{p}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(V_b \cdot \rho_l[\vec{v}_l - \vec{v}_b]) \tag{4}$$

Сила сопротивления жидкости, которая имеет вид:

$$\vec{F}_c = 4\pi\mu_l R(\vec{v}_l - \vec{v}_b)\,. \tag{5}$$

Сила инерции

$$\vec{F}_i = m\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}_b(t)\,. \tag{6}$$

Здесь масса пузырька m определяется по формуле

$$m = \frac{4}{3}\pi \cdot R_0^3\rho_{g0}\,. \tag{7}$$

По известному закону Ньютона сумма всех сил дает уравнение движения пузырька

$$\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_p + \vec{F}_c + \vec{F}_i\,. \tag{8}$$

Последнее уравнение будем рассматривать в полярной системе координат (r,θ). Разложение уравнения (8) по компонентам $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\theta$ приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 3\dot{v}_l + (v_l - \dot{r})\left(\frac{9v_l}{R^2} + \frac{3\dot{R}}{R}\right) + 2g\cos\theta\,. \tag{9}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 3v_l\dot{\theta} - r\dot{\theta}\left(\frac{9v_l}{R^2} + \frac{3\dot{R}}{R}\right) - 2g\sin\theta\,. \tag{10}$$

где θ – угол отклонения пузырька от вертикальной оси.

К полученным уравнениям добавим уравнение Рэлея-Ламба, описывающее радиальное движение газового пузырька в несжимаемой жидкости в поле сил давления:

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right)R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2\left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right)\frac{P_l}{\rho} + \frac{R}{\rho c}\dot{P}_l \tag{11}$$

Здесь давление P_l определяется из выражения

$$P_l = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - P_0 - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R}\dot{R} + P_a \frac{\sin kx}{kx} \sin \omega t .$$

Таким образом, поведение газового пузырька, находящегося в центре сферической колбы, под действием акустической сферической стоячей волны описывается с помощью математической модели, состоящей из трех обыкновенных дифференциальных уравнений (9)–(11).

Вывод. Построена математическая модель, описывающая процесс колебательного движения пузырька под действием акустической сферической стоячей волны. распространение волн в пористой среде. Полученная система уравнений была использована при проведении вычислительного эксперимента с целью исследования зависимости колебательного движения пузырька от его начального радиуса, частоты и амплитуды колебания акустической волны.

Библиографический список

1. Хусаинов И.Г. Акустическое зондирование перфорированных скважин короткими волнами // ПМТФ. – 2013. – Т 54. – № 1. – С. 86–93.

2. Хусаинов И.Г. Воздействие акустическим полем на насыщенную жидкостью пористую среду // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 6; URL: http://www.science-education.ru/120-15160 (дата обращения: 31.10.2014).

3. Хусаинов И.Г. Динамика релаксации давления в полости с плоско-параллельными стенками после ее опрессовки // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 5 – С. 794; URL: http://www.science-education.ru/119-15159 (дата обращения: 31.10.2014).

4. Хусаинов И.Г. Отражение акустических волн в цилиндрическом канале от перфорированного участка // ПММ. – 2013. – Т. 77. – №3. – С.

5. Хусаинов И.Г. Оценка качества перфорации скважины акустическим методом // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 5 – С. 787; URL: http://www.science-education.ru/119-14505 (дата обращения: 09.09.2014).

6. Хусаинов И.Г. Эволюция импульса давления при прохождении через пористую преграду, расположенную в воде // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 11–12. – С. 2645–2649; URL: www.rae.ru/fs/?section=content&op =show_article&article_id=10005306 (дата обращения: 24.12.2014).

7. Хусаинов И.Г., Хусаинова Г.Я. Исследование параметров пласта методом опрессовки // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 3 – С. 705; URL: http://www.science-education.ru/117-13813 (дата обращения: 04.07.2014).

8. Хусаинов И.Г., Хусаинова Г.Я. Компьютерное моделирование процесса релаксации давления в сферической полости после опрессовки // Успехи современного естествознания. – № 10. – 2016. – С. 167–170.

Сведения об авторах

Хусаинов Исмагильян Гарифьянович, доцент СФ БашГУ. E-mail: ivt30@mail.ru.

УДК 519.6

Хусаинов И.Г.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАЩИТЫ ОБЪЕКТОВ ОТ ШУМА

Построена математическая модель процесса распространения волн в звукоизолирующих пористых материалах. Полученная система уравнений используется для вывода дисперсионного соотношения и коэффициента отражения волны от пористых материалов.

Ключевые слова: волна, объект, защита, пористая среда.

Khusainov I.G.

MATHEMATICAL MODELLING OF PROTECTION OF OBJECTS FROM NOISE

The mathematical model of process of distribution of waves in soundproofing porous materials is constructed. The received system of the equations is used for a conclusion of a dispersive ratio and factor of reflection of a wave from porous materials.

Key words: a wave, object, protection, the porous environment.

Пористые материалы, получаемые в современной промышленности, широко применяются в звукопоглощающих и теплоизоляционных облицовках производственных помещений и технических устройств, требующих снижения уровня шумов (промышленные цехи, машинописные бюро, установки вентиляции и кондиционирования воздуха и т.д.), а также для создания оптимальных условий слы-

© Хусаинов И.Г., 2017

шимости и улучшения акустических свойств помещений общественных зданий (зрительные залы, аудитории, радиостудии).

Звукопоглощающая способность пористых материалов обусловлена их пористой структурой и наличием большого числа открытых сообщающихся между собой пор, максимальный диаметр которых обычно не превышает 2 мм. Большая удельная поверхность материалов, создаваемая стенками открытых пор, способствует активному преобразованию энергии звуковых колебаний в тепловую энергию вследствие потерь на трение.

Упругие свойства скелета материала и наличие воздуха, заключённого в его порах, обусловливают гашение энергии удара и вибрации, что способствует снижению структурного и ударного шума. Для характеристики пористых звукопоглощающих материалов вводится понятие коэффициента звукопоглощения, который равен отношению количества поглощённой энергии к общему количеству падающей на материал энергии звуковых волн [3, 10].

Для определения шумоизолирующей способности пористых материалов важным является описание распространения звука в них.

Рассмотрим распространение волны в насыщенной газом пористой среде. При описании распространения одномерных волн примем следующие допущения: все поровые включения имеют сферическую форму и одинаковый радиус, значения длин рассматриваемых в среде волн намного больше размеров пор. Характерными размерами среды будем считать средний радиус пор – a_0 и среднюю полутолщину стенок пор – b_0.

Запишем макроскопические линеаризованные уравнения неразрывности для скелета пористой среды и газа в порах в двухскоростном приближении [1, 2]:

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \rho_{j0} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

где ρ_j, υ_j – плотность и скорость j-й фазы соответственно, нижним индексом $j = s, g$ отмечены параметры скелета и газа в порах, дополнительным нижним индексом 0 – параметры, соответствующие невозмущенному начальному состоянию системы.

Уравнение импульсов для системы в целом запишем в виде:

$$\rho_{g0}\frac{\partial \upsilon_g}{\partial t}+\rho_{s0}\frac{\partial \upsilon_s}{\partial t}=\frac{\partial \sigma_s^*}{\partial x}-\frac{\partial p_g}{\partial x}, \qquad (2)$$

где p_g – давление в газовой фазе, σ_s^* – приведенное напряжение в скелете, определяемое через осредненное истинное напряжение σ_s^0: $\sigma_s^*=\alpha_{s0}\left(\sigma_s^0+p_g\right)$, α_{s0} – начальная объемная доля твердой фазы. Верхним индексом 0 отмечены параметры, соответствующие истинным значениям.

Для описания поведения скелета используем модель Максвелла:

$$\alpha_{s0}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=\frac{1}{E_s}\frac{\partial \sigma_s^*}{\partial t}+\frac{\sigma_s^*}{\mu_s}, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial \upsilon_s}{\partial x}, \qquad (3)$$

где E_s, μ_s – эффективные модуль упругости и коэффициент сдвига пористого скелета соответственно.

Уравнение импульсов для газовой фазы имеет следующий вид [4–9]:

$$\rho_{g0}\frac{\partial \upsilon_g}{\partial t}=-\alpha_{g0}\frac{\partial p_g}{\partial x}-F. \qquad (4)$$

Здесь α_{g0} – начальная объемная доля газовой фазы, F – межфазная сила взаимодействия.

Процессы диссипации тепла в изучаемой системе определяются распределением микротемпературы вблизи межфазных границ. Для описания микронеоднородностей температуры используется сферическая ячеечная схема. При этом пористая среда, насыщенная газом, рассматривается как система сферических газовых пузырьков, окруженных слоем материала скелета. Таким образом, в каждой макроскопической точке, определяемой координатой χ, вводится типичная ячейка, состоящая из газового пузырька и приходящейся на него доли скелета. Внутри ячейки имеется распределение температуры $T_j'\left(t,x,r\right)$ и плотности газа $\rho_g'^0\left(t,x,r\right)$. Давление внутри ячейки полагается однородным.

Связь между микроплотностью $\rho_g'^0(t,x,r)$ и истинной плотностью $\rho_g^0(t,x)$, являющейся средней для газовой фазы, определяется с помощью выражения:

$$\rho_g^0 = \frac{3}{4\pi a_0^3}\int_0^{a_0} \rho_g'^0 4\pi r^2 dr\,. \qquad (6)$$

Для истинных плотностей ρ_j^0 и объемной доли фаз α_j можно записать следующие кинематические соотношения: $\rho_j = \alpha_j \rho_j^0$, $\alpha_g + \alpha_s = 1$.

Для описания распределения температуры в ячейке пористой среды запишем систему уравнений теплопроводности:

$$\rho_{g0}^0 c_g \frac{\partial T_g'}{\partial t} = \lambda_g r^{-2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T_g'}{\partial r}\right) + \frac{\partial p_g}{\partial t}, \quad (0 < r < a_0)\,, \qquad (7)$$

$$\rho_{s0}^0 c_s \frac{\partial T_s'}{\partial t} = \lambda_s \frac{\partial^2 T_s'}{\partial r^2}, \ (a_0 < r < a_0 + b_0)\,, \qquad (8)$$

где λ_j, c_j $(j = g,s)$ – теплопроводность и удельная теплоемкость соответственно.

Учитывая непрерывность температуры и теплового потока на поверхности раздела фаз $r = a_0$, граничные условия на ней для уравнений (8), (9) запишем в виде

$$T_g{}' = T_s{}', \ \lambda_s \frac{\partial T_s'}{\partial r} = \lambda_g \frac{\partial T_g'}{\partial r}, \ (r = a_0)\,. \qquad (9)$$

В центре пор выполняется условие симметричности температурного поля, а на границе между ячейками отсутствует теплообмен (условие адиабатичности ячеек):

$$\frac{\partial T_g'}{\partial r} = 0, \ r = 0, \ \frac{\partial T_s'}{\partial r} = 0, \ r = a_0 + b_0\,. \qquad (10)$$

При наличии движения температура в среде, вообще говоря, не остается постоянной, а меняется как с течением времени, так и от точки к точке объема, занятого средой. Однако передача тепла внутри среды путем теплопроводности является медленным процессом, и поэтому

быстрый процесс распространения малых возмущений (в данном случае акустической волны) можно считать адиабатическим.

Для давления газовой фазы можем использовать следующую формулу

$$p_g = \rho_g'^0 R T_g' . \qquad (11)$$

Вывод. Построена математическая модель, описывающая распространение волн в пористой среде. Предлагаемая модель используется для получения дисперсионного уравнения и коэффициентов отражения и прохождения волн от пористой перегородки, используемой для защиты различных объектов от звукового шума.

Библиографический список

1. Хафизов Р.М., Хусаинов И.Г., Шагапов В.Ш. Динамика восстановления давления в «вакуумированной» скважине // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73, № 4. – С. 615–621.

2. Хусаинов И.Г. Акустическое зондирование перфорированных скважин короткими волнами // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54, № 1. – С. 86–93.

3. Хусаинов И.Г. Воздействие акустическим полем на насыщенную жидкостью пористую среду // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 6; URL: http://www.science-education.ru/120-15160 (дата обращения: 31.10.2014).

4. Хусаинов И.Г. Динамика релаксации давления в полости с плоско-параллельными стенками после ее опрессовки // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 5; URL: http://www.science-education.ru/119-15159 (дата обращения: 31.10.2014).

5. Хусаинов И.Г. Отражение акустических волн в цилиндрическом канале от перфорированного участка // Прикладная математика и механика. – 2013. – Т. 77, № 3. – С. 441–451.

6. Хусаинов И.Г. Оценка качества перфорации скважины акустическим методом // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 5; URL: http://www.science-education.ru/119-14505 (дата обращения: 09.09.2014).

7. Хусаинов И.Г. Тепловые процессы при акустическом воздействии на насыщенную жидкостью пористую среду // Вестник Башкирского университета. – 2013. – Т. 18, № 2. – С. 350–353.

8. Хусаинов И.Г., Хусаинова Г.Я. Исследование параметров пласта методом опрессовки // Современные проблемы науки и образова-

ния. – 2014. – № 3; URL: http://www.science-education.ru/117-13813 (дата обращения: 04.07.2014).

9. Хусаинов И.Г., Хусаинова Г.Я. Компьютерное моделирование процесса релаксации давления в сферической полости после опрессовки // Успехи современного естествознания. – № 10. – 2016. – С. 167–170.

10. Хусаинов И.Г. Эволюция импульса давления при прохождении через пористую преграду, расположенную в воде // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 11–12. – С. 2645–2649.

Сведения об авторах

Хусаинов Исмагильян Гарифьянович, доцент СФ БашГУ. E-mail: ivt30@mail.ru.

УДК 519.6

Хуснутдинова Э.Н., Михайлова Т.А.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ РАСПИСАНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

В работе описан алгоритм автоматического составления расписания выполнения последовательности задач, основанный на методе ветвей и границ. Алгоритм реализован в виде программного продукта, работа которого апробирована примере распределения занятий группы в семестре.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, целочисленное программирование, метод ветвей и границ, теория расписаний.

Khusnutdinova E.N., Mikhailova T.A.

SOLVING THE PROBLEM OF FORMING THE SCHEDULE BASED ON THE METHOD OF BRANCHES AND BOUNDARIES

An algorithm for automatically compiling a task sequence schedule is described in the paper. The algorithm is based on the method of branches and boundaries. The algorithm is implemented in the form of a software, the work of which is approved by the example of distribution of group sessions in the semester.

Keywords: discrete optimization, integer programming, branches and boundaries method, scheduling theory.

Существует широкий класс прикладных задач, формализация которых приводит их к классу задач теории расписаний. Подобные задачи возникают в самых различных областях науки. В связи с этим, применение эффективных методов решения таких задач и их реализа-

© Хуснутдинова Э.Н., Михайлова Т.А., 2017

ция в виде прикладных программных комплексов представляется актуальной научной и практической проблемой.

Существуют различные подходы к решению задач глобальной оптимизации. Из соответствующих методов наиболее эффективным является метод ветвей и границ. Суть метода заключается в фактическом полном переборе подмножеств допустимых решений и отсеве подмножеств, не содержащих оптимальных решений, с одновременной проверкой на оптимальность.

Рассмотрим в качестве примера задачу поиска оптимального распределения предметных часов определенной группы в течение одного семестра. При этом необходимо распределить, в том числе, часы лекционных и практических занятий.

В качестве критерия оптимальности, будет выступать функция, вычисляющая квадрат отклонения суммарного количества занятий в неделю с индексом j от среднего количества занятий в неделю за семестр:

$$f = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - ii)^2 ,$$

где ii – среднее количество занятий в неделю за весь семестр, x_{ij} – общее количество занятий по предмету i в неделю j.

В качестве дополнительных условий, примем следующие: сумма вычисленного количества занятий по предмету должна совпадать с введенным; в первой и во второй неделях проводятся только лекционные занятия; по четным (нечетным) неделям занятия должны совпадать; лекционные занятия должны закончиться раньше практических.

Представим алгоритм решения поставленной задачи в виде последовательности шагов для последующей реализации в виде программы:

1. Задать переменные: n – количество предметов в семестре, m – количество недель в семестре, *flag*=false – переменная, обозначающая выполнение критерия оптимальности.
2. Ввести названия предметов в массив *predmet*, количества лекционных и практических занятий в семестре по данному предмету в массивы *lchas* и *pchas*. Вычислить общее количество занятий по предмету i: $xi_i = lchas_i + pchas_i$.
3. Вычислить:
   – среднее значение количества занятий в неделю в течение семестра, необходимое для поиска оптимального, равномерного распределения занятий: $ii = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} xi_i}{m}$;

– среднее значение количества занятий в неделю по *i*-предмету:

$mo_i = round(\frac{xi_i}{m})$ – среднее значение.

4. Приступить к процедуре формирования начального плана с последующим поиском. Для этого, проверить условие окончания: *flag=true*. Если условие выполняется, процедура окончена, необходимо перейти к следующему шагу. Иначе:
   I. Каждому элементу строки *i* матрицы *X* присвоить значение mo_i. Таким образом заполняется начальный опорный план.
   II. Вычислить сумму элементов в строке и в столбце (массивы *sumI* и *sumJ*) во всей матрице *X*.
   III. Положить *jj=1, s=m.*
      a. Проверить условие окончания *i>n*:
         - пока выполняется условие $(sumI_i < xi_i) u (jj < m)$: положить $x_{i,jj} = x_{i,jj} + 1$, $sumI_i = sumI_i + 1$, *jj=jj+2*. То есть при выполнении условия к текущему элементу матрицы прибавляется 1, соответствующая сумма увеличивается на 1, при этом осуществляется переход на столбец под номером *jj+2*.
         - пока выполняется условие $(sumI_i > xi_i) u (s > 1)$ положить $x_{i,jj} = x_{i,jj} - 1$, $sumI_i = sumI_i - 1$, *s=s-2*. То есть при выполнении условия у текущего элемента матрицы отнимается 1, соответствующая сумма уменьшается на 1, при этом осуществляется переход на столбец под номером *s-2*.

      Если выполняется условие $sumI_i = xi_i$, положить *i=i+2*.

      b. Положить *jj=2, i=2, s=m-1* и повторить предыдущий этап a.
   IV. Пересчитать *sumJ*.
   V. Критерием выхода из процедуры будет сумма квадратов отклонения среднего количества занятий в неделю от *sumJ*. Если полученная сумма не будет превышать квадрат общего среднего количества занятий в неделю, положить *flag=true*, иначе необходимо вернуться к этапу 4-I.
5. Положить *j=0*. Проверить условие окончания: *i>n*. Если условие выполняется, процедура формирования начального плана окончена, необходимо перейти к следующему шагу. Иначе:
   I. Положить *j=j+1*.

а. Значения элементов матрицы *X* в первых двух столбцах перенести в матрицу лекционных занятий *lek*. Вычислить сумму количества лекционных занятий по каждому предмету и записать ее в массив *sumI*. Если *n>2* или $(sumI_i > lchas_i)$, необходимо проверить:

- если $(x_{ij} = 1) u (sumI_i < lchas_i) u (j \le m-1)$, положить $lek_{ij} = x_{ij}$, $sumI_i = sumI_i + x_{ij}$, таким образом проверяется условие: если в неделю по предмету определено только одно занятие, при этом проверяемая неделя не последняя и вычисленное количество занятий по предмету меньше заданного, то этим занятием является лекционное занятие;
- если $(x_{ij} > 1) u (sumI_i + x_{ij} > lchas_i) u (sumI_i < lchas_i) u (j \le m-1)$, положить $lek_{ij} = lchas_i - sumI_i$, $sumI_i = sumI_i + x_{ij}$, $prac_{ij} = x_{ij} - lek_{ij}$, таким образом проверяется условие: если в неделю по предмету определено больше одного занятия, проверяемая неделя не последняя, вычисленное количество занятий по предмету меньше заданного, а также в сумме с текущим количеством занятий будет меньше заданного, то лекционное занятие будет разницей между суммой занятий и заданным количеством занятий, остальные занятия будут практическими;
- если $(x_{ij} > 1) u (sumI_i < lchas_i) u (j \le m-1)$, положить $lek_{ij} = x_{ij} - 1$, $prac_{ij} = 1$; $sumI_i = sumI_i + x_{ij}$; таким образом проверяется условие: если в неделю по предмету определено больше одного занятия, при этом проверяемая неделя не последняя и вычисленное количество занятий по предмету меньше заданного, то одно занятие будет практическим, остальные лекционными.

Положить *i=i+1*.

6. Матрица практических занятий *prac* будет вычисляться как разность между матрицами *X* и *lek*.

Приведенный алгоритм был реализован в виде программного средства на языке Pascal. Протестируем работу программы на примере произвольной группы, для которой данные по предметам и количеству занятий за семестр представлены в табл. 1.

Таблица 1.

Исходные данные

Математика		Информатика		Физика		Химия		История		Физкультура	
Лек.	Пр.	Лек.	Пр.	Лек.	Пр.	Лек.	Пр.	Лек.	Пр.	Лек.	Пр.
25	40	24	28	16	22	14	30	14	14	2	36

Результаты работы программы на принятых данных отображены на рис. 1–2. При этом распределение, отображенное на рис. 2, по количеству пар соответствует распределению рис. 1. Таким образом, можно отметить, что составленное распределение занятий в течение семестра оптимально и удовлетворяет поставленным условиям.

```
4 4 4 4 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3  л=25 п=40
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 2 3 2 3  л=24 п=28
3 2 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2  л=16 п=22
2 3 2 3 2 3 2 3 2 3 2 3 2 3 2 3 2 2  л=14 п=30
2 2 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1  л=14 п=14
2 3 2 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2  л=2 п=36
-
ср.знач=15
целев.ф=19
```

Рис.1. Распределение занятий в течение семестра без учета типа занятия

```
Математика:
Лекции:       4 4 3 3 3 2 3 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | 25
Практические:0 0 1 1 1 1 1 1 3 3 4 3 4 3 4 3 4 3 | 40
Информатика:
Лекции:       3 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0 | 24
Практические:0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 3 3 3 2 3 2 3 | 28
Физика:
Лекции:       3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 | 16
Практические:0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 | 22
Химия:
Лекции:       2 3 1 2 1 2 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | 14
Практические:0 0 1 1 1 1 1 1 2 3 2 3 2 3 2 3 2 2 | 30
История:
Лекции:       2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 | 14
Практические:0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 2 1 2 1 2 1 | 14
Физкультура:
Лекции:       2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | 2
Практические:0 3 2 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 | 36
```

Рис.2. Распределение лекционных и практических занятий в течение семестра

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-47-020068 и проекта № 13.5143.2017/БЧ, выполняемого вузом в рамках государственного задания Минобрнауки РФ.

The study was funded by RFBR according to the research project № 17-47-020068 and project № 13.5143.2017/ BCH, carried out by the University in the framework of the State Task of the Ministry of Education of the Russian Federation.

Библиографический список

1. Островский Г.М., Волин Ю.М. Технические системы в условиях неопределенности: учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 319 с.

2. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2015. – 512 с.

Сведения об авторах

Хуснутдинова Эльвира Нафисовна, магистрант факультета математики и информационных технологий СФ БашГУ. E-mail: elka-l6@rambler.ru.

Михайлова Татьяна Анатольевна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель СФ БашГУ. E-mail: T.A.Mihailova@yandex.ru.

УДК 004.414.23

Чернов И.Г., Мустафина С.А.

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

В работе показана применимость численных методов интервального анализа для исследования химических реакций.

Ключевые слова: интервальный анализ, интервальные функции, вычислительный эксперимент, погрешность.

Chernov I.G., Mustafina S.A.

COMPUTER IMPLEMENTATION OF INTERVALS ALGORITHMS FOR SOLVING APPLIED PROBLEMS

The applicability of numerical methods of inter-intial analysis for investigating chemical reactions is shown in the paper.

Keywords: interval analysis, interval functions, computational experiment, error.

В работе рассматривается применимость численных методов интервального анализа для решения широкого класса прикладных задач. Имеются три основных сферы успешного применения интервальных методов: учёт ошибок округления при вычислениях на ЭВМ; решение практических задач, имеющих интервальную или ограниченную неопределённость в данных; новые подходы к решению традиционных

© Чернов И.Г., Мустафина С.А., 2017

математических задач (задачи глобальной оптимизации [1], доказательное решение систем нелинейных уравнений [2]–[3] и т.п.)

Пусть вещественный интервал A определяется множеством вещественных чисел по следующему правилу:

$$A = \left[\underline{a}, \overline{a}\right] = \left\{x \in R \mid \underline{a} \le x \le \overline{a}\right\},$$

где $\underline{a}, \overline{a} \in R$ и $\underline{a} \le \overline{a}$. Обозначение $I(R)$ определяет множество таких интервалов. Интервальный вектор V в $I\left(R^n\right)$ состоит из n координат, каждая из которых есть интервал. $V_i \in I(R)$, $i \in 1,\ldots,n$. Интервальная матрица M в $I\left(R^{m\times n}\right)$ состоит из m строк и n столбцов. Каждый элемент матрицы есть интервал $M_{ij} \in I(R)$, $i \in 1,\ldots,m$, $j \in 1,\ldots,n$. Для программного представления интервала используется объектно-ориентированный подход. Интервал реализован в виде класса cInterval с уникальными полями и методами; интервальный вектор – в виде класса cIntervalVector; интервальная матрица в работе реализована в виде класса cIntervalMatrix.

Арифметические операции над интервальными числами задаются правилами:

$$A + B = \left[\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}\right],$$
$$A - B = \left[\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}\right],$$
$$A * B = \left[\min\left(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right), \max\left(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right)\right],$$
$$A / B = A * \left[\frac{1}{\overline{b}}, \frac{1}{\underline{b}}\right],$$

для реализации которых используется перегрузка основных унарных и бинарных операторов для элементов класса.

Отображение $F : I\left(R^n\right) \to I\left(R^m\right)$ называется интервальной функцией. Для интервального представления вещественной функции сначала записывается функция, затем производится замена вещественных операций интервальными, а переменные – интервалами. В представленной работе все основные элементарные функции заменены их интервальными аналогами.

Реализована автоматическая дифференциация сложных выражений согласно известным алгоритмам и правилам вычисления. Автоматическая дифференциация позволяет получать значение производной сложной функции по ее аналитическому виду без применения специальных методов вычисления. Таким образом, применение авто-

матической дифференциации позволяет существенно увеличить точность численных методов, использующих вычисление производных.

Среди прямых методов решения системы линейных алгебраических уравнений наибольшее внимание уделено интервальному обобщению метода Гаусса[3] и методу прогонки для трехдиагональных матриц.

Для решения систем нелинейных уравнений используется метод Ньютона с аналитическим вычислением производной функции и метод интервальной бисекции[4], позволяющий находить все корни на заданном интервале.

Работа выполнена в рамках гранта СФ БашГУ №В17-74.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-47-020068 и проекта № 13.5143.2017/БЧ, выполняемого вузом в рамках государственного задания Минобрнауки РФ.

The study was funded by RFBR according to the research project № 17-47-020068 and project No. 13.5143.2017/ BCH, carried out by the University in the framework of the State Task of the Ministry of Education of the Russian Federation.

Библиографический список

1. Ole Caprani, Kaj Madsen, Hans Bruun Nielsen. Introduction to Interval Analysis // IMM DTU, 2002 – 82 p.

2. Вайтиев В.А., Степашина Е.В., Мустафина С.А. Идентификация математических моделей редуцированных схем реакций // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2013. – Т. 323. – № 3. – С. 10–14.

3. Hammer R., Hoocks M., Kulisch U., Ratz D. Numerical Toolbox for Verified Computing. Basic Numerical Problems. – Germany. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993 – 337 p.

4. Ramon E. Moore. Methods and applications of interval analysis. – Philadelphia. SIAM, 1979 – 190 p.

5. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение. 1981 – 111 с.

6. Ikramov R.D., Mustafina S.A. Numerical Study Of The Belousov-Jabotinsky's Reaction Models On The Basis Of The Two-Phase Rozenbrock's Method With Complex Coefficients // International Journal of Applied Engineering Research. – 2014. – Т. 9. – № 22. – С. 12797–12802.

Сведения об авторах

Чернов Игорь Григорьевич, магистрант СФ БашГУ. E-mail: chernowgoscha@yandex.ru.

Мустафина Светлана Анатольевна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор СФ БашГУ. E-mail: Mustafina_SA@mail.ru.

УДК 910.2

Чжан Цзяньжун

ИСТОРИЧЕСКАЯ МИССИЯ: ОТ КВЖД ДО ЭПШП

Китайско-Восточная железная дорога (КВЖД) стала знаменательной вехой в новой истории китайско-российских отношений. Она открыла дорогу из России в пространство Китая, оказала существенное влияние на политику и экономику его северо-восточных областей, воплотив в себе картину исторических перемен на протяжении более ста лет. Сегодня бывшая КВЖД ушла со сцены и стала знаменитым материальным культурным наследием города Харбина. Заложенный фундамент вдоль КВЖД в процессе своей эволюции уже преобразуется в современный мост, соединяющий Китай с Евразией, который является составляющим в рамках Экономического пояса Шелкового пути (ЭПШП) и занимает центральное место в развитии Северо-Восточного района Китая. Место и роль КВЖД в истории оказалось весомым не только в прошлом веке, но и сегодня, что навечно вошло в летопись китайско-российских отношений.

Ключевые слова: КВЖД, ЭПШП, китайско-российские отношения.

Zhang Jianrong

HISTORICAL MISSION: FROM THE CHINESE-EASTERN RAILWAY TO THE ECONOMIC ZONE OF SILK ROAD

The Chinese-Eastern Railway (CER) is an important milestone in the recent history of Chinese-Russian relations. It has opened a road from Russia to China, made a significant impact on the politics and economy of the North-Eastern districts, personified the picture of historical changes over a hundred years. Today, the ex-CER has left the scene of the century and come to light as the well-known material and cultural heritage of the city of Harbin. The foundation laid along the CER in the process of its evolution, has been already transformed into a modern bridge connecting China with Eurasia, which is a constituent within the economic zone of the silk road (SREZ) and occupies the Central place in the plan of construction and development of the North Eastern region of China. The place and role of CER in history was significant not only in the last century, but also today, which has forever entered the annals of Russian – Chinese relations.

Keywords: Chinese Eastern Railway, Silk Road Economic zone, Russian – Chinese relations.

© Чжан Цзяньжун, 2017

115 лет тому назад в Харбине была построена первая в Китае трансграничная железнодорожная магистраль – Китайско-Восточная железная дорога (КВЖД). Общей протяженностью 2489 км, она стала знаменательной вехой в новой истории китайско-российских отношений. Имея особую историческую миссию, она открыла проезд из России в Китай, оказала существенное влияние на политику и экономику его северо-восточных областей и воплотила в себе картину исторических перемен на протяжении более ста лет.

Строительство КВЖД было одним из крупнейших, производимых Россией за границей, и в ходе истории эта дорога стала знаменитым материальным культурным памятником, которым Харбин может гордиться и в наше время. Она была свидетельницей развития города, превратившегося из нескольких сел и деревушек в один из торгово-экономических и культурных центров на Дальнем Востоке за разные периоды (от поздней Цинской династии до Китайской республики, от Маньчжурского государства до Нового Китая). История этой дороги воплотила в себе все превратности и сложности в развитии Северо-Восточного района Китая в течение столетия.

КВЖД – это входные ворота в Северо-Восточный район Китая и транспортный узел на пути в Евразию. В те времена по этой дороге возили не только пассажиров и грузы, она давала возможность иностранным «боевым колесницам» и «железным сапогам» вторгаться в Китай.

Харбин называли «Восточной Москвой» или «Восточным Парижем», так как он был приютом для эмигрантов из разных стран мира. Здесь в разные периоды находилось более 160 тыс. эмигрантов из 33 стран; 30 государств открыли здесь свои консульства и банки.

В период Октябрьской революции многие представители русской диаспоры в Китае называли Харбин своей второй родиной, считали его общественно-культурным центром. Деятельность русских диаспор в Тяньцзине, Шанхае, Ухане и других городах открывала Китаю другую Россию, рисовала ее социально-политическую картину, что дало возможность китайцам всесторонне познакомиться с особенностями далекой страны, ее культурой и языком.

Образование СССР открыло путь по КВЖД из Китая в столицу советского государства к учебе и опыту. Магистраль способствовала созданию и развитию братской дружбы двух стран. Она вписала важную страницу в историю отношений между двумя народами. Вместе с тем эта дорога была свидетельницей холодной войны и сложного периода в истории китайско-советских отношений.

В 80–90-х годах XX века в работе КВЖД наступило динамичное время. Будучи важным звеном Евразийского трансконтинентального моста, она сыграла ключевую роль в реализации реформ в Китае, внесла вклад в развитие экономической торговли с Россией.

Сегодня в XXI веке КВЖД серьезно модернизирована и перевооружена. По этой линии проходят современные высокоскоростные поезда. Прощаясь под стук колес с прошлым, дорога ушла со сцены и нашла свою новую нишу, заслужив установку памятника.

По официальному сообщению китайских СМИ, в конце 2014 года Харбинское бюро планирования городов и поселков опубликовало план парка КВЖД. Согласно ему в течение нескольких лет КВЖД преобразуется в грандиозное зрелищное мероприятие. Она будет представлять пешеходный коридор с реконструкцией исторических зданий и городских пейзажей, с местами отдыха и экскурсиями для населения. По схеме этого плана парк КВЖД делится на две зоны – северную и южную. Южная посвящена теме «Железная дорога и город». Здесь сохраняется исторический вклад КВЖД. Северная зона представляет культуру КВЖД. Вдоль дороги будут отреставрированы старинные здания и объекты, такие как железнодорожный мост Харбин – Маньчжурия, блокгаузы, музей железной дороги в виде старого вокзала с перронами, рельсами, паровозами, также планируется воссоздание стен, знаков, скульптур. Всё это демонстрационное пространство покажет роль КВЖД в истории строительства и развития города Харбина. Парк станет новым привлекательным местом в городе, где сохраняется историческая память.

Узнавая о прошлом КВЖД, о произошедших событиях за ее более чем вековую историю, мы думаем, каким культурным накоплением отличается эта стройка, сколько здесь интересных и легендарных сюжетов! Задачи работников гуманитарных наук (историков, литературоведов, драматургов, кинематографистов и др.) России и Китая исследовать, искать, вскрывать и думать – воссоздавать историю. КВЖД в процессе своей эволюции преобразуется в современный мост, соединяющий Китай с Евразией, а именно в Хэйлунцзянский пояс Шелкового пути, который является составляющей частью Экономического пояса Шелкового пути (ЭПШП) и занимает центральное место в плане строительства и развития Северо-Восточного района Китая.

Конечно, ЭПШП представляет собой не только торговый путь в его традиционном понятии, который связывал старый Китай с Европой. Это не просто железная дорога, соединившая Китай с Евразией в

прошлом веке, а «самый протяженный в мире, самый перспективный и широкий экономический коридор», который на Востоке, с одной стороны, связывается с экономическим кольцом АТР, а с другой – на Западе – с развитым кругом Европы.

Ставя перед собой цель собрать всех участников вдоль пояса в сообщество по интересам, Китай считает ЭПШП важной исторической миссией. Это было выражено председателем КНР Си Цзиньпином в выступлении в Назарбаев Университете в сентябре 2013 года: «С целью укрепления экономических связей, углубления сотрудничества и расширения пространства развития стран Евразии, мы можем применять новую модель сотрудничества и общими усилиями сформировать экономическую полосу Шелкового пути, что будет очень выгодно народам всех стран Великого Шелкового пути».

Проект Хэйлунцзянского пояса Шелкового пути ставит Харбин в центр плана, который включает в себя четыре железные магистрали, в том числе участок от Суйфэнхэ до Маньчжурии, от Харбина до Хэйхэ, от Харбина до Тунцзяна и приграничные железные дороги, а также Транссибирскую и Байкало-Амурскую магистрали. Учитываются инфраструктуры автодорожного, речного, авиационного, трубопроводного транспорта, коммуникации электрической сети и кабельных линий. На таких опорных точках, как вокзалы, речные порты, аэропорты и пограничные пункты пропуска формируется крупный евразийский трансконтинентальный грузоперевозочный коридор, покрывающий территории внутри и снаружи. Основываясь на существующих главных технопарках вдоль пояса, он притягивает факторы производства к территории вдоль коридора.

Согласно программе, составленной Хэйлунцзянским комитетом развития и реформы, главная задача проекта строительства Хэйлунцзянского пояса Шелкового пути в том, чтобы сформировать трансграничную железную транспортную систему по маршруту Харбин – Маньчжурия – Россия – Европа, усилить инфраструктурные взаимосвязи, ускорить создание торговой логистики, трансграничной электронной коммерции, финансовых услуг, приграничных объектов обслуживания, увеличить сотрудничество в области энергетических ресурсов, защиты окружающей среды, совершенствовать строительство трансграничных технопарков, производственных цепей, всемерно развивать научно-техническое и гуманитарное общение.

По схеме движения железного транспорта в плане Хэйлунцзянского пояса Шелкового пути проект включает следующие междуна-

родные транспортные маршруты: Евразийский трансконтинентальный коридор прямого сухопутно-морского сообщения от портов Гуанчжоу, Нинбо, Шанхая (Китай) и Фузана (Южная Корея) и других морским путем до порта Владивосток и других портов, по железной дороге до Суйфэнхэ, затем до Харбина, Маньчжурии в Забайкальск, соединяющийся Транссибирской железнодорожной магистралью с портами Прибалтики, Гамбурга и Роттердама.

Кроме того, откроется четыре трансграничные железные дороги:

1. Магистраль через Суйфэнхэ и Маньчжурию: с востока от порта Владивосток через Суйфэнхэ, Харбин и Маньчжурию до границы с проездом до Забайкальска, где соединяется с Транссибирской железнодорожной магистралью до портов Прибалтики, Гамбурга и Роттердама.

2. Магистраль от портов Северо-Восточного Китая через Тунцзянский железнодорожный мост: с юга от Даляня и других портов по магистрали между Харбином и Далянем до пункта Тунцзяна, через Тунцзянский железнодорожный мост до Биробиджана, соединяется с Транссибирской железнодорожной и Байкало-Амурской магистралями.

3. Магистраль Харбин – Хэйхэ: с юга от Харбина до Бэйаня, далее до Хэйхэ и пограничного пункта Хэйхэ и Благовещенска, соединяется с Транссибирской и Байкало-Амурской магистралями.

4. Приграничная: с юга от пограничного пункта до Северного Мохэ, по приграничной железной дороге провинции Хэйлунцзяна до пунктов на границе Суйфэнхэ, Хулина, соединяется с Транссибирской и Байкало-Амурской магистралями.

Строительство КВЖД стало значительным событием в истории Китая в начале XX века. Ее место и роль оказались весомыми не только в прошлом веке – она навсегда осталась в летописи российско-китайских отношений. На современном этапе китайско-российского всестороннего стратегического партнерства КВЖД с ее историей играет роль продолжателя, став опытной площадкой сотрудничества.

План Хэйлунцзянского пояса Шелкового пути обратит внимание на сотрудничество по связи со стратегией развития Дальнего Востока России, с созданием территорий опережающего развития, с перестройкой Транссибирской железнодорожной магистрали, с программой развития свободного порта Владивосток; совместно проведет строительство международных транспортных коридоров «Приморье-1» и «Приморье-2» в Приморском крае России. Всё это будет способствовать развитию трансграничных инфраструктурных взаимосвязей между Северо-Восточным районом Китая и Дальним Востоком России, в том числе развитию экономики и торговли с Японией и Южной Кореей, расширением торговой связи между Европой и Китаем с Россией.

История вознаграждает нас в переломные моменты. 115 лет назад благодаря созданию КВЖД в интересах бурного развития торгово-экономических и гуманитарных отношений между Китаем и Россией возникли всевозможные контакты Харбина с внешним миром. Сегодня строительство ЭПШП произведет в Евразии большие перемены. Сотрудничество ЭПШП и ЕАЭС расширит перспективы китайско-российских отношений, осуществляя взаимную выгоду и совместные выигрыши, общее процветание и гармоничное развитие в будущем.

Сведения об авторах

Чжан Цзяньжун, кандидат филологических наук, старший научный сотрудник Института международных исследований Шанхайской академии общественных наук, заместитель директора Центра исследований России и ЦА ШАОН. E-mail:zjr@sass.org.cn.

УДК 534.11

Шагиев В.Р., Ахтямов А.М.

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

Рассматривается проблема определения типов закрепления трубопровода по собственным частотам изгибных колебаний с протекающей жидкостью.

Ключевые слова: краевые условия, собственные частоты, собственные значения, заделка, свободное опирание, плавающая заделка, свободный конец, трубопровод.

Shagiev V.R., Akhtyamov A.M.

NATURAL FREQUENCIES OF VIBRATIONS OF PIPELINE WITH FLOW LIQUID

We consider the problem of determining the type of fastening of the pipeline on the natural frequencies of flexural vibrations with a flowing liquid.

Key words: boundary conditions, natural frequencies, eigenvalues, clamping, free support, floating fixing, free end, pipeline.

Рассматриваются колебания трубопровода с жидкостью [4]. Ранее [1, с. 129] было показано, что если жидкость не течёт по трубопроводу, то по всем собственным частотам изгибных колебаний трубопровода вид закрепления трубопровода определяется однозначно с точностью до перестановок закреплений на его концах. Если рассматривать только

© Шагиев В.Р., Ахтямов А.М., 2017

неупругие типы закреплений: заделка, свободное опирание, плавающая заделка, свободный конец, – возникает 16 вариантов закреплений трубопроводов. В [3] было показано, что вариант, когда трубопровод на одном конце закреплён заделкой, а на другом свободен, и вариант (свободное опирание)-(плавающая заделка) можно идентифицировать всего лишь по одной ненулевой собственной частоте. Остальные 12 вариантов определяются по одной ненулевой собственной частоте и информации, является ли ноль собственным значением.

Добавив к рассмотрению упругие закрепления, количество собственных частот, необходимых для решения обратной задачи, возрастает.

Среди всех видов закреплений, в том числе и упругих, когда жидкость не течёт по трубопроводу, закрепления (заделка)-(свободный конец) и (свободное опирание)-(плавающая заделка) можно однозначно идентифицировать по четырём собственным частотам, а для идентификации остальных видов закреплений требуется четыре собственные частоты и информация, является ли ноль собственным значением. Ранее [2] такая задача решалась с использованием девяти собственных частот.

Данные результаты применимы для выбора закрепления, при котором колебания трубопровода имели бы нужный (безопасный) спектр частот. Кроме того, они применимы и для акустической диагностики закрепления трубопровода (используя при этом высокоточные приборы, измеряющие собственные частоты).

Случай, когда жидкость внутри трубопровода движется, является более сложным и пока решён лишь с помощью 14 собственных частот [1], что по нашему мнению является избыточным количеством.

После преобразований уравнение малых свободных колебаний трубопровода с протекающей по нему жидкостью (с учётом несжимаемости жидкости) выглядит так:

$$X^{(4)} + aX'' + 2biwX' - cw^2 X = 0. \qquad (1)$$

Когда жидкость движется, коэффициент

$$b = \frac{mV_0 L^3}{EI}, \qquad (2)$$

уже не равен нулю и в уравнении (1) появляется комплексная составляющая, затрудняющая вычисления.

При решении прямой задачи, т.е. задачи нахождения собственных частот по известным физико-техническим параметрам механической системы и краевым условиям, замечен факт, что если трубопро-

вод на левом и правом концах закреплён одинаково, то собственные частоты вещественны. Когда же закрепления разные, собственные частоты изгибных колебаний трубопровода имеют вещественную и комплексную составляющую.

Как упоминалось выше, когда жидкость не движется, то по всем собственным частотам изгибных колебаний трубопровода вид закрепления трубопровода определяется однозначно с точностью до перестановок закреплений на его концах. Это значит, что, например, спектр частот закрепления (заделка)-(свободный конец) полностью совпадает со спектром частот закрепления (свободный конец-заделка). При рассмотрении случая с движущейся жидкостью, эти спектры различаются.

Рассмотрим абстрактный случай, при котором коэффициенты *a* и *c* в уравнении (1) равны 1, а коэффициент *b* равен 100. Собственные частоты закрепления (заделка)-(свободный конец):

$$w_1 = 25.1824 + 8.4929\ I,$$
$$w_2 = 61.6795 + 3.2434\ I,$$
$$w_3 = 120.5996 + 1.6565\ I,$$
$$w_4 = 199.4725 + 1.0021\ I.$$

Собственные частоты закрепления (свободный конец)-(заделка):

$$w_1 = 25.1824 - 8.4929\ I,$$
$$w_2 = 61.6795 - 3.2434\ I,$$
$$w_3 = 120.5996 - 1.6565\ I,$$
$$w_4 = 199.4725 - 1.0021\ I.$$

Таким образом, при перестановке закреплений местами вещественная часть собственных частот не изменяется, а комплексная меняет свой знак.

Библиографический список

1. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.

2. Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная математика и техническая физика. – 2008. –Т. 49. – № 1. – С. 139–147.

3. Ахтямов А.М., Шагиев В.Р. Идентификация неупругих видов закреплений трубопроводов // Вестник Башкирского университета. – 2016. – Т. 21. – № 1. – С. 21–26.

4. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. – М.: Наука, 1969. – 182 с.

Сведения об авторах

Шагиев Вадим Рустамович, аспирант БашГУ. E-mail: shagiev-vadim@mail.ru.

Ахтямов Азамат Мухтарович, доктор физико-математических наук, профессор БашГУ. E-mail: akhtyamovam@mail.ru.

УДК 544.43

Шаймухаметов Д.Р., Шаймухаметова Д.В., Мустафина С.А.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Аннотация. В работе приведена постановка задачи оптимального управления, раскрыты понятия критерия оптимальности и ограничений, накладываемых на управляющие параметры, фазовые переменные и свободные параметры.

Ключевые слова: математическая модель, задача оптимизации, критерий оптимальности.

Shaimukhametov D.R. Shaimukhametova D.V., Mustafina S.A.

STATEMENT OF THE PROBLEM OF OPTIMIZATION OF CHEMICAL-TECHNOLOGICAL PROCESSES

Abstract. The paper presents the formulation of the problem of optimal control, the concepts of the optimality criterion and constraints imposed on control parameters, phase variables and free parameters are disclosed.

Key words: mathematical model, optimization problem, optimality criterion.

В настоящее время в химическом производстве объем капиталовложений очень велик. Поэтому оптимизация аппаратов и режимов эксплуатации, при сокращении расходов даже на доли процентов позволяет значительно экономить средства.

Постановка задачи оптимизации включает описание трех основных частей:

1. Математическая модель, в которой определены исходные данные, управляющие параметры и область определения решений модели.

2. Критерий оптимальности, дающий качественную характеристику при выборе оптимального варианта.

© Шаймухаметов Д.Р., Шаймухаметова Д.В., Мустафина С.А..,2017

3. Ограничения, накладываемые на управления, фазовые переменные, а также свободные параметры.

Математическое описание процесса задается системой конечных или дифференциальных уравнений, выражающих взаимовлияние различных параметров. Как правило, получение из уравнений математического описания соотношений, выражающих зависимость выходных параметров процесса от входных и управляющих, в явном аналитическом виде невозможно, т.е. невозможно получения соотношений вида:

$$y = \varphi(x, u), \tag{1}$$

где величина φ рассматривается как вектор-функция, т.е.

$$y_i = \varphi_i(x, u), i = 1, .., n \tag{2}$$

Полагается, что для нахождения вида указанных зависимостей имеется алгоритм, позволяющий по известным входным переменным и управлениям рассчитать величины параметров состояния.

Таким образом, математическая модель будет представлять собой систему уравнений математического описания, характеризующую явления, протекающие в объекте моделирования, и с помощью которой на основании определенного алгоритма можно будет прогнозировать поведение объекта при изменении управляющих, либо входных параметров [2].

Математическая постановка задачи оптимизации в общем виде заключается в поиске максимума некоторой функции от входных, выходных и управляющих параметров:

$$F = R(x, y, u). \tag{3}$$

Правая часть в (3) может иметь вид функционала, т.е. интегральных оценок:

$$I = \int_0^{t^k} R(x, y, u)dt. \tag{4}$$

Переменная F называется критерием оптимизации и является количественной характеристикой получаемых результатов. Связь переменных и критерия оптимизации выражается функциональной зависимостью R, а критерий оптимальности рассматривается как функция управляющих параметров u_i. При этом любое изменение значений указанных переменных прямо сказывается на величине критерия оптимальности, если управляющие параметры непосредственно входят в выражение критерия оптимальности и косвенно, через изменение входных параметров процесса, зависящих от управляющих на основании соотношения (1). Следовательно, критерий оптимальности можно выразить как функцию только входных и управляющих параметров:

$$F = R*(x,u). \quad (5)$$

Решение оптимизационной задачи в данном случае можно представить как зависимость управляющих параметров процесса u от входных параметров x и, возможно, от времени t и пространственных координат z объекта оптимизации:

$$u_{опт} = u(x,t,z).$$

От того, насколько правильно сформулирован критерий оптимизации, будет зависеть правильность и возможность решения задачи. Для правильной постановки оптимальной задачи необходимо соблюдение требования нахождения оптимального значения только одной величины при определенных условиях, т.е. критерий оптимальности должен быть единственным. Важным требованием является и то, что критерий оптимизации должен выражаться числом, а его величина должна изменяться монотонно. Это означает: чем большее либо меньшее значение критерия – тем лучше результат получен.

В большинстве задач недостаточно хорошего выбора критерия оптимизации, чтобы учесть все условия, в которых должен проходить процесс. Условия, которые необходимо соблюдать, несмотря на то, как их соблюдение повлияет на величину критерия оптимальности, называют ограничениями.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-47-020068 и проекта № 13.5143.2017/БЧ, выполняемого вузом в рамках государственного задания Минобрнауки РФ.

The study was funded by RFBR according to the research project № 17-47-020068 and project No. 13.5143.2017/ BCH, carried out by the University in the framework of the State Task of the Ministry of Education of the Russian Federation.

Библиографический список

1. Быков В.И. Моделирование критических явлений в химической кинетике / Предисл. И послесл. Г.Г. Малинецкого. Изд. 2-е., испр. И доп. – М.: КомКнига, 2006. – 325 с.

2. Бояринов А. И., Кафаров В.В. Методы оптимизации в химической технологии. – М.: Химия, 1975. – 575 с.

3. Шаймухаметова Д.В., Мустафина С.А. Построение обобщенных формул кинетики дезактивации, протекающей по линейным и нелинейным механизмам // Вестник казанского технологического университета. – 2016. – Т. 19. – № 15. – С. 147–150.

4. Шаймухаметова Д.В., Шаймухаметов Д.Р. Математическое описание процессов при решении задачи поиска оптимального управления // Вестник науки и образования. – 2015. – № 10 (12). – С. 6–7.

Сведения об авторах

Шаймухаметов Денис Раисович, аспирант ФГБУН Института Нефтехимии и Катализа РАН. E-mail: shaimukhametov@yandex.ru.

Шаймухаметова Дина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Сф БашГУ. E-mail: Berzina_d@mail.ru.

Мустафина Светлана Анатольевна, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой СФ БашГУ. E-mail: mustafina_sa@mail.ru.

УДК 519.6

Шамсутдинова Г.Р., Викторов С.В.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОИСКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ УЧАСТКОВ ПРОТЯЖЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Аннотация. В работе рассматривается математическая модель и решение обратной задачи поиска деформированных участков прямого цилиндра в трехслойном полупространстве методами электроразведки.

Ключевые слова: прямая и обратная задача электроразведки, метод интегральных представлений, метод конфигурации, функция Грина, краевая задача.

Shamsutdiniva G.R., Viktorov S.V.

MATHEMATICAL MODEL SEARCH DEFORMABLE EXTENDED CYLINDRICAL OBJECTS IN A LAYERED ENVIRONMENT

Annotation. The paper considers a mathematical model and the solution of the inverse problem of searching for deformed sections of a straight cylinder in a three-layer half-space by methods of electrical prospecting.

Keywords: direct and inverse problem of electrical prospecting, method of integral representations, method of configuration, Green's function, boundary value problem.

Мониторинг состояния протяженных объектов, например, продуктопроводов, которые в процессе эксплуатации могут быть подвержены деформации под воздействием явлений техногенного характера, является актуальной задачей. Применение эффективных электрических методов разведки позволяет достаточно точно исследовать геометриче-

© Шамсутдинова Г.Р., Викторов С.В., 2017

скую структуру исследуемого геологического разреза, содержащего проводящие электрический ток включения, оценить их размеры и форму. Возникающие теоретические задачи, которые заключаются в нахождении формы исследуемого включения, относятся к классу обратных задач геофизики.

Пусть в слоистом изотропном полупространстве, состоящем из трех плоско-параллельных горизонтальных слоев $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ с удельными проводимостями $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ соответственно, в слое Ω_1 содержится протяженное включение Ω_c, σ_c цилиндрической формы. Ось цилиндрического включения расположена в плоскости *xOy* на расстоянии $z = z_c$, параллельно оси *Ox*. На участке $x \in [a,b]$ цилиндр имеет деформацию (сдвиг вдоль оси *Oy*) (рис. 1). Решение задачи сводится к поиску параметров *a* и *b*, которые определяют участок искривления протяженного тела.

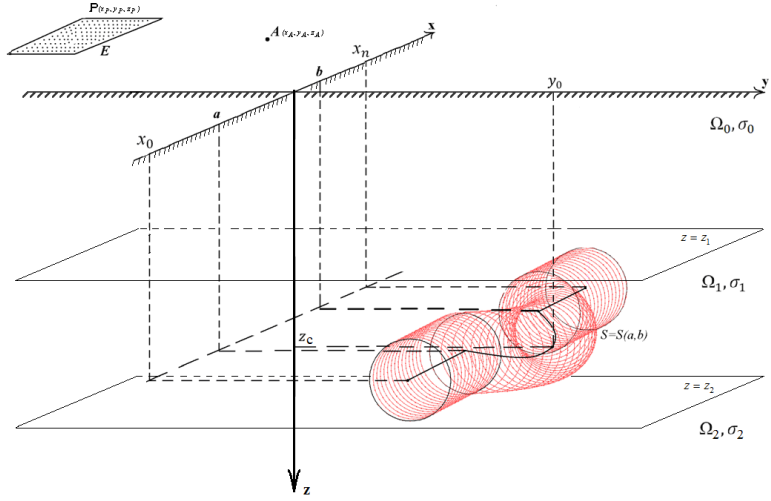


Рис. 1. Цилиндрическое включение в трехслойном изотропном полупространстве

Обратная задача поиска параметров $[a,b]$ протяженного включения Ω_c заключается в поиске экстремали функционала А.Н. Тихонова вида [1]:

$$F^{\alpha}(S) = F_1(S) + \alpha \cdot F_2(S) = \left\| u(A,P,S) - u^e(A,P) \right\|^2_{L_2} + \alpha \cdot \left\| S - S^e \right\|^2_{W_2^1}, \quad (1)$$

где $S = S(a,b)$ функция параметрического описания поверхности деформированного на участке $[a,b]$ цилиндра Ω_c; $u^e(A,P)$ – экспериментальные геофизические данные измерений, полученные на области E «дневной» поверхности, которые представляют собой значения, потенциала поля постоянного тока от точечного источника A в точке приемника P $(A,P \in \Omega_0)$; $u(A,P)$ – модельное решение прямой задачи о поле точечного источника, которое представляется в виде следующий краевой задачи эллиптического типа [2]:

$$\Delta u_0(A,P,S) = -\frac{I}{\sigma_0}\delta(P-A), \text{ при } P \in \Omega_0; \quad (2)$$

$$\Delta u_1(P,S) = 0,\ \Delta u_2(P,S) = 0,\ \Delta u_c(P,S) = 0 \text{ при } P \notin \Omega_0; \quad (3)$$

$$\left.\frac{\partial u_0(P,S)}{\partial z}\right|_{z=0} = 0; \quad (4)$$

$$u_c(P,S)\big|_S = u_1(P,S)\big|_S; \quad (5)$$

$$\sigma_c \left.\frac{\partial u_c(P,S)}{\partial n}\right|_S = \sigma_1 \left.\frac{\partial u_1(P,S)}{\partial n}\right|_S; \quad (6)$$

$$u_i(P,S)\big|_{z=z_{i+1}} = u_{i+1}(P,S)\big|_{z=z_{i+1}}, \text{ где } i = 0,1; \quad (7)$$

$$\sigma_i \left.\frac{\partial u_i(P,S)}{\partial z}\right|_{z=z_{i+1}} = \sigma_{i+1} \left.\frac{\partial u_{i+1}(P,S)}{\partial z}\right|_{z=z_{i+1}}, \text{ где } i = 0,1; \quad (8)$$

$$u_i(P,S) \to 0 \text{ при } P \to \infty, \text{ где } i = 0,1,2,c; \quad (9)$$

где Δ – оператор Лапласа, δ – функция Дирака, условие (4) определяет изолированность дневной поверхности, (5) и (6) – условия непрерывности потенциала и плотности тока соответственно на границе поверхности S, (7) и (8) – условия непрерывности потенциала и плотности тока соответственно на границах слоев z_1, z_2, (9) – условие регулярности решения на бесконечности.

К задаче (2) и (9) применим метод интегральных представлений ее решения, который формируется на основе интегральных преобразований с построением функции Грина для вмещающего пространства [5].

Выбрав, в соответствии с методом, в качестве содержащей цилиндр среды трехслойное полупространство, построим для него математическую модель – подзадачу для функции точечного источника (функции Грина $G(P,Q)$).

$$\Delta G_Q(Q,P) = -\delta(P-Q) \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial G_0}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \tag{11}$$

$$G_i(P,S)\big|_{z=z_{i+1}} = G_{i+1}(P,S)\big|_{z=z_{i+1}}, \text{ где } i = 0,1; \tag{12}$$

$$\sigma_i \left.\frac{\partial G_i(P,S)}{\partial z}\right|_{z=z_{i+1}} = \sigma_{i+1} \left.\frac{\partial G_{i+1}(P,S)}{\partial z}\right|_{z=z_{i+1}}, \text{ где } i = 0,1; \tag{13}$$

$$G(P) \to 0 \text{ при } P \to \infty \tag{14}$$

В соответствии с применяемым методом выпишем интегральное представление решения прямой задачи и интегральное уравнение относительно неизвестных граничных значений потенциала на границе цилиндрического включения. Для этого рассмотрим следующую формулу:

$$\int_{\Omega} \left[\Delta u(Q)\cdot G(P,Q) - \Delta G(P,Q)\cdot u(Q)\right] d\Omega_Q =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u(Q)}{\partial n}\cdot G(P,Q) - \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\cdot u(Q)\right] d\{\partial\Omega_Q\},$$

Применим ее для областей $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_c$.

Для области Ω_0 формула примет вид:

$$\int_{\Omega_0} \left[\Delta u_0(Q)\cdot G(P,Q) - \Delta G(P,Q)\cdot u_0(Q)\right] d\Omega_0 =$$

$$\int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u_0(Q)}{\partial n}\cdot G(P,Q) - \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\cdot u_0(Q)\right] d\{\partial\Omega_0\}$$

$$\int\limits_{\Omega_0}\left[-\frac{I}{\sigma_0}\delta(P-A)\cdot G(P,Q)-\delta(P-Q)\cdot u_0(Q)\right]d\Omega_0 =$$

$$\int\limits_{z=0}\left[\frac{\partial u_0(Q)}{\partial z}\cdot G(P,Q)-\frac{\partial G(P,Q)}{\partial z}\cdot u_0(Q)\right]d\{z=0\}+$$

$$\int\limits_{z=z_1}\left[\frac{\partial u_0(Q)}{\partial z}\cdot G(P,Q)-\frac{\partial G(P,Q)}{\partial z}\cdot u_0(Q)\right]d\{z=z_1\}$$

Введем в рассмотрение вспомогательные коэффициенты:

$$\int_{\Omega_Q}\delta(P-A)\cdot f(P,Q)d\Omega_Q=\begin{cases} f(P), P\in\Omega_i \\ f(P)/2, P\in\partial\Omega_i \\ 0, P\notin\{\Omega_i,\partial\Omega_i\}\end{cases}$$

Интегральное свойство δ функции:

$$\nu_i=\begin{cases} 1, P\in\Omega_i \\ 1/2, P\in\partial\Omega_i \\ 0, P\notin\{\Omega_i,\partial\Omega_i\}\end{cases}$$

В результате введенных обозначений получаем:

$$-\frac{I}{\sigma_0}G(P,A)+\nu_0 u_0(P)=\int\limits_{z=z_1}\left[\frac{\partial u_0(Q)}{\partial z}\cdot G(P,Q)-\frac{\partial G(P,Q)}{\partial z}\cdot u_0(Q)\right]d\{z=z_1\}$$

Аналогично будем применять вспомогательные коэффициенты для оставшихся плоскостей $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_c$.

Для области Ω_1:

$$\int\limits_{\Omega_1}\left[\Delta u_1(Q)\cdot G(P,Q)-\Delta G(P,Q)\cdot u_1(Q)\right]d\Omega_1 =$$

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial u_1(Q)}{\partial n}\cdot G(P,Q)-\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\cdot u_1(Q)\right]d\{\partial\Omega_1\}$$

$$\nu_1 u_1(P)=$$

$$\int\limits_{z=z_1}\left[\frac{\partial u_1(Q)}{\partial z}\cdot G(P,Q)-\frac{\partial G(P,Q)}{\partial z}\cdot u_1(Q)\right]d\{z=z_1\}+$$

$$+\int\limits_{z=z_2}\left[\frac{\partial u_1(Q)}{\partial z}\cdot G(P,Q)-\frac{\partial G(P,Q)}{\partial z}\cdot u_1(Q)\right]d\{z=z_2\}+$$

$$+\int\limits_{S}\left[\frac{\partial u_1(Q)}{\partial n}\cdot G(P,Q)-\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\cdot u_1(Q)\right]dS$$

Для области Ω_2:

$$\int\limits_{\Omega_2}\left[\Delta u_2(Q)\cdot G(P,Q)-\Delta G(P,Q)\cdot u_2(Q)\right]d\Omega_2 =$$

$$=\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial u_2(Q)}{\partial n}\cdot G(P,Q)-\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\cdot u_2(Q)\right]d\{\partial\Omega_2\},$$

$$\int\limits_{\Omega_2}\left[\Delta u_2(Q)\cdot G(P,Q)-\Delta G(P,Q)\cdot u_2(Q)\right]d\Omega_2 =$$

$$=\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial u_2(Q)}{\partial n}\cdot G(P,Q)-\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\cdot u_2(Q)\right]d\{\partial\Omega_2\}$$

$$\nu_2 u_2(P)=$$

$$=\int\limits_{z=z_2}\left[\frac{\partial u_2(Q)}{\partial z}\cdot G(P,Q)-\frac{\partial G(P,Q)}{\partial z}\cdot u_2(Q)\right]d\{z=z_2\}$$

Для области Ω_c:

$$\int\limits_{\Omega_c}\left[\Delta u_c(Q)\cdot G(P,Q)-\Delta G(P,Q)\cdot u_c(Q)\right]d\Omega_c =$$

$$=\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial u_c(Q)}{\partial n}\cdot G(P,Q)-\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\cdot u_c(Q)\right]d\{\partial\Omega_c\}$$

$$\nu_c u_c(P)=$$

$$=\int\limits_{S}\left[\frac{\partial u_c(Q)}{\partial n}\cdot G(P,Q)-\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\cdot u_c(Q)\right]dS$$

Умножим полученные для областей $\Omega_0,\Omega_1,\Omega_2,\Omega_c$ равенства соответственно на $\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_c$ и сложим их:

$$-I\cdot G(P,A)+\sigma_0\nu_0 u_0(P)+\sigma_1\nu_1 u_1(P)+\sigma_1\nu_1 u_1(P)=$$

$$=\int\limits_{z=z_1}\left[\sigma_0\frac{\partial u_0(Q)}{\partial z}\cdot G(P,Q)-\sigma_0\frac{\partial G(P,Q)}{\partial z}\cdot u_0(Q)+\right.$$

$$\left.+\sigma_1\frac{\partial u_1(Q)}{\partial z}\cdot G(P,Q)-\sigma_1\frac{\partial G(P,Q)}{\partial z}\cdot u_1(Q)\right]d\{z=z_1\}+$$

$$+\int\limits_{z=z_2}\left[\sigma_1\frac{\partial u_1(Q)}{\partial z}\cdot G(P,Q)-\sigma_1\frac{\partial G(P,Q)}{\partial z}\cdot u_1(Q)+\right.$$

$$\left.+\sigma_2\frac{\partial u_2(Q)}{\partial z}\cdot G(P,Q)-\sigma_2\frac{\partial G(P,Q)}{\partial z}\cdot u_2(Q)\right]d\{z=z_2\}$$

$$+\int\limits_S\left[\sigma_1\frac{\partial u_1(Q)}{\partial z}\cdot G(P,Q)-\sigma_1\frac{\partial G(P,Q)}{\partial z}\cdot u_1(Q)+\right.$$

$$\left.+\sigma_c\frac{\partial u_c(Q)}{\partial z}\cdot G(P,Q)-\sigma_c\frac{\partial G(P,Q)}{\partial z}\cdot u_c(Q)\right]dS$$

Упростив последнее равенство, получим формулу интегрального представления в обобщенном виде:

$$\sum_{i=0}^{c}\sigma_i\nu_i u_i(P)=(\sigma_1-\sigma_c)\int\limits_S\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\cdot u(Q)\,dS+I\cdot G(P,A)$$

Предполагая, что источник находится в однородной среде, то есть $P\in\Omega_1$, $\nu_1=1$, $\nu_0=\nu_2=\nu_c=0$:

$$u(P)=\frac{(\sigma_1-\sigma_c)}{\sigma_1}\int\limits_S\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\cdot u(Q)\,dS+\frac{I}{\sigma_1}\cdot G(P,A)\,. \qquad (15)$$

Формула (15) – это формула интегрального представления решения.

Чтобы найти значение потенциала на границе S, положим, что $P\in S$. Тогда $P\in S$, $\nu_1=\nu_c=1/2$, $\nu_0=\nu_2=0$

$$u(P)=\frac{(\sigma_1-\sigma_c)}{(\sigma_1+\sigma_c)}\int\limits_S\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\cdot u(Q)\,dS+\frac{I}{(\sigma_1+\sigma_c)}\cdot G(P,A)\,. \quad (16)$$

Формула (16) – интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода относительно неизвестных граничных значений потенциала $u(Q)$.

Таким образом, решение задачи определяется формулой (15), которая представляет собой определённый интеграл в случае вычисленных по формуле (16) значений $u(Q)$ на границе S.

Предлагаемый в работе метод является универсальным методом понижения геометрической сложности исследуемой среды. С другой стороны этот метод может быть использован также для поэтапного усложнения геометрии модели.

Для решения прямой задачи была реализована процедура для построения поверхности цилиндрического включения, соответствующего формулам параметрического описания цилиндра [7]:

$$x \in [x_0, x_n], \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad [a, b] \subseteq [x_0, x_n]:$$

$$\begin{cases} X(\varphi, x) = x_0 + x, \\ Y(\varphi, x) = y_0 + \begin{cases} R \cdot \sin(\varphi), & x \notin [a, b], \\ R \cdot \sin(\varphi) + S(x), & x \in [a, b] \end{cases}, \\ Z(\varphi, x) = z_0 + R \cdot \cos(\varphi). \end{cases}$$

где $i = \overline{0, N}$, $S(x)$ – функция сплайна для вычисления деформации протяженного цилиндрического включения на отрезке $[a, b]$, который вычисляется по формуле:

$$c = 0.5 \cdot (a + b), \quad d = 0.1 \cdot (b - a):$$

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = dx^3 + \left(\dfrac{2d}{b-a} - \dfrac{2}{3} d \right) x^2 - \dfrac{4d}{b-a} x - \dfrac{8d}{(b-a)^2} \\ S_2(x) = \left(-\dfrac{2d}{b-a} - \dfrac{1}{3} d \right) x^2 + \dfrac{8d}{(b-a)^2} \end{cases}$$

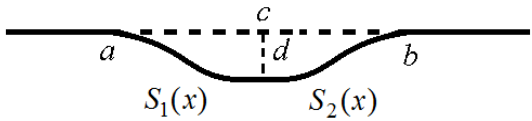


Рис. 2. Направляющая цилиндра с деформацией

Для решения обратной задачи в работе [3] предлагается алгоритм поиска минимума функционала вариационного типа реализованный методом конфигураций, ориентированным на поиск глобального минимума сильно-овражных функций [6]. При поиске локального включения варьируемыми параметрами является границы отрезка $[a, b]$.

Для поиска решения обратной задачи и проведение вычислительного эксперимента в работе [4] было реализовано программное средство для случая однородного полупространства, а также представлены результаты решения.

Библиографический список

1. Викторов С.В. Математическое моделирование геоэлектрических полей в осесимметричных средах со сплайн-аппроксимацией границ // Дисс. ... к.ф.-м.н., Стерлитамак, 2005, 106 с.

2. Шамсутдинова Г.Р., Викторов С.В. Прямая задача о поле точечного источника в однородной среде с цилиндрическим включением // Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 75-летию физико-математического факультета, Часть 2 «Математическое моделирование процессор и систем». – Стерлитамак, 2015. – С. 315–320.

3. Шамсутдинова Г.Р., Викторов С. В. Решение обратной задачи определения формы фрагмента цилиндрического включения // Сборник материалов Международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии». – Самара, 2016. – С. 781–785.

4. Шамсутдинова Г.Р., Викторов С.В. Обратная задача электроразведки поиска формы цилиндрического включения // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы V Всерос. науч.-практ. конф., приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова, 17–19 ноября 2016 г., г. Стерлитамак. – Ч. III. – С. 276–282.

5. Викторов С.В. Комбинированный метод решения задачи электрокаротажа вертикальной скважины // Журнал Средневолжского математического общества. – 2011. – Т. 13. – № 2. – С. 57–62.

6. Викторов С.В. Обратная задача определения формы границ включения в горизонтально-слоистой среде // Информация и образование: границы коммуникаций. – 2014. – № 6 (14). – С. 104–105.

7. Беляева М.Б. Математическое моделирование электрических полей в цилиндрических кусочно-однородных средах со сплайн-аппроксимацией границ // Дисс. ... к.ф.-м.н., Стерлитамак, 2007.

Сведения об авторах

Шамсутдинова Гульнара Ринатовна, магистрант 1 курса СФ БашГУ. E-mail: G1U9L9A5@yandex.ru.

Викторов Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ E-mail: viktorov@rambler.ru.

УДК 517.977.58

Шангареева Г.Р., Мустафина С.А.

О ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрен метод последовательных приближений для определения оптимального управления в задачах со свободным правым концом, основанный на принципе максимума, для иллюстрации метода приводятся результаты численного решения задачи.

Ключевые слова: метод последовательных приближений, оптимальное управление, принцип максимума, оптимизация, численное решение.

Shangareeva G.R., Mustafina S.A.

ON A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS

The method of successive approximations to determine the optimal control problems with free right end, based on the principle of maximum, to illustrate the results of a numerical method for solving the problem.

Keywords: method of successive approximations, optimal control, maximum principle, optimization, numerical solution.

Нахождение оптимального управления для процесса, описываемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка, с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина сводится к краевой задачи для системы уравнений $2n$-го порядка [1]. При решении краевых задач аналитическим методом для сложных нелинейных систем часто возникают математические трудности, которые требуют разработки специальных методов решения. Поэтому представляют интерес методы решения задач оптимального управления, позволяющие обойти эти трудности.

Пусть управляемый процесс представлен системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,u), \tag{1}$$

с начальными условиями:

$$x_i(0) = x_{i0}, (i = 1\ldots n) \tag{2}$$

с ограничениями на функцию управления:

© Шангареева Г.Р., Мустафина С.А., 2017

$$\varphi(u) \le 0, \tag{3}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – фазовые переменные; $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ – переменные управления; t – время. Критерий оптимизации пусть задан в терминальном виде:

$$I = I\left(x_1(\bar{t}), x_2(\bar{t}), \ldots, x_p(\bar{t})\right), \quad p \le n. \tag{4}$$

Вместе с основной системой рассматривается сопряженная система:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \cdot \psi_k, \; i = 1 \ldots n. \tag{5}$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ – сопряженные переменные.

Составляется функция Понтрягина $H(x(t), u(t), \psi(t)) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \cdot f_i$ и требуется найти оптимальные параметры $x(t), u(t)$, доставляющие максимум функции H:

$$H(x^*(t), u^*(t), \psi(t)) = \max H((x(t), u(t), \psi(t)) \tag{6}$$

Краевые условия для переменных $\psi_i(\bar{t})$ задаются выражениями:

$$\psi_i(\bar{t}) = \frac{dI}{dx_i}, \; i = 1 \ldots n. \tag{7}$$

Одним из наиболее распространенных методов решения данной задачи является метод последовательных приближений в пространстве управлений. Перейдем к описанию данного метода.

Суть метода состоит в построении последовательных итераций для управлений. Пусть известно *k*-е приближение $u^k(t)$. Следующее (*k*+1)-ое приближение $u^{k+1}(t)$ строится с помощью процедуры, включающей 3 этапа:

1. Интегрируя систему (1) при $u = u^k(t)$ с начальными условиями (2) в интервале $0 \le t \le \bar{t}$ получаем траекторию $x^k(t)$, запоминая её в достаточном числе точек.

2. Применяя $x^k(t)$ и $u^k(t)$, интегрируем систему (5) с начальными условиями (7) в обратном направлении от $t = \bar{t}$ до $t = 0$., находим значение переменных $\psi^k(t)$ и запоминаем в достаточном числе точек.

3. Одновременно с интегрированием определяем новое приближение $u^{k+1}(t)$ из соотношения (6), используя в качестве x и ψ значения $x^k(t)$ и $u^k(t)$.

На основе вышеописанного алгоритма реализована программа на языке программирования C++. Рассмотрим работу алгоритма на следующем примере. Пусть на интервале $0 \le t \le 2.5$ задан некоторый процесс, описанный системой дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2, \\ \dot{x}_2(t) = u. \end{cases}$$

Начальные условия имеют вид: $x_1(0) = -1$ и $x_2(0) = 0$. На управление наложено ограничение: $|u| \le 1$. Требуется найти такое управление $u(t)$, чтобы величина:

$$I(x_1, x_2) = x_1^3(2.5) + x_2^2(2.5) \to \min$$

приняла минимальное значение.

Аналитическое решение данной задачи представлено в работе [2].

Сравнивая полученные численные и аналитические значения, вычислим погрешности для управления и траекторий. Для вычисления погрешностей воспользуемся евклидовой нормой:

$$\varepsilon_{x_1} = \sqrt{\sum_i \left(x_{1i} - x_1^*(t_i)\right)^2} = 0{,}1094;$$

$$\varepsilon_{x_2} = \sqrt{\sum_i \left(x_{2i} - x_2^*(t_i)\right)^2} = 0{,}1742;$$

$$\varepsilon_u = \sqrt{\sum_i \left(u_i - u^*(t_i)\right)^2} = 0{,}8355.$$

Полученные результаты показывают удовлетворительное согласование с аналитическим решением [3].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-47-020068 и проекта № 13.5143.2017/БЧ, выполняемого вузом в рамках государственного задания Минобрнауки РФ.

The study was funded by RFBR according to the research project № 17-47-020068 and project No. 13.5143.2017/ BCH, carried out by the University in the framework of the State Task of the Ministry of Education of the Russian Federation.

Библиографический список

1. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1962 – № 6 – С. 1132–1139.

2. Островский Г.М., Волин Ю.М. Методы оптимизации сложных химико-технологических схем. – М.: Химия, 1970. – 328 с.

3. Шангареева Г.Р., Григорьев И.В., Мустафина С.А. Сравнительный анализ численных алгоритмов решения задач оптимального управления // Вестник технологического университета. – 2016. – Т. 19, № 8. – С. 119–122.

Сведения об авторах

Шангареева Гульназ Рауфовна, аспирант СФ БашГУ. E-mail: shangareeva.gulnaz@gmail.com.

Мустафина Светлана Анатольевна, доктор физико-математических наук, профессор СФ БашГУ. E-mail: MustafinaSA@mail.ru.

УДК 541(64 +127):544.433.22

Шиян Д.А., Улитин Н.В., Терещенко К.А., Тахаутдинова А.В., Фризен А.К., Колесов С.В.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМА ПОЛИМЕРИЗАЦИИ СТИРОЛА, ИНИЦИИРУЕМОЙ РАДИКАЛЬНЫМ ИНИЦИАТОРОМ, ТЕРМИЧЕСКИ ИЛИ УФ-ОБЛУЧЕНИЕМ В ПРИСУТСТВИИ ФЕРРОЦЕНА, МЕТОДАМИ КВАНТОВОЙ ХИМИИ И КИНЕТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В результате квантово-химического и кинетического моделирования идентифицирован механизм полимеризации стирола, инициируемой радикальным инициатором, термически или УФ-облучением в присутствии ферроцена.

Ключевые слова: квантово-химическое моделирование реакций, кинетическое моделирование, полистирол, ферроцен.

Shiyan D.A., Ulitin N.V., Tereshchenko K.A., Takhautdinova A.V., Friesen A.K., Kolesov S.V.

IDENTIFICATION OF THE MECHANISM OF STYRENE POLYMERIZATION INITIATED BY RADICAL INITIATOR, THERMAL OR UV RADIATION IN THE PRESENCE OF FERROCEN BY METHODS OF QUANTUM CHEMISTRY AND KINETIC MODELING

The mechanism of styrene polymerization initiated by radical initiator, thermal or by UV radiation in the presence of ferrocene was identified as a result of quantum-chemical and kinetic modeling.

Keywords: quantum-chemical modeling of reactions, kinetic modeling, polystyrene, ferrocene.

Для изменения механизма радикально инициируемой полимеризации и структурных характеристик полимеров в реакционную массу добавляют соединения, которые придают процессу псевдоживой характер. В работах [1, 2] экспериментально исследованы процессы полимеризации виниловых мономеров в присутствии металлоценов. Металлоцены влияют на распад радикального инициатора и формируют *in situ* спиновые ловушки и координационные активные центры [1, 2]. В настоящий момент отсутствует общепринятое теоретическое представление о механизмах этих процессов. Поэтому в данной рабо-

© Шиян Д.А., Улитин Н.В., Терещенко К.А., Тахаутдинова А.В., Фризен А.К., Колесов С.В., 2017

те на примере процесса полимеризации стирола, инициируемого пероксидом бензоила, азобисизобутиронитрилом, термически и УФ-облучением и протекающего в присутствии ферроцена, была предложена методология идентификации механизмов процессов полимеризации в присутствии металлоценов, основанная на использовании квантово-химического и кинетического моделирования.

Квантово-химические расчеты проводили в Gaussian'09 Rev. C.01 (Version: EMT64T legacy/Linux, номер лицензии: FA7353864010) [3] на суперкомпьютере ЦКП «Химия» Уфимского Института химии РАН. Предполагаемый механизм процесса полимеризации составили, основываясь на теории радикальной полимеризации [4] и представлений о химии ферроцена [5]. Для каждой реакции с использованием результатов квантово-химического моделирования вычислили тепловые эффекты и активационные барьеры. По данным DFT-моделирования оценили температурные зависимости констант скоростей реакций предполагаемого механизма процесса (уравнение Эйринга). Кинетическую модель процесса разработали с использованием закона действующих масс и метода производящих функций [6] на основе реакций, входящих в предполагаемый механизм процесса. Найденные температурные зависимости констант скоростей реакций использовали в качестве первых приближений при решении обратной кинетической задачи. В результате решения обратной кинетической задачи уточнили температурные зависимости констант скоростей реакций, минимизировав по методу Хука-Дживса расхождение между данными, рассчитанными по кинетической модели процесса, и соответствующими им данными эксперимента. В качестве данных эксперимента использовали кинетические кривые процесса, значения среднечисленной и среднемассовой молекулярных масс и коэффициента полидисперсности и данные о стереосоставе полистирола [1, 2].

Ключевым результатом квантово-химического исследования и моделирования кинетики стала идентификация механизма процесса. В него вошли реакция термоинициирования, реакция инициатора – и пероксидного, и азотсодержащего – с ферроценом (в случае с УФ-облучением эта реакция отсутствует), реакции классической радикальной полимеризации, реакции контролируемой радикальной полимеризации Organometallic Mediated Radical Polymerization, реакции образования координационных активных центров двух типов и роста цепи в координационной сфере металла на них.

Работа выполнена в рамках государственного задания на 2017–2019 гг. (инициативный научный проект № 10.5548.2017/БЧ «Макрокинетика контролируемых и кинетически быстрых каталитических процессов (со)полимеризации виниловых и диеновых мономеров»).

Библиографический список

1. Сигаева Н.Н., Юмагулова Р.Х., Насретдинова Р.Н., Фризен А.К., Колесов С.В. Кинетические особенности комплексно-радикальной полимеризации метилметакрилата в присутствии металлоценовых инициирующих систем // Кинетика и катализ. – 2009. – Т. 50, № 2. – С. 182–187.

2. Колесов С.В., Насибуллин И.И., Фризен А.К., Сигаева Н.Н., Галкин Е.Г. Закономерности постполимеризации в системе виниловый мономер-металлоцен-радикальный инициатор // Высокомолекулярные соединения. – 2015. – Т. 57 (Б), № 2. – С. 83–89.

3. Frisch M.J., Trucks G.W., Schlegel H.B., Scuseria G.E., Robb M.A., Cheeseman J.R., Scalmani G., Barone V., Mennucci B., Petersson G.A., Nakatsuji H., Caricato M., Li X., Hratchian H.P., Izmaylov A.F., Bloino J., Zheng G., Sonnenberg J.L., Hada M., Ehara M., Toyota K., Fukuda R., Hasegawa J., Ishida M., Nakajima T., Honda Y., Kitao O., Nakai H., Vreven T., Montgomery J.A., Peralta J.E., Ogliaro F., Bearpark M., Heyd J.J., Brothers E., Kudin K.N., Staroverov V.N., Kobayashi R., Normand J., Raghavachari K., Rendell A., Burant J.C., Iyengar S.S., Tomasi J., Cossi M., Rega N., Millam J.M., Klene M., Knox J.E., Cross J.B., Bakken V., Adamo C., Jaramillo J., Gomperts R., Stratmann R.E., Yazyev O., Austin A.J., Cammi R., Pomelli C., Ochterski J.W., Martin R.L., Morokuma K., Zakrzewski V.G., Voth G.A., Salvador P., Dannenberg J.J., Dapprich S., Daniels A.D., Farkas O., Foresman J.B., Ortiz J.V., Cioslowski J., and Fox D.J. Gaussian 09, Revision C, Gaussian, Inc., Wallingford CT, 2009.

4. Багдасарьян Х.С. Теория радикальной полимеризации. – М: Изд-во Академии наук СССР, 1959. – С. 297.

5. Перевалова Э.Г., Решетова М.Д., Грандберг К.И. Железоорганические соединения. Ферроцен. – М.: Наука, 1983. – С. 544.

6. Улитин Н.В., Терещенко К.А. Методы моделирования кинетики процессов синтеза и молекулярно-массовых характеристик полимеров. – Казань: Казан. нац. исс. технол. ун-та, 2014. – С. 228.

Сведения об авторах

Шиян Дарья Александровна, аспирант кафедры технологии переработки полимеров и композиционных материалов КНИТУ, г. Казань. E-mail: shiyan-daria@yandex.ru.

Улитин Николай Викторович, доктор химических наук, доцент, профессор кафедры технологии переработки полимеров и композиционных материалов КНИТУ, г. Казань. E-mail: n.v.ulitin@mail.ru.

Терещенко Константин Алексеевич, кандидат химических наук, доцент кафедры технологии переработки полимеров и композиционных материалов КНИТУ, г. Казань. E-mail: nucleurmind@yandex.ru.

Тахаутдинова Алина Васильевна, бакалавр кафедры технологии переработки полимеров и композиционных материалов КНИТУ, г. Казань. E-mail: takhautdinova.alina@live.com.

Фризен Анна Константиновна, кандидат химических наук, научный сотрудник лаборатории стереорегулярных полимеров, г. Уфа, Уфимский Институт химии Российской Академии наук. E-mail: frizenak@rambler.ru.

Колесов Сергей Викторович, доктор химических наук, профессор, заведующий лабораторией стереорегулярных полимеров. г. Уфа, Уфимский Институт химии Российской Академии наук. E-mail: kolesovservic@rambler.ru.

УДК 517.91

Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ В ЗАДАЧЕ О БЕЗОПАСНЫХ И ОПАСНЫХ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе изучаются вопросы построения границ областей устойчивости точек равновесия в плоскости параметров динамических систем. Приводятся схемы определения основных сценариев бифуркаций.

Ключевые слова: точки равновесия, область устойчивости, асимптотические формулы, опасные и безопасные границы.

Yumagulov M.G., Ibragimova L.S., Mustafina I.Zh.

APPROXIMATE FORMULAS IN THE PROBLEM OF SAFE AND DANGEROUS BORDERS OF THE AREAS OF DYNAMIC SYSTEM RESISTANCE

In this paper, we study the problems of constructing the boundaries of stability regions of equilibrium points in the plane of parameters of dynamical systems. The schemes for determining the basic scenarios of bifurcations are given.

Key words: equilibrium points, stability region, asymptotic formulas, dangerous and safe boundaries.

В статье рассматривается задача о построении областей устойчивости точек равновесия дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\alpha,\beta)x + a_2(x,t,\alpha,\beta) + a_3(x,t,\alpha,\beta) + \widetilde{a_4}(x,t,\alpha,\beta),\ x \in R^2. \quad (1)$$

Предполагается, что:

– матрица $A(t,\alpha,\beta)$ и нелинейности $a_i(x,t,\alpha,\beta)$, $i = 2,3$ гладко зависят от скалярных параметров α и β и непрерывны по t;

– нелинейность $\widetilde{a_4}(x,t,\alpha,\beta)$ гладко зависит от x и равномерно по t, α и β удовлетворяет соотношению:

$$\left\| \widetilde{a_4}(x,t,\alpha,\beta) \right\| = O(||x||^4) \text{ при } \left\|x\right\| \to 0;$$

– матрица $A(t,\alpha,\beta)$ и функции $a_i(x,t,\alpha,\beta)$, $i = 2,3$, $\widetilde{a_4}(x,t,\alpha,\beta)$ являются $T-$периодическими по t.

Уравнение (1) при всех значениях параметров α и β имеет точку равновесия $x = 0$, которая при одних значениях параметров может быть устойчивой по Ляпунову, а при других – неустойчивой. Связное

© Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж., 2017

множество G в плоскости параметров (α, β) будем называть *областью устойчивости (областью неустойчивости)* точки равновесия $x = 0$ системы (1), если для любого $(\alpha, \beta) \in G$ эта точка является устойчивой (неустойчивой). Границы областей устойчивости и неустойчивости, как правило, представляют собой некоторые кривые γ, при переходе через которые в окрестности точки равновесия $x = 0$ системы (1) возможны различные бифуркационные явления.

Следуя Баутину И.И. [4] *безопасными* будем называть такие границы области устойчивости, пересечение которых параметрами системы приводит лишь к малым обратимым изменениям состояния системы; соответственно, *опасными* будем называть такие границы, пересечение которых параметрами системы приводит к значительным и необратимым изменениям в поведении системы.

Задача о построении и изучении границ областей устойчивости и неустойчивости является одной из важных и интересных задач теории дифференциальных уравнений и ее приложений. Здесь предложены эффективные методы исследования, решен ряд важных с теоретической и практической точек зрения задач (см., например, [2–5] и имеющуюся там библиографию).

Наряду с (1) будем рассматривать линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \alpha, \beta)x, \quad x \in R^2. \tag{2}$$

В настоящей статье предлагается новый общий подход, позволяющий получать приближенные формулы в задаче построения границ областей устойчивости системы (1). Подход основан на модификации метода М. Розо [2], асимптотических формулах теории возмущений линейных операторов и методах исследования локальных бифуркаций [1, 4].

Для простоты изложения будем предполагать, что при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ матрица $A_0 = A(t, \alpha_0, \beta_0)$ от t не зависит.

В указанном предположении матрица $A(t, \alpha, \beta)$ может быть представлена в виде:

$$A(t, \alpha, \beta) = A_0 + (\alpha - \alpha_0)A_1(t) + (\beta - \beta_0)B_1(t) + A_2(\alpha, \beta, t),$$

где матрицы $A_1(t)$, $B_1(t)$ и $A_2(\alpha, \beta, t)$ являются T−периодическими по t, при этом матрица $A_2(\alpha, \beta, t)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению:

$$\left\| A_2(\alpha, \beta, t) \right\| = O((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2) \text{ при } (\alpha, \beta) \to (\alpha_0, \beta_0).$$

Будем считать, что для матрицы A_0 выполнено одно из условий:

1^0. A_0 имеет простое собственное значение 0, а другое ее собственное значение является отрицательным;

2^0. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$.

В этих условиях, как правило, точка (α_0, β_0) лежит на границе γ_0 областей устойчивости G_s и неустойчивости G_n системы (1).

Случай 1^0. Пусть сначала выполнено условие 1^0. Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0. Эти векторы можно считать нормированными равенствами: $||e|| = 1$ и $(e, g) = 1$.

Положим

$$\zeta_1 = \int_0^T (A_1(t)e, g)dt, \quad \zeta_2 = \int_0^T (B_1(t)e, g)dt.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условие 1^0 и соотношение $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \neq 0$. Тогда через точку (α_0, β_0) плоскости (α, β) проходит единственная гладкая кривая γ_0, являющаяся границей областей устойчивости G_s и неустойчивости G_n точки равновесия $x = 0$ системы (1).

Ниже *трансверсальным переходом* параметров (α, β) через граничную кривую γ_0 вблизи точки (α_0, β_0) будем называть переход этих параметров через кривую γ_0 вдоль гладкой кривой γ_1, которая трансверсально пересекает кривую γ_0 в точке (α', β'), находящейся в δ −окрестности точки (α_0, β_0) при некотором $\delta > 0$.

Положим

$$\chi_2 = \int_0^T (a_2(e, t, \alpha_0, \beta_0), g)dt, \quad \chi_3 = \int_0^T (a_3(e, t, \alpha_0, \beta_0), g)dt.$$

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 выполнено соотношение: $\chi_2 \neq 0$. Тогда при трансверсальном переходе параметров (α, β) через граничную кривую γ_0 вблизи точки (α_0, β_0) в системе (1) реализуется сценарий транскритической бифуркации вынужденных колебаний. При этом граничная кривая γ_0 является безопасной границей области устойчивости системы (1).

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 1 выполнены соотношения: $a_2(x, t, \alpha, \beta) \equiv 0$ и $\chi_3 \neq 0$. Тогда при трансверсальном переходе параметров (α, β) через граничную кривую γ_0 вблизи точки (α_0, β_0) в системе (1) реализуется сценарий бифуркации вынужденных колебаний типа вилки. При этом граничная кривая γ_0 является безопасной

(опасной) границей области устойчивости системы (1), если $\chi_3 < 0$ ($\chi_3 > 0$).

Случай 2^0. Рассмотрим теперь случай, когда для системы (1) выполнено условие 2^0. Другими словами, пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$.

Условие 2^0 следует разделять на два случая:

2.1^0. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$ и

$$\frac{T\omega_0}{2\pi} \neq \frac{k}{2}, \ k - \text{натуральное число;} \qquad (3)$$

2.2^0. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi k}{T}$ при некотором натуральном k.

Случай 2.1^0 будем называть нерезонансным, а случай 2.2^0 – резонансным. Здесь ограничимся рассмотрением только нерезонансного случая.

Пусть выполнено условие 2.1^0. В этом случае существуют ненулевые векторы $e, \ g, e^*, g^* \in R^2$ такие, что выполняются равенства:

$$A_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig), \quad A_0^*(e^* + ig^*) = -i\omega_0(e^* + ig^*).$$

Эти векторы можно считать нормированными равенствами:

$$\|e\| = \|g\| = 1, \ (e, e^*) = (g, g^*) = 1, \qquad (e, g^*) = (g, e^*) = 0.$$

Положим

$$\eta_1 = \int_0^T [(A_1(t)e, e^*) + (A_1(t)g, g^*)]dt, \quad \eta_2 = \int_0^T [(B_1(t)e, e^*) + (B_1(t)g, g^*)]dt. \qquad (4)$$

Теорема 4. Пусть выполнены условие 2.1^0 и соотношение $\eta_1^2 + \eta_2^2 \neq 0$. Тогда через точку (α_0, β_0) плоскости (α, β) проходит единственная гладкая кривая γ_0, являющаяся границей областей устойчивости G_s и неустойчивости G_n точки равновесия $x = 0$ системы (1).

С целью исследования возможных сценариев бифуркаций в системе (1) в условиях теоремы 4 будем предполагать, что наряду с соотношением (3) собственные значения $\pm i\omega_0$ матрицы A_0 удовлетворяют также соотношениям:

$$\frac{T\omega_0}{2\pi} \neq \frac{k}{3}, \ \frac{k}{4}, \ k - \text{натуральное число.} \qquad (5)$$

Наряду с (4) определим числа:

$$\vartheta_1 = \int_0^T [(A_1(t)e, g^*) + (A_1(t)g, e^*)]dt,$$

$$\vartheta_2 = \int_0^T [(B_1(t)e, g^*) + (B_1(t)g, e^*)]dt.$$

Далее в этом пункте для простоты будем считать, что матрица A_0 имеет вид: $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix}$ и нелинейность $a_2(x,t,\alpha,\beta) \equiv 0$. Общий случай может быть рассмотрен по той же схеме, но приводит к более громоздким формулам.

Положим:

$$\varkappa_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(v_2, h(t)\right)dt, \qquad (10)$$

где $v_2(e,\alpha_0,\beta_0) = e^{A_0T}\int_0^T e^{-A_0\tau}a_2\left[\begin{bmatrix}\cos\omega_0\tau \\ \sin\omega_0\tau\end{bmatrix}, \tau, \alpha_0, \beta_0\right]dt,$

$h(t) = \begin{bmatrix}\cos(t + T\,\omega_0) \\ \sin(t + T\omega_0)\end{bmatrix}.$

Теорема 5. Пусть в условиях теоремы 4 выполнены соотношения (5). Пусть также выполнены условия:

$$\varkappa_0 \neq 0, \quad det\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2\end{bmatrix} \neq 0.$$

Тогда при трансверсальном переходе параметров (α,β) через граничную кривую γ_0 вблизи точки (α_0,β_0) в системе (1) реализуется сценарий бифуркации Андронова-Хопфа. При этом граничная кривая γ_0 является безопасной (опасной) границей области устойчивости системы (1), если $\varkappa_0 < 0$ ($\varkappa_0 > 0$).

Библиографический список

1. Красносельский М.А., Юмагулов М.Г. Метод функционализации параметра в проблеме собственных значений // ДАН России. – 1999. – Т. 365. – № 2. – С. 162–164.

2. Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

3. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1964. – 477 с.

4. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. – Москва-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2009. – 548 с.

5. Amaral F.M., Alberto L.F. C. Stability Boundary Characterization of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems in the Presence of a Saddle Node Equilibrium Point // Tend. Mat. Apl. Comput. – 2012. –V. 13. – № 2. – P. 143–154.

6. Chiang H.D., Alberto L.F. Stability regions of nonlinear dynamical systems: theory, estimation, and applications. Cambridge University Press. – 2015. – 484 p.

Сведения об авторах

Юмагулов Марат Гаязович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений БашГУ, e-mail: yum_mg@mail.ru.

Ибрагимова Лилия Сунагатовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры математики БГАУ. E-mail: lilibr@mail.ru.

Мустафина Ильмира Жаватовна, аспирант БашГУ. E-mail:fanina84@bk.ru.

УДК 535.4; 548

Ягафарова З.А., Биккулова Н.Н., Курбангулов А.Р.

МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ И УТОЧНЕНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ХАЛЬКОГЕНИДОВ МЕДИ НА ОСНОВЕ РЕНТГЕНОСТРУКТУРНОГО АНАЛИЗА

Рассматриваемый в работе метод основан на рентгеноструктурном дифракционном анализе кристаллической структуры по порошковым данным. Для обработки дифрактограмм была использована программа Fullprof, основанная на уточнении структуры вещества методом Ритвельда.

Ключевые слова: моделирование кристаллической структуры, рентгеноструктурный анализ, метод Ритвельда, профильный анализ.

Yagafarova Z.A., Bickulova N.N., Kurbangulov A.R.

METHOD OF SIMULATION AND CALCULATION OF CRYSTAL STRUCTURE OF COPPER CHALKOGENIDES BASED ON X-RAY ANALYSIS

The method considered in this work is based on X-ray diffraction analysis of the crystal structure from powder data.For the processing diffraction patterns was used Fullprof program based on the clarification of the structure of matter by the Rietveld method.

Keywords: modeling of crystal structure, X-ray analysis, Rietveld method, profile analysis.

Исследование посвящено проблеме создания компьютерной модели кристаллической структуры халькогенидов меди нестехиометрического состава. Данные соединения относятся к классу суперион-

© Ягафарова З.А., Биккулова Н.Н., Курбангулов А.Р., 2017

ных проводников и представляют интерес в связи с большим разнообразием физико-химических свойств, поэтому получение точной информации о структуре соединений является актуальной задачей [1]. В задачах структурного анализа обычно используется кинематическая теория рассеяния рентгеновских лучей [3]. При работе с суперионными проводниками эта модель рассеяния позволяет добиться точности совпадения рассчитанных по модели и экспериментальных значений в пределах 5–10 %.

Первый этап метода моделирования – рентгеноструктурный порошковый анализ. Он состоит в снятии дифрактограмм исследуемых образцов и проведении фазового анализа. После получения экспериментального дифракционного спектра исследуемых образцов и установления их фазового состава, следует этап расчета и уточнения кристаллической структуры соединения.

Метод Ритвельда – математический метод, реализующийся на основе метода наименьших квадратов и алгоритма Монте-Карло. Суть метода состоит в расчете дифракционного спектра по заданной модели структуры и заданной форме профилей дифракционных линий [4]. Параметры модели уточняются путем сопоставления интенсивностей непосредственно в каждой *i*-той точке 2Θ–пространства дифрактограммы, которое осуществляется варьированием структурных параметров модели методом наименьших квадратов. Дифрагированные интенсивности каждого рефлекса i_{hkl} получаются путем интегрирования дифракционного профиля рефлекса. Интегрирование является простым в случае, когда рефлексы не накладываются друг на друга. В противном случае интегрированные интенсивности могут быть получены путем тщательного уточнения профиля рефлекса. Выражение дифрагированной интенсивности зависит от геометрии съёмки (чаще всего используется схема Брэгга-Брентано).

Интегральная интенсивность рефлекса I_{HKL}, полученного от плоскостей с индексами (*hkl*) в *n*–ом порядке отражения, причем $H = nh$, $K = nk$, $L = nl$, определяется выражением:

$$I_{HKL} = C \cdot L(\theta) \cdot |F_{HKL}|^2 \cdot P_{HKL} \cdot e^{-2M} \cdot A(\theta), \quad (1)$$

где *C* – общий для всех линий дифрактограммы множитель, зависящий от длины волны излучения; $L(\theta)$ – фактор Лоренца, P_{HKL}– поляризационный фактор, $|F_{HKL}|^2$ – структурный фактор, $A(\theta\theta)$ –

фактор поглощения, зависящий от исследуемого вещества, длины волны излучения и метода съемки.

После выбора формальных критериев качества модели и варьируемых параметров модели, проблема уточнения представляет собой задачу минимизации функции большого числа переменных. Параметры модели уточняются путем сопоставления интенсивностей непосредственно в каждой точке пространства дифрактограммы. Следует отметить, что минимизируемая функция имеет большое число почти равноценных минимумов, и в силу экспериментальных ошибок и несовершенства кинематической теории правильному решению может отвечать не самый глубокий минимум. Поэтому ставится задача локальной минимизации выбранных функционалов.

В данной работе приводятся результаты расчета и уточнения структуры суперионного проводника нестехиометрического состава $Cu_{1.85}Te$ методом полнопрофильного анализа (программный пакет «FullProf Suite»). Экспериментальная, рассчитанная и разностная кривые приводятся на рис. 1.

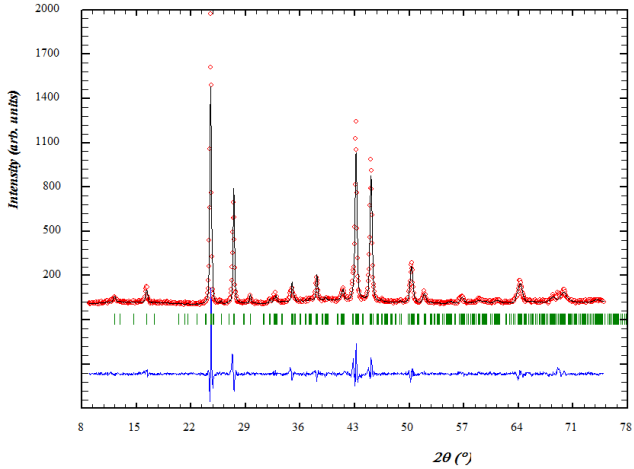


Рис.1. Экспериментальная, рассчитанная рентгенограммы и разностная кривая для состава $Cu_{1.85}Te$

Расчет структуры данного состава производился на основе литературных данных [2]. Рентгенограммы фазы индицировались в гексагональной сингонии с пространственной группой P3m1 и параметра-

ми кристаллической решетки a=b=8.3834 Å, c=21.7388 Å, α=β=90^0, γ=120^0. После расчета по имеющейся модели, соответствующие ей модули структурных факторов F_{CAL} сравниваются с экспериментально измеренными величинами F_{EXP} и по степени их соответствия оценивается качество выбранной модели. Формальные критерии соответствия могут быть выбраны по формулам числовых значений факторов расходимости: профильный, весовой профильный, ожидаемый и Брэгговский.

В табл. 1 приводятся координаты атомов и их заселенности для нестехиометрического состава $Cu_{1.85}Te$, рассчитанные с помощью программы Fullprof Suite.

Таблица 1.

Координаты атомов состава $Cu_{1.85}Te$

Атом	X	Y	Z	Occ
Cu1	0.16487	0.83513	0.50886	0.50000
Cu2	0.17445	0.82555	0.83704	0.51945
Cu3	0.16839	0.83161	0.27853	0.32296
Cu4	0.17229	0.82771	0.70854	0.48787
Cu5	0.16610	0.83390	0.04119	0.44316
Cu6	0.50063	0.49937	0.54885	0.56201
Cu7	0.57284	0.42716	0.81030	0.27368
Cu8	0.50664	0.49336	0.00094	0.48223
Cu9	0.53027	0.46973	0.44404	0.47487
Cu10	0.81343	0.18657	0.69683	0.53167
Cu11	0.83610	0.16390	0.02479	0.22811
Cu12	0.84111	0.15889	0.35778	0.48920
Cu13	0.66667	0.33333	0.05529	0.21557
Cu14	0.66667	0.33333	0.51340	0.21654
Cu15	0.66667	0.33333	0.71512	0.20437
Cu16	0.66667	0.33333	0.83929	0.22424
Cu17	0.33333	0.66667	0.13977	0.12593
Cu18	0.33333	0.66667	0.46117	0.12863
Cu19	0.33333	0.66667	0.82049	0.04785
Cu20	0.00000	0.00000	-0.00461	0.23094
Cu21	0.00000	0.00000	0.10850	0.06854
Cu22	0.00000	0.00000	0.46654	0.24726
Cu23	0.00000	0.00000	0.54384	0.16864
Cu24	0.00000	0.00000	0.78336	0.12871

Te1	0.15519	0.84481	0.15953	0.39000
Te2	0.17563	0.82437	0.38424	0.40500
Te3	0.50677	0.49323	0.21033	0.54000
Te4	0.50305	0.49695	0.89720	0.47000
Te5	0.50005	0.49996	0.32974	0.46500
Te6	0.48710	0.51290	0.66583	0.44500
Te7	0.66667	0.33333	0.16954	0.16000
Te8	0.66667	0.33333	0.39668	0.12500
Te9	0.00000	0.00000	0.21100	0.16833
Te10	0.00000	0.00000	0.32844	0.12000
Te11	0.00000	0.00000	0.64908	0.15500
Te12	0.00000	0.00000	0.88562	0.16667

Полнопрофильный анализ, позволяющий определить и уточнить атомно-кристаллическую структуру поликристаллических материалов, играет большую роль в установлении фундаментальных связей между составом, строением, характеристиками свойств и условиями получения соединений.

Библиографический список

1. Биккулова Н.Н., Ягафарова З.А., Курбангулов А.Р. Фазовые переходы в нестехиометрическом соединении $Cu_{2-\delta}Te$ // Вестник Башкирского университета. – Т. 1. – 2013. – № 4. – С. 995–998.

2. Baranova R.V., Avilov A.S., Pinsker Z.G. Determination of the crystal structure of the hexagonal phase beta in the copper-tellurium system by electron diffraction Locality: synthetic Soviet Physics Crystallography. – 1974. – v. 18. – p. 736–740.

3. Порай-Кошиц М.А. Основы структурного анализа химических соединений. – М.: Высшая школа, 1982. – 175 с.

4. Rietveld H.M. J. Appl. Cryst. – 1969.– v. 2.– p. 69.

Сведения об авторах

Ягафарова Зульфия Абдулхаевна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: Zulfiya_Abdul@mail.ru.

Биккулова Нурия Нагимьяновна, доктор физико-математических наук, профессор Стерлитамакского филиала БашГУ.

Курбангулов Азат Рифкатович, аспирант Стерлитамакского филиала БашГУ.

УДК 538.93

Якшибаев Р.А., Биккулова Н.Н.,
Акманова Г.Р., Биккулова А.В.

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРА ТЕРМИЧЕСКОГО РАЗУПОРЯДОЧЕНИЯ В ДВУМЕРНОМ СУПЕРИОННОМ ПРОВОДНИКЕ $CuCrS_2$

Представлены результаты исследования термического разупорядочения ионов меди в соединении $CuCrS_2$. Произведены расчеты интенсивностей в зависимости от степени заселения различных позиций ионами меди. Теоретически полученные интенсивности были сравнены с экспериментальными интенсивностями.

Ключевые слова: суперионные проводники, элементарная ячейка, интенсивности дифракционных линий, фазовый переход.

Yakshibaev R.A., Bickulova N.N., Akmanova G.R., Bickulova A.V.

STUDY OF NATURE OF THERMAL DISORDERING IN TWO-DIMENTIONAL SUPERIONIC CONDUCTOR $CuCrS_2$

Results of study of thermal disordering of copper ions in CuCrS2 are presented. Calculations of the intensity depending on the degree of settlement of copper ions with different positions are made. Theoretically calculated intensity values were compared with experimental results.

Key words: superionic conductors, elementary cell, intensity of the diffraction lines, phase transition.

Двумерный суперионный проводник $CuCrS_2$ относится к классу слоистых соединений $MCrX_2$ (M=Cu, Ag; X=S, Se). Особенностью таких соединений является их слоистая структура, образованная тройными слоями CrS_2, между которыми могут внедряться атомы меди и серебра. Структура соединений $MCrX_2$ принадлежит к пространственной группе R3m [2-4]. В гексагональном представлении элементарной ячейки все атомы занимают 3 (a) положения:

0 0 z
2/3 1/3 1/3+z
1/3 2/3 2/3+z

На рис. 1 представлена элементарная ячейка соединений $MCrX_2$ в гексагональном и ромбоэдрическом представлениях.

© Якшибаев Р.А., Биккулова Н.Н., Акманова Г.Р., Биккулова А.В., 2017

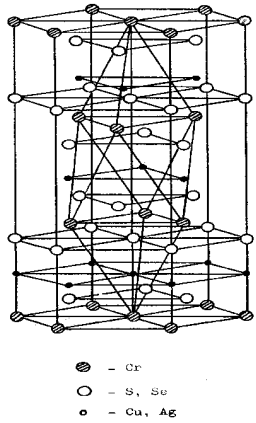


Рис. 1. Элементарная ячейка соединений $MCrX_2$ при комнатной температуре в гексагональном и ромбоэдрическом представлении

Как видно из рисунка, элементарная ячейка в гексагональном представлении содержит три формальные единицы, а в ромбоэдрическом - лишь одну. Тетраэдрические позиции образуют псевдодвумерную ячейку, состоящую из двух подрешеток α и β на рис. 2.

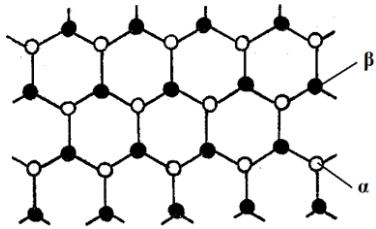


Рис. 2. Ячеистая подрешетка ионов меди (серебра)

При низких температурах ионами меди занята лишь одна из подрешеток. С увеличением температуры происходит перераспределение ионов меди по обеим подрешеткам α и β, которое приводит к фазовому переходу. Методами рентгенографии и при исследовании теплоемкости [3] была определена температура фазового перехода для двумерного суперионного проводника $CuCrS_2$ – 676К. Выше температуры фазового перехода ионы Cu^+ статистически распределены по всем тетрапустотам, вероятность заполнения ионами меди подрешеток α и β одинакова и равна 0,5.

Нами проводились подробные исследования динамики температурного разупорядочения ионов меди в $CuCrS_2$. Известно, что данное соединение при температуре 676 К испытывает фазовый переход второго рода. Характер термического разупорядочения ионов меди был изучен на основе анализа температурной зависимости интенсивности дифракционных пиков (104) и (015). Поскольку плоскость (015) содержит ионы меди, а плоскость (104) не содержит их, то перераспределение ионов меди должно приводить к разному характеру изменения интенсивностей данных дифракционных пиков.

На рис. 3 представлена зависимость I_{104} и I_{015} от температуры для соединения $CuCrS_2$. Поскольку плоскость (015) содержит ионы меди, а плоскость (104) не содержит их, то перераспределение ионов меди должно приводить к разному характеру изменения интенсивностей данных дифракционных пиков. Действительно, при повышении температуры интенсивность линии (015) постепенно уменьшается и сливается с фоном при температуре 698 К, а относительная интенсивность линии (104) возрастает.

Были рассчитаны интенсивности дифракционных линий (104) и (015) по выше представленным формулам при вариации степени заполнения α-подрешетки ионами меди (табл. 1). Сравнение показало, что при комнатной температуре α-подрешетка заполнена с вероятностью 0,95. Состояние полного разупорядочения, когда подрешетки α и β заполнены равновероятно, соответствует температуре выше 673К [1].

Таблица 1.

Экспериментальные и рассчитанные относительные интенсивности в зависимости от степени заполнения α-позиций

Т, К	$\left(\frac{I_{015}}{I_{104}}\right)_{эксп}$	$\left(\frac{I_{015}}{I_{104}}\right)_{расч}$	P_α
-	-	0.87	1
293	0.67	0.70	0.95
473	0.60	0.59	0.90
523	0.48	0.47	0.85
598	0.41	0.30	0.75
623	0.40	0.23	0.70
648	0.30	0.18	0.65
673	0.17	0.15	0.60
698	0.12	0.11	0.50

Таким образом, из расчетов теоретических дифракционных линий и их сравнением с экспериментальными данными, следует вывод, что в точке фазового перехода происходит полное разупорядочение подрешетки ионов меди.

Библиографический список

1. Акманова Г.Р., Биккулова Н.Н., Давлетшина А.Д. // Электрохимия. – 2013. – Т. 49. – № 8. – С. 921–926.

2. Антропов В.М., Плещев В.Г., Конев В.Н., Кискин С.М. // Физика твердого тела. – 1983. – Т. 25. – № 9. – С. 2767–2769.

3. Engelsman F.M.R., Wiegers G.A., Jellinek F., van Laar B. // J. Solid State Chem. – 1973. – V. 6, № 4. – PP. 574.

4. Yakshibaev R.A., Akmanova G.R., Almukhametov R.F., Konev W.N. // Phys.Stat.Sol(a). – 1991. – V. 24. – PP. 417.

Сведения об авторах

Якшибаев Роберт Асгатович, доктор физико-математических наук, директор физико-технического института БашГУ. E-mail: fti_bsu@mail.ru.

Биккулова Нурия Нагимьяновна, доктор физико-математических наук, профессор СФ БашГУ. E-mail: bickulova@mail.ru.

Акманова Гузель Рифкатовна, кандидат физико- математических наук, доцент физико-технического института БашГУ. E-mail: grakmanova@mail.ru.

Биккулова Алсу Валиулловна, магистрантка МГУ. E-mail: bickulova@mail.ru.

УДК 339.9

Ян Бо

О ПРИОРИТЕТАХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОТРУДНИЧЕСТВА ШОС В КОНТЕКСТЕ СОПРЯЖЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПОЯСА ШЕЛКОВОГО ПУТИ И ЕВРАЗИЙСКОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОЮЗА

В статье рассматриваются перспективные направления экономического сотрудничества ШОС с учетом договоренностей Уфимского и Ташкентского саммитов в условиях сопряжения ЭПШП и ЕАЭС.

Ключевые слова: экономическое сотрудничество, сопряжение, ЭПШП, ЕАЭС, ШОС.

YANG Bo

ON THE PRIORITIES OF ECONOMIC COOPERATION WITHIN THE SCO IN THE CONTEXT OF INTERACTION BETWEEN THE SILK ROAD ECONOMIC BELT AND EURASIAN ECONOMIC UNION

The article deals with perspective directions of economic cooperation within the SCO in terms of the analysis of the agreements of the Ufa and Tashkent summits in terms of interaction Chinese initiative SREB and the EEU.

Key words: Economic Cooperation, Interaction, Silk Road Economic Belt, EEU, SCO

Наиболее очевидным воплощением активизации усилий Китая по усилению своего присутствия в Евразии и регионе Центральной Азии является проект «Экономического пояса Шелкового пути» (ЭПШП). Он является одним из наиболее знаковых и новаторских проявлений современных тенденций экономической регионализации и глобализации. В случае своей реализации он коренным образом изменит геоэкономическую и геополитическую ситуацию в Евразии. Концепция этого мега-проекта вызвала споры и дискуссии в научном и экспертном сообществе стран Евразии.

ЭПШП – комплексный мега-проект нового типа. Рамки экономического пояса Шелкового пути не ограничиваются только Центральной Азией, благодаря Шелковому пути связываются Тихоокеанское кольцо и европейское экономическое кольцо, охватывается вся Евразия. Путем повышения открытости внешнему миру КНР надеет-

© Ян Бо, 2017

ся углубить торговые связи и экономическое сотрудничество между центральными и западными районами страны и Центральной, Южной и Западной Азией, вместе с тем, дать толчок экономическому взаимодействию в Евразии, осуществить перераспределение региональных ресурсов в энергетике, продуктах минерального происхождения, туризме, культуре, промышленности и сельском хозяйстве, реализовать рациональное распределение, взаимное дополнение, общее процветание в производстве региональных стран.

Экономический пояс Шелкового пути будет построен на базе новой модели сотрудничества. ЭПШП не предполагает создания региональной организации экономической интеграции, не преследует цели строительства единого режима, не собирается нарушать имеющуюся региональную систему. Благодаря углублению связей между политическими установками, а также укреплению дорожного сообщения, торговых сношений, денежного обращения, взаимного познавания устремлений народов[6, 391–392], постепенно сформируется цельная региональная структура сотрудничества, которая сделает более тесными и удобными связи между странами Евразии.

Несмотря на то, что концепцию экономического пояса Шелкового пути выдвинул Китай, она не станет геоэкономическим планом во главе с КНР, это процесс многостороннего, открытого, регионального сотрудничества, государства будут связывать единые интересы и обоюдный выигрыш [2].

Важно понимать, что китайский проект не является альтернативой ЕАЭС, и что процесс его реализации является многовариантным. Участие одновременно в нескольких региональных экономических проектах стало популярной практикой стран Евразии, в том числе центральноазиатских. Некоторые страны этого региона могут стать участниками сразу трех региональных проектов во главе с Китаем, Россией и США. Успехи или провал ЕАЭС не имеют отношения к ЭПШП, а зависят от отношений России с соответствующими странами. Думаю, что по мере углубления двусторонних экономических отношений Китай и Россия вместе вольются в процесс развития региональной экономической кооперации. Если не выйдет, им придется продвигать свои идеи по отдельности» [5].

Поскольку стимулирование взаимной торговли и инвестиций, а также упрощение торговых процедур является одним из важнейших аспектов формирования ЭПШП, вопрос о либерализации торгового режима между Китаем, заинтересованном в расширении внешних

рынков, и ЕАЭС, нуждается в отдельном рассмотрении и тщательной проработке.

Необходимо учитывать, что Договор о Евразийском экономическом союзе предусматривает создание «режима свободной торговли товарами в понимании ГАТТ 1994 в торговле с третьей стороной на основании международного договора Союза с такой третьей стороной с учетом положений статьи 102 настоящего Договора. Международный договор Союза с третьей стороной, устанавливающий режим свободной торговли, может включать иные положения, связанные с внешнеторговой деятельностью» [1].

Нельзя не согласиться с авторами аналитического доклада Международного дискуссионного клуба «Валдай» в том, что «В процессе неизбежного и желательного для региона экономического продвижения Китая в Центральную Азию ЕАЭС становится эффективным инструментом торговой защиты национального рынка при сохранении его инвестиционной привлекательности. Связка ЕАЭС–ЭПШП с высокой степенью вероятности станет стимулом к расширению и укреплению Союза, поскольку будет усиливать позиции стран-членов визави даже самых мощных внешних партнеров» [3].

Как отмечено в Стратегии развития ШОС до 2025 г., экономическое сотрудничество является важным элементом обеспечения стабильности на пространстве ШОС, одним из инструментов достижения устойчивости самой Организации на длительную перспективу. ШОС будет способствовать обеспечению гармоничного развития всех государств-членов в интересах сбалансированного экономического роста в регионе [9, 16].

В Уфимской декларации глав государств-членов ШОС также подтверждена необходимость принятия совместных мер в целях обеспечения устойчивого социально-экономического роста, интенсификации торгово-экономической и инвестиционной деятельности, развития сотрудничества в высокотехнологичных отраслях экономики, модернизации различных отраслей промышленности, совершенствования транспортно-логистической, информационно-коммуникационной и иной инфраструктуры, повышения экономической конкурентоспособности, уровня и качества жизни населения государств-членов ШОС [10, 9].

Именно поэтому в качестве одной из приоритетных целей развития организации Стратегия определяет углубление торгово-экономического и инвестиционного взаимодействия, а также совместной проектной деятельности на приоритетных направлениях со-

трудничества в целях устойчивого развития государств-членов, повышения благосостояния и уровня жизни их населения [9, 5–6].

Для достижения этой цели, отмечается в Стратегии, государства-члены ШОС сконцентрируют свои усилия на решении следующих задач:

- *создание в рамках ШОС благоприятных условий для устойчивого роста торгового и инвестиционного взаимодействия, разработки и реализации совместных инфраструктурных проектов, а также укрепления делового сотрудничества с участием Делового совета и Межбанковского объединения ШОС;*
- *формирование общих подходов государств-членов ШОС в отношении инициативы «Экономического пояса Шелкового пути» как одного из инструментов создания благоприятных условий для продвижения экономического сотрудничества на пространстве ШОС* [9, 6–7].

В Уфимской Декларации особо отмечено, что государства-члены продолжат работу над созданием Фонда развития (Специального счета) ШОС и Банка развития ШОС с целью стимулирования торговых и инвестиционных связей в регионе. Вопрос создания Фонда развития и Банка развития ШОС следует рассматривать в более широком контексте, связанном с развитием интеграционных процессов в Евразии и АТР. Не случайно Председатель КНР Си Цзиньпин в своем выступлении на заседании Совета глав государств-участников ШОС в Уфе отметил: «Необходимо более крупными шагами продвигаться в направлении облегчения и либерализации торговли и инвестиций. Китайская сторона готова укреплять сотрудничество со всеми странами, реализовывать приоритетные проекты комплексной взаимосвязи, согласованные на основе консенсуса, осуществлять финансовое сопровождение для технико-экономического обоснования и проектирования, участвовать в инвестиционно-кредитном сотрудничестве в ходе проектирования и строительства. Следует способствовать формированию в ближайшие годы схемы взаимосвязи региона» [8].

Такой подход в целом разделяется и российской стороной. Для России весьма важным является то обстоятельство, что она, в отличие от таких торгово-экономических «гигантов», как США и Китай, в настоящее время заинтересована не столько в развитии либерализации региональной торговли, сколько в усилении ее транспарентности и торгово-экономической взаимосвязанности, создания справедливой, устойчивой и сбалансированной торгово-экономической системы, отвечаю-

щей приоритетам и уровню развития российской экономики, особенно ее экспортно-ориентированных товаропроизводящих отраслей.

Поэтому Россия взяла курс на отстаивание приоритетов транспарентности и взаимосвязанности торгово-экономических отношений в Евразии и АТР, поскольку именно это помогает ей стать активным и заинтересованным участником обсуждения новых правил региональной торговли. Такой курс соответствует долгосрочным геополитическим интересам страны.

В Стратегии развития ШОС до 2025 г. отмечено, что будут приняты меры по реализации транзитного потенциала ШОС, формированию региональных транспортных и транзитных коридоров. Важным направлением совместной работы станет взаимодействие в области модернизации инфраструктуры и логистики, в том числе путем расширения на пространстве ШОС сети международных логистических центров и формирования сети индустриальных кластеров вдоль транспортных артерий [9, 18].

Усилению транспарентности и взаимосвязанности способствует и создание новых многосторонних финансовых институтов, включая Азиатский банк инфраструктурных инвестиций и Фонд развития Шелкового пути.

Создание АБИИ, который призван стать мощным финансовым инструментом развития инфраструктурных проектов в АТР и весомым дополнением к работе МВФ и Всемирного банка, объективно отвечает новым вызовам и отражает изменения в мировом экономическом порядке. Начиная с 2010 г. страны с развивающейся экономикой активно продвигали идею реформирования существующих международных финансовых институтов, которые контролируются странами Запада.

Не менее важно и подключение России и ЕАЭС к участию в реализации инициированного Китаем мегапроекта ЭПШП. 8 ноября 2014 г. Председатель КНР Си Цзиньпин объявил, что Китай выделит 40 млрд. долларов США для создания Фонда Шелкового пути в целях оказания финансовой поддержки проектам в рамках инициативы «Пояс и Путь». Фонд Шелкового пути был зарегистрирован 29 декабря 2014 года в Пекине и с этого дня начал официально действовать.

Фонд Шелкового пути является средне- и долгосрочным фондом развития и инвестиций, который предоставляет помощь странам и регионам, расположенным вдоль экономического пояса Шелкового пути и Морского шелкового пути 21-го века «Пояс и Путь»), в реали-

зации крупномасштабных проектов, обеспечивающих расширение транспортно-коммуникационных возможностей региона.

Таким образом, вопрос о создании Банка развития ШОС вписывается в общий контекст развития торгово-экономических отношений и интеграционных процессов в Евразии и АТР.

В ходе уфимского саммита стран ШОС заместитель министра иностранных дел КНР Чэн Гопин заявил, что банк развития Шанхайской организации сотрудничества будет являться дополнительным инструментом финансирования общих проектов к уже существующим финансовым межгосударственным институтам: «можно сказать, что этот новый банк ШОС, Азиатский банк инфраструктурных инвестиций и Новый банк развития БРИКС дополняют друг друга, стимулируют развитие, не противоречат друг другу» [4].

Президент Казахстана Нурсултан Назарбаев в своем выступлении на саммите в Уфе отметил потенциал формирования единой системы поддержки регионального сотрудничества, включая возможности синхронизации совместных мер по улучшению инвестиционно-финансового климата в рамках АБИИ, Евразийского банка развития и Банка развития БРИКС. Таким образом, участникам ЕАЭС, ШОС и резидентам проекта возрождения экономического пояса Шелкового пути, имеет смысл рассмотреть возможности соотношения наднациональных финансовых институтов в рамках единой системы инвестиционных инструментов.

Уфимская декларация ШОС содержит конкретную программу развития торгово-экономической составляющей деятельности организации. В ней говорится, что государства-члены намерены и далее развивать многостороннее взаимодействие в таких областях, как таможенное сотрудничество, транспорт, энергетика, промышленность, телекоммуникации, сельское хозяйство, наука и новые технологии, охрана окружающей среды, обеспечение санитарно-эпидемиологического благополучия населения, продолжать работу по подготовке Перечня мероприятий по дальнейшему развитию проектной деятельности в рамках ШОС на 2017–2021 гг. Они будут содействовать формированию благоприятных условий для торговли и инвестиций, поощрять внедрение инноваций и развитие сотрудничества между субъектами малого и среднего бизнеса.

Государства-члены активизируют работу по реализации совместных экономических, инфраструктурных и инвестиционных проектов с использованием потенциала Делового совета ШОС и Меж-

банковского объединения ШОС. Они отмечают целесообразность привлечения к проектной деятельности правительственных структур и деловых кругов государств-наблюдателей и партнеров по диалогу, а также задействования механизмов государственно-частного партнерства [10, 10].

Важной темой саммита ШОС в Ташкенте в июне 2016 г. в Ташкенте стало обсуждение вопросов торгово-экономического сотрудничества в контексте инициативы ЭПШП и предложенного Россией проекта ЕАЭС. В частности, главы государств ШОС подтвердили поддержку инициативы Китая о создании ЭПШП как одного из инструментов формирования благоприятных условий для развития регионального экономического сотрудничества, и заявили, что будут добиваться сопряжения национальных стратегий развития и усиливать координацию своих торгово-экономических программ.

Россия рассчитывает на то, что ШОС примет предложенный в декабре 2015 г. президентом В. Путиным проект евразийского континентального партнерства, основанного на сопряжении евразийской ЕАЭС и ЭПШП, с подключением к нему стран ШОС и АСЕАН. Российский проект евразийского партнерства получил поддержку Китая в ходе визита Владимира Путина в Пекин 25 мая 2016 г. В итоговом документе саммита говорится, что «Россия и Китай выступают за создание евразийского всеобъемлющего партнерства, основанного на принципах открытости, транспарентности и учета взаимных интересов, в том числе с возможным подключением стран – членов ЕАЭС, ШОС и АСЕАН» [7].

К важному результату саммита следует отнести подписание в его рамках «Меморандума о взаимопонимании между Министерством экономического развития Российской Федерации и Министерством коммерции Китайской Народной Республики о координации совместных усилий в рамках международных организаций и объединений», который отразил желание сторон ускорить практический процесс сопряжения ЕАЭС и ЭПШП, включая запуск переговоров по Соглашению о торгово-экономическом сотрудничестве между ЕАЭС и Китаем.

На переговорах в Пекине, завершившихся подписанием Меморандума, стороны договорились, помимо ведения переговоров по торгово-экономическим вопросам, до конца ноября 2016 г. (времени встречи глав правительств двух стран) обменяться списком проектов

создания «физической инфраструктуры», подлежащих реализации в рамках сопряжения ЭПШПи ЕАЭС.

В контексте отказа президента США Дональда Трампа от Транстихоокеанского партнерства(ТПП), выдвинутого своего предшественником Бараком Обамы, ожидания, связанные с усилением роли Китая в формировании нового глобального торгово-экономического института, явно увеличиваются. Россия, в свою очередь, рассматривает сопряжение двух мегапроектов как основу для формирования Большого евразийского партнерства с участием широкого круга стран, входящих в ЕАЭС, ШОС и АСЕАН. Можно ожидать, что эта тема получит свое продолжение в Пекине в рамках предстоящего Форум «Один Пояс и Один Путь» 14–15 мая 2017 г.

Статья публикуется как поэтапный результат проекта «Исследование сопряжения стратегий ЭПШП и ЕАЭС», полученного Институтом мировой экономики Университета Фудань грант гуманитарно-общественных наук Министерства образования Китая за 2015 г. № проекта утверждения 15JJD790006.

Библиографический список

1. Договор о Евразийском экономическом союзе, с. 34–35.
2. «Жэньминь жибао» онлайн, 15 мая 2014 г., http://russian.people.com.cn/95181/8628076.html
3. К Великому океану-3. Создание Центральной Евразии. Экономический пояс Шелкового пути и приоритеты совместного развития евразийских государств. – Аналитический доклад Международного Дискуссионного клуба «Валдай» (краткая версия). – 2015. – С. 11.
4. МИД КНР: Банк развития ШОС не противоречит стратегиям БРИКС и АИВ. http://ria.ru/economy/20150710/1125076200.html
5. Новый Шелковый путь: стратегические интересы России и Китая, http://russiancouncil.ru/inner/?id_4=2883
6. Си Цзиньпин о государственном управлении, Изд-во литературы на иностранных языках Китая, с. 391–392
7. Совместное заявление Российской Федерации и Китайской народной Республики, 25 июня 2016 г., http://www.kremlin.ru/supplement/5100
8. Стенограмма заседания Совета глав государств – участников Шанхайской организации сотрудничества в расширенном составе. 10 июля 2015 г., Уфа http://www.kremlin.ru/events/president/transcripts/49908
9. Стратегия развития Шанхайской организации сотрудничества до 2025 года.

http://static.kremlin.ru/media/events/files/ru/a3YPpGqLvQI4uaMX43lMkrMbFNewBneO.pdf

10. Уфимская декларация глав государств-членов Шанхайской организации сотрудничества.
http://static.kremlin.ru/media/events/files/ru/PyhhPKOjP2Lj5IJmFSa5CWIgaHxRxkA6.pdf

Сведения об авторах

Ян Бо, Кандидат филологических наук, профессор, заместитель директора Центр изучения России и Центральной Азии. E-mail: anja-yang@hotmail.com.

CONTENTS

Kakushkin S.N., Kadchenko S.I.
FINDING THE EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS OF PERTURBED SELF-ADJOINT OPERATORS ON A GEOMETRIC GRAPH 5

Kaliev I.A., Sabitova G.S.
THE SECOND BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF EQUATIONS OF NONEQUILIBRIUM SORPTION 9

Kildibaeva R.V., Karamova A.I.
METHODOLOGY OF CALCULATION OF COST OF PRODUCTION 12

Kozhevnikova L.M., Kamaletdinov A.SH.
EXISTENCE OF SOLUTIONS OF ANISOTROPIC ELLIPTIC EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY IN UNBOUNDED DOMAINS 18

Kondratyev D.V., Migranov N.G.
PERIODIC SMECTIC LAYER DISTORTIONS IN EXTERNAL ELECTRIC FIELDS 22

Kotova T.Yu., Chiganova N.V.
DESIGNING INFORMATION SYSTEM «IT VIDEOSERVISE» FOR IP ZHIGANOV A.E. 26

Kudashev I.N., Nafikova A.R.
DEVELOPMENT OF THE WEB APPLICATION «LESSON SCHEDULE» FOR AVERAGE COMPREHENSIVE SCHOOL 30

Krivosheeva O.A.
COMPLETION OF A COMPLEX SEQUENCE 35

Krivosheeva O.A.
A SOLUTION TO THE PROBLEM OF A FUNDAMENTAL PRICIPLE FOR AN INVARIANT SUBSPACES OF ANALYTICAL FUNCTIONS 39

Kul'terbayev K.P., Alokova M.H.
MATHEMATICAL MODELING OF KINEMATICALLY EXCITED FLATS OF VERTICAL ROD 43

Lebed D.V., Viktorov S.V.
COMPARATIVE REVIEW OF PROGRAM PROVIDING FOR ACCOUNTING 48

Makushev S.A., Viktorov S.V.
REALIZATION OF SENDING ELECTRONIC MESSAGES IN THE FORM OF EXTERNAL PROCESSING FOR THE 1S:PREDPRIYATE 8.3 PLATFORM 52

Malikova J.V.,Chiganova N.V.
IMPLEMENTATION OF THE PROGRAM INTERVAL OF THE OBJECTIVES FRACTIONAL FUNCTIONS 56

Matveev V.S.
USE OF DATABASE IN WINDOWS FORMS APPLICATION IN VISUAL STUDIO #SHARP 60

Martemyanova N.V.
NONLOCAL INVERSE PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH CHAPLYGIN'S OPERATOR 66

Migranova D.N., Ismagilova R.N., Migranov N.G., Kondratyev D.V.
MECHANISM OF CHEVRON FORMATION IN SURFACE STABILIZED FERROELECTRIC LIQUID CRYSTALS 69

Mikhaylov P.N.
PECULIARITIES OF THE ASYMPTOTIC METHOD IN CONJUGATION PROBLEMS ON THE BOUNDARY OF CHANGE OF THE GEOMETRY OF THE AREA 76

Mikhailova T.A., Mikhailov V.A.
APPLICATION OF CORRELATION AND REGRESSION ANALYSIS TO THE CONSTRUCTION OF DEPENDENCE OF MOONEY VISCOSITY FROM CHARACTERISTICS OF BUTADIENE-STYRENE RUBBER 82

Mukanov A.B.
FOURIER SERIES OF FUNCTIONS FROM LIPSCHITZ SPACES 87

Muraveva E.A., Solovev K.A., Grigoryev E.S.
CHLORINE EVAPORATOR-CONDENSER SIMULATION 90

Mullayanova A.F, Kuzina L.G., Berestova T.V., Gubaidullin I.M.
DETERMINATION OF THE NUMBER OF ABSORPTION PARTICLES IN SOLUTION..... 96

Mukhametshin A.I., Nafikov V.R., Nafikova A.R.
DEVELOPMENT AND AUTOMATION OF SYSTEM OF AN ESTIMATION OF ACTIVITY OF THE REGISTRARS OF THE MEDICAL CENTER OF LLC GIPPOKRAT 99

Nabiev I.M.
AN INVERSE PROBLEM FOR THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH A SPECTRAL PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITION 103

Naumov S.N., Boltachev E.F., Nafikova A.R.
AUTOMATED INFORMATION SYSTEM FOR FILLING OUT A STATISTICAL CARD..... 107

Nafikova A.R., Krizsky V.N., Paskalov D.I.
TO A RESEARCH OF PROCESSES OF TRANSFER OF RADON IN GEOLOGICAL MEDIA 110

Negodin M.I., Nafikov V.R., Nafikova A.R.
DEVELOPMENT OF THE WEBSITE OF THE SCIENTIFIC-PRACTICAL CONFERENCE..... 115

Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. *121*
INVESTIGATION OF THE THERMOVISCOUS LIQUID FLOWS IN A PLANE CHANNEL..... 121

Nikolaev V.G.
ON TWO BOUNDARY PROBLEMS FOR SCALAR FUNCTIONAL EQUATIONS 125

Ospanov K.N.
SEPARABILITY ESTIMATES FOR SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH UNBOUNDED DRIFT..... 129

Oshkhunov M.M., Dzhankulaeva M.A.
ABOUT MODIFICATION OF THE METHOD OF LOCAL VARIATIONS FOR OPTIMAL CONTROL COEFFICIENT OF THERMAL EXPANSION IN MULTILAYER CABLE INSULATION BY FINITE ELEMENTS METHOD 131

Panov E.Yu.
ON LONG TIME BEHAVIOR OF PERIODIC VISCOSITY SOLUTIONS TO HAMILTON-JACOBI EQUATIONS 135

Polovinkina Yu.S., Shcherbinin E.S.
THE PRINCIPLE OF OPERATION OF CONTROLLED SYSTEMS AC TRANSFER 139

Rakhimova A.I., Napalkov V.V.
PROPERTIES OF THE GENERALIZED DUNKL OPERATOR.....144

Sabitov K.B.
ON THE SIGNIFICANCE OF THE SOLUTION OF THE INHOMOGENEOUS POLYCALORIC EQUATION.....148

Sabitova Yu.K.
DIRIKHLE'S PROBLEM FOR THE LOADED EQUATION WITH THE OPERATOR LAVRENTYEVA-BITSADZE.....154

Sabitova Yu.K., Zaripova F.F.
THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF NONLOCAL PROBLEM FOR LOADED ELLIPTIC EQUATION.....159

Sabitova Yu.K., Nurgalieva Yu.F.
SOLUTION OF A NONLOCAL BOUNDARY TASK FOR LAPLACE EQUATIONS 164

Sadybekov M.A.
REGULAR DIFFERENTIAL OPERATOR WITH A PERTURBED BOUNDARY CONDITION 169

Sadigova S.R., Hasanli R.R., Cemil Karacam
ON A SPACE OF μ -STATISTICAL CONTINUOUS FUNCTIONS 174

Salmanov V.F., Mirzoyev V.S.
ON BASICITY OF DISCONTINUOUS PHASE EXPONENTIAL SYSTEM IN THE SPACE OF PIECEWISE DIFFERENTIABLE FUNCTIONS 179

SakhibgareevaM.V., GluschenkoE.I., Enikeeva L.V., Sharipova G.M.
ABOUT TRENDS IN DEVELOPMENT OF SCIENTIFIC PROGRAM INSTRUMENTS IN THE CENTURY OF HIGH-PERFORMANCE CALCULATIONS..... 183

Safina R.M.
THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE MIXED TYPE EQUATION WITH A SINGULAR COEFFICIENT 188

Safina K.R., Boltachev E.F., Nafikova A.R.
SOFTWARE DEVELOPMENT FOR ANALYSIS AND VISUALIZATION OF SOCIO-ECONOMIC FACTORS IN LAW ENFORCEMENT ACTIVITIES 193

Svyatkina S.A., Belyaeva M.B.
ALGORITHM APPLICATION WAVELETS FOR TIME SERIES FORECASTING 196

Sidorov S.N.
INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN INHOMOGENEOUS PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH DEGREE DEGENERACY..... 204

Simonova I.A., Khasanova S.L.
VIRTUAL LABORATORY IN CHEMISTRY «THE ACQUISITION, COLLECTION AND DETECTION OF GASES»..... 209

Smakova F.F, Tararukhina N.N.
TO THE QUESTION OF TRAINING IN THE SOLUTION OF TASKS FOR PERCENT AT SCHOOL 214

Smirnov P.S., Gizzatova E.R.
ON APPROXIMATION OF CONVERSION CURVES OF RADICAL POLYMERIZATION BY POLYNOMIAL FUNCTIONS 219

Soloschenko M.Y.
USE OF THE ELECTRONIC SPREADSHEETS MICROSOFT EXCEL IN CASE OF THE STUDY OF FUNCTIONS AND THEIR DIAGRAMS.....224

Soloschenko M.V., Karamova A.I.
IMPLEMENTATION OF DATA IMPORT FROM WEB-RESOURCES 229

Sultanov R.A.
SOFTWARE: FINDING OF THE MINIMUM PATH OF MOVEMENT OF THE CUTTER HEAD OF THE TOOL IN THE SWITCHED-OFF AND LIFTED STATUS ON INSERTS POINTS IN CUTTING OF SHEET MATERIAL 232

Sukacheva T.G.
APPLICATIONS TO MAGNETOHYDRODYNAMICS OF THE THEORY OF SEMI-LINEAR SOBOLEV TYPE EQUATIONS.....238

Sufyanova I.M.
THE MODEL «PREDATOR – VICTIM» FOR A SYSTEM OF TWO NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE HELP OF MATHEMATICAL PACKAGE MATLAB. 241

Sukhorukov A.V., Mikhailova T.A.
DEVELOPMENT OF A SOFTWAER TO SEARCH FOR THE SHORTEST WAY BY FLOYD METHOD.....246

Temirbekova L.N.
PARALLEL ALGORITHMS FOR FIND THE SOLUTION GELFAND-LEVITAN'S TWO-DIMENSION INTEGRAL EQUATIONS.....249

Temirbekova L.N., Tairova A.
NUMERICAL SOLUTION THE MATHEMATICAL MODELS OF BACTERIA POPULATION GROWTH.....252

Temirbekova L., Adil N., Sabit M.
NUMERICAL SOLUTION THE PROBLEM OF DETERMINING ROCK AGES MATHEMATICAL MODEL.....256

Temirbekova L., Tleuhasim S.
NUMERICAL SOLUTION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE COOLING SPEED THE BODY IN ENVIRONMENT 261

Tereshchenko K.A., Ulitin N.V., Stepanova V.A., Ganiev G.M., Kruglova A.E., Shiyan D.A.
MODELING OF THE BUTYL RUBBER SYNTHESIS PROCESS IN A TUBULAR TURBULENT REACTOR WITH A DIFFUSER-CONFUSER DESIGN 264

Titova A.A., Boltachev E.F., Nafikova A.R.
FORECASTING SOCIAL AND ECONOMIC STERLITAMAK PROVISIONS WITH USE MATHEMATICAL MODELS OF DATA ANALYSIS 269

Vildanov A.N., Tikhonov E.Yu.
ANDROID APPLICATION DEVELOPMENT FOR DATABASE MANAGEMENT ON THE WEB 272

Tukhvatullin E.R., Valiakhmetova Y.I.
DECOMPOSITION OF A MULTIPLY-CONNECTED ORTHOGONAL POLYGON INTO RECTANGULAR AREAS WHILE MINIMIZING LENGTH OF JOINTS 276

Ulitin N.V., Tereshchenko K.A., Ziganshina A.S., Shiyan D.A., Zakharov V.P.
MODELING OF THE TITANIUM CATALYTIC SYSTEM PARTICLES DISPERSION PROCESS IN TURBULENT FLOWS 282

Usmanova R.M., Aleshin P.N.
THE USE OF COMPUTER MATHEMATICS, IMPLEMENTED WITH THE HELP OF MODERN INFORMATION TECHNOLOGIES IN LEGAL EDUCATION 287

Utyashev I.M.
DETERMINATION OF THE BOUNDARY CONDITIONS OF THE STRINGS BY NATURAL FREQUENCIES OF OSCILLATIONS IN A MEDIUM WITH A VARIABLE ASYMMETRIC ELASTICITY 292

Fedorov Yu.I.
THE SUMMATION OF THE POTENTIALS OF CONJUGATE PAIRS OF HYPERBOLIC EQUATIONS.....299

Fedorov Yu.I.
THE POTENTIALS OF CONJUGATE PAIRS OF HYPERBOLIC EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS.....303

Feyzullayev Kh., Khalilov M.S., Kazymov B.K.
PARAMETRIC IDENTIFICATION OF RESERVOIR PROPERTIES OF RELAXATION-DEFORMABLE GAS RESERVOIR 307

Filippov A.I., Akhmetova O.V., Gubaydullin M.R.
CRITERION OF THE MODEL OF THE EQUIVALENT HOMOGENEOUS PLAST IN THE PROBLEM OF THE FIELD OF PRESSURE IN A LAYER-UNHEATELY ENVIRONMENT 312

Filippov A.I., Akhmetova O.V., Pilyukova E.N.
NONLINEAR PROBLEM OF THE TEMPERATURE FIELD IN OIL WELL.....316

Filippov A.I., Kovalskiy A.A., Akhmetova O.V.
FILTRATION WAVES IN AN INHOMOGENEOUS RESERVOIR UNDER HARMONIC PERTURBATIONS IN A WELL 320

Filippov A.I., Kirillov A.O., Isangildin R.F.
FIELD OF VELOCITY OF RUNNING CELLULAR FLOWS.....327

Filippov A.I., Mukhametzyanov E.V., Filippov I.K.
MATHEMATICAL MODEL OF ONE-DIMENSIONAL STATIONARY TRANSTSILLYATOR.....332

Filippov A.I., Shcheglova E.P.
MATHEMATICAL MODEL OF RADIAL DISTRIBUTIONS OF TEMPERATURE IN THE WELL 337

Khabirov A.A., Valiakhmetova Y.I.
PACKING OF TWO-DIMENSIONAL CONVEX POLYGONS INTO THE RECTANGULAR CONTAINER 343

Khaydarov.D.R., Latypov D.G.
MOLCHANOV'S COMPLEXITY AND HYPOTHESIS. THE SOLAR SYSTEM 347

Khakimov A.G., Yulmukhametov A.A.
DETERMINATION OF PRESSURE IN A PIPELINE AND COEFFICIENTS OF SUBGRADE REACTION AND APPARENT MASS OF BOTTOM SOIL USING NATURAL FREQUENCIES OF FLEXURAL VIBRATIONS 353

Khismatullin R.A.
DEVELOPMENT OF THE VIRTUAL TOUR.....358

Khusainova G.Ja., Kamagaeva A.V.
PLOSKORELEFNAJA FILTRATION OF AN INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC LIQUID 360

Khusainov I.G.
OSCILLATORY MOVEMENT BUBBLE UNDER ACTION OF AN ACOUSTIC FIELD 363

Khusainov I.G.
MATHEMATICAL MODELLING OF PROTECTION OF OBJECTS FROM NOISE.....367

Khusnutdinova E.N., Mikhailova T.A.
SOLVING THE PROBLEM OF FORMING THE SCHEDULE BASED ON THE METHOD OF BRANCHES AND BOUNDARIES 372

Chernov I.G., Mustafina S.A.
COMPUTER IMPLEMENTATION OF INTERVALS ALGORITHMS FOR SOLVING APPLIED PROBLEMS.....377

Zhang Jianrong
HISTORICAL MISSION: FROM THE CHINESE-EASTERN RAILWAY TO THE ECONOMIC ZONE OF SILK ROAD 380

Shagiev V.R., Akhtyamov A.M.
NATURAL FREQUENCIES OF VIBRATIONS OF PIPELINE WITH FLOW LIQUID 385

Shaimukhametov D.R. Shaimukhametova D.V., Mustafina S.A.
STATEMENT OF THE PROBLEM OF OPTIMIZATION OF CHEMICAL-TECHNOLOGICAL PROCESSES 388

Shamsutdiniva G.R., Viktorov S.V.
MATHEMATICAL MODEL SEARCH DEFORMABLE EXTENDED CYLINDRICAL OBJECTS IN A LAYERED ENVIRONMENT 391

Shangareeva G.R., Mustafina S.A.
ON A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS 400

Shiyan D.A., Ulitin N.V., Tereshchenko K.A., Takhautdinova A.V., Friesen A.K., Kolesov S.V.
IDENTIFICATION OF THE MECHANISM OF STYRENE POLYMERIZATION INITIATED BY RADICAL INITIATOR, THERMAL OR UV RADIATION IN THE PRESENCE OF FERROCEN BY METHODS OF QUANTUM CHEMISTRY AND KINETIC MODELING 404

Yumagulov M.G., Ibragimova L.S., Mustafina I.Zh.
APPROXIMATE FORMULAS IN THE PROBLEM OF SAFE AND DANGEROUS BORDERS OF THE AREAS OF DYNAMIC SYSTEM RESISTANCE 408

Yagafarova Z.A., Bickulova N.N., Kurbangulov A.R.
METHOD OF SIMULATION AND CALCULATION OF CRYSTAL STRUCTURE OF COPPER CHALKOGENIDES BASED ON X-RAY ANALYSIS 413

Yakshibaev R.A., Bickulova N.N., Akmanova G.R., Bickulova A.V.
STUDY OF NATURE OF THERMAL DISORDERING IN TWO-DIMENTIONAL SUPERIONIC CONDUCTOR $CuCrS_2$ 418

YANG Bo
ON THE PRIORITIES OF ECONOMIC COOPERATION WITHIN THE SCO IN THE CONTEXT OF INTERACTION BETWEEN THE SILK ROAD ECONOMIC BELT AND EURASIAN ECONOMIC UNION 422

Научное издание

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы
Международной научно-практической конференции

Часть II

18–20 мая 2017 г.
г. Уфа

Ответственный редактор – доктор физико-математических наук, профессор **Светлана Анатольевна Мустафина** (Стерлитамакский филиал БашГУ)

Начальник ИИЦ *О.А. Шарипова*
Компьютерная верстка *И.В. Григорьев, С.В. Викторов, Н.С. Усманова*

Печатается в авторской редакции.
Авторы, редакционная коллегия несут ответственность за достоверность материалов, изложенных в книге.

Подписано в набор 02.05.2017 г.
Подписано в свет 18.05.2017 г.
Бумага офсетная.
Печать оперативная.
Тираж 300 (1-й завод – 150) экз.
Заказ № 168/17.

Подписано в печать 12.05.2017 г.
Формат $60\times84_{1/16}$.
Гарнитура «Times».
Уч.-изд. л. 25,4.
Усл. печ. л. 25,6.

ISBN 978-5-86111-586-5

Информационно-издательский центр
Стерлитамакского филиала БашГУ:
453103, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49.