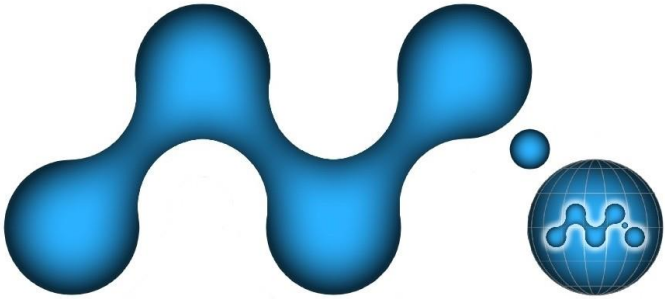
INTERNATIONAL SCIENTIFIC-PRACTICAL CONFERENCE

MODERN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS



18–20 May 2017
Ufa

Part 1

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF THE RUSSIAN FEDERATION

THE FEDERAL STATE BUDGETARY EDUCATIONAL ESTABLISHMENT OF HIGHER EDUCATION «BASHKIR STATE UNIVERSITY»

STERLITAMAK BRANCH
OF THE FEDERAL STATE BUDGETARY EDUCATIONAL ESTABLISHMENT OF HIGHER EDUCATION «BASHKIR STATE UNIVERSITY»

MODERN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

Papers of the International Scientific-Practical Conference

Part I

18-20 May 2017
Ufa

Ufa
2017

UDK 519.85
BBK 22.186
C 56

ISBN 978-5-86111-585-8

The conference was funded by RFBR according to the research project № 17-01-20035

Reviewers:

chair of mathematical modeling (Sterlitamak Branch of the Bashkir State University); professor E.A. Muraviova (Branch of the Ufa State Petrol Technical University in Sterlitamak); professor E.R. Gizzatova (Sterlitamak Branch of the Bashkir State University); chair of Natural Scientific and Professional Disciplines (Branch of the Ufa State Petrol Technical University in Sterlitamak)

Chief editor – professor **S.A. Mustafina** (Sterlitamak Branch of the Bashkir State University)

Editorial Board:

A.M. Akhtyamov, professor; M.B. Belyaeva, associate professor; S.V. Viktorov, associate professor; E.R. Gizzatova, professor; I.V. Grigoryev, assistant; L.M. Kozhevnikova, professor; T.A. Mikhailova, senior lecturer; A.R. Naphikova, associate professor; K.B. Sabitov, professor; Yu. K. Sabitova, associate professor; I.G. Husainov, professor; S.I. Spivak, professor

C 56 **MODERN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS**: Papers of the International Scientific-Practical Conference, 18-20 May 2017, Ufa.– Part I. / Chief Editor S.A. Mustafina. – Sterlitamak: Sterlitamak Branch of the Bashkir State University, 2017. – 416 p. – ISBN 978-5-86111-585-8

The collection of materials contains the papers of the participants of the International Scientific-Practical Conference «Modern Mathematics And Its Applications», 18-20 May 2017, Bashkir State University. The materials characterize a modern state and topical problems of mathematic and its applications.

The collection of papers is recommended for teachers, post-graduates, students of Natural Sciences, Physics and Mathematics.

ISBN 978-5-86111-585-8

© Collective of authors, 2017
© Bashkir State University, 2017
© Sterlitamak Branch of the Bashkir State University, 2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СТЕРЛИТАМАКСКИЙ ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы
Международной научно-практической конференции

Часть I

18-20 мая 2017 г.
г. Уфа

Уфа
2017

УДК 519.85
ББК 22.186
С 56

ISBN 978-5-86111-585-8

Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Проект № 17-01-20035

Рецензенты:
кафедра математического моделирования (Стерлитамакский филиал БашГУ); доктор технических наук, профессор Е.А. Муравьева (филиал Уфимского государственного нефтяного технического университета в г. Стерлитамаке); доктор физико-математических наук, профессор Э.Р. Гиззатова (Стерлитамакский филиал БашГУ); кафедра естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин (филиал Уфимского государственного авиационного технического университета в г. Стерлитамаке)

Ответственный редактор – доктор физико-математических наук, профессор **С.А. Мустафина** (Стерлитамакский филиал БашГУ)

Редакционная коллегия:
д.ф.-м.н., проф. А.М. Ахтямов; к.ф.-м.н., доц. М.Б. Беляева; к.ф.-м.н., доц. С.В. Викторов; д.ф.-м.н., проф. Э.Р. Гиззатова; асс. И.В. Григорьев; д.ф.-м.н., проф. Л.М. Кожевникова; к.ф.-м.н., ст. преп. Т.А. Михайлова; к.ф.-м.н., доц. А.Р. Нафикова; д.ф.-м.н., проф., чл.-корр. АН РБ К.Б. Сабитов; к.ф.-м.н., доц. Ю.К. Сабитова, д.ф.-м.н., проф. С.И. Спивак

С 56 **СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**: Материалы Междунар. науч.-практ. конф., 18-20 мая 2017 г., г. Уфа.– Часть I. / Отв. ред. С.А. Мустафина. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2017. – 416 с. – ISBN 978-5-86111-585-8

В сборнике публикуются труды участников Международной научно-практической конференции «Современная математика и ее приложения», состоявшейся 18-20 мая 2017 г. в Башкирском государственном университете. Представленные материалы характеризуют современное состояние и актуальные проблемы математики и ее приложений. Сборник адресован преподавателям, аспирантам и студентам, обучающимся на естественнонаучных и физико-математических направлениях.

ISBN 978-5-86111-585-8

© Коллектив авторов, 2017
© БашГУ, 2017
© Стерлитамакский филиал БашГУ, 2017

UDC 519.984+512.64

Akhtyamov A.M., Mouftakhov A.V.

IDENTIFICATION OF BOUNDARY CONDITION ON ONE OF THE ENDS OF A SEGMENT

We prove the duality of solution for the problem of identification of boundary condition on one of the ends of a segment.

Key words: nonseparated boundary conditions, spectral problem.

Consider the following two-point boundary value problem:

$$y^{(4)}(x) = \lambda y(x) = s^4 y(x), \qquad x \in [0,1], \tag{1}$$

$$U_j(y) = \sum_{k=1}^{4} a_{jk} y^{(k-1)}(0) = 0, \qquad j = 1,2, \tag{2}$$

$$U_3(y) = y(1) = 0, \qquad U_4(y) = y'(1) = 1. \tag{3}$$

The problem of determining a boundary condition (2) has been considered in this paper. Similar inverse problems were considered in [1]-[3].

We denote the matrix, consisting of the coeffcients a_{jk} of the forms $U_1(y)$ and $U_2(y)$ by A and its minors by A_{mn}:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{Vmatrix}, \quad A_{mn} = \begin{vmatrix} a_{1m} & a_{1n} \\ a_{2m} & a_{2n} \end{vmatrix}.$$

In addition to the boundary conditions (2), we consider also the boundary conditions

$$\tilde{U}_j(y) = \sum_{k=1}^{4} \tilde{a}_{jk} y^{(k-1)}(0) = 0, \qquad j = 1,2, \tag{4}$$

$$\tilde{U}_j(y) = \sum_{k=1}^{4} \tilde{b}_{jk} y^{(k-1)}(0) = 0, \qquad j = 1,2, \tag{5}$$

and boundary conditions

We denote the matrix of the boundary conditions (4) by $\tilde{A}$ and its minors by $\tilde{A}_{mn}$ and the matrix of the boundary conditions (5) by $\tilde{B}$ and its minors by $\tilde{B}_{mn}$.

Definition (adjacent boundary conditions). The boundary conditions (4) and (5) are adjacent, if there is a number $k \neq 0$ such that $\tilde{A}_{12} = k\tilde{B}_{12}$,

© Akhtyamov A.M., Mouftakhov A.V., 2017

$\widetilde{A}_{13} = k\widetilde{B}_{13}$, $\widetilde{A}_{24} = k\widetilde{B}_{24}$, $\widetilde{A}_{34} = k\widetilde{B}_{34}$, $\widetilde{A}_{14} = k\widetilde{B}_{23}$, $\widetilde{A}_{23} = k\widetilde{B}_{14}$.

Theorem (on the duality of the solution of the inverse problem).

If the eigenvalues of boundary value problems (1), (2), (3) and (1), (4), (3) are identical: $\lambda_k = \widetilde{\lambda}_k$, and $rank\, A = rank\, \widetilde{A} = 2$, then either the boundary conditions (2) are equivalent to the boundary conditions (4), or the boundary conditions (2) are equivalent to the adjacent boundary conditions (5). I.e. the matrices A and $\widetilde{A}$ are row equivalent or A and $\widetilde{B}$ are row equivalent.

References

1. Akhtyamov A.M. and Mouftakhov A.V. Identification of Boundary Conditions Using Natural Frequencies // Inverse Probl.Sci. Eng. – 2004. – Vol. 12, No. 4. – P. 393-408.

2. Akhtyamov A.M., Muftakhov A.V. and Yamilova L.S. Identification of the type and parameters of fastening from the natural frequencies of a fastened rod // Acoustical Physics. – 2008. – Vol. 54, No. 2. – P. 146-154.

3. Akhtyamov A.M., Muftakhov A.V., Teikher M. and Yamilova L.S. On a Method for Determining the Fixing Conditions for a Rectangular Plate from the Natural Frequencies // Mechanics of Solids. – 2007. Vol. 42, No. 1. – P. 85-96.

Author aredentials

Akhtyamov Azamat Mukhtarovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of BSU, Ufa, Russia. E-mail: akhtyamovam@mail.ru

Mouftakhov Artour Vilievich, Ph.D., Lecturer of Shamoon College of Engineering, Ashdod, Israel. E-mail: muftahov@yahoo.com

UDC 517.984

Akhtyamov A.M., Trooshin I.Yu.

IDENTIFICATION OF BOUNDARY CONDITIONS COEFFICIENTS FOR INFINITE STAR GRAPH

The work is devoted to the solution of the inverse spectral problem for Sturm-Lioville differential operators on the star graphs with three edges. Two of three edges are finite, and one edge is infinite. It is shown that

© Akhtyamov A.M., Trooshin I.Yu., 2017

two coefficients of boundary conditions for finite edges can be found by two eigenvalues.

Key words. Eigenvalues, star graph, inverse problems, Kirchhoff boundary conditions, Jost solution.

The main results on inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators on an interval are presented in the monographs [7], [8] and other works. Differential operators on graphs (networks, trees) often appear in natural sciences and engineering (see [4], [5], [6], [11], [12], [13] and the references therein). Most of the results in this direction are devoted to direct problems of studying properties of the spectrum and the root functions for operators on graphs. Inverse spectral problems, because of their nonlinearity, are more difficult to investigate, and nowadays there exists only a small number of papers in this area. In particular, inverse spectral problems of recovering the coefficients of differential operators on trees (i.e on graphs without cycles) were solved in [2], [3]. Inverse problems for Sturm-Liouville operators on graphs with a cycle were studied in [1], [9], [10], [14], [15], [16], [17].

Let $\Gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3$ be a star-shaped graph which consists of two finite rays $\gamma_j = \{x_j \in (0,1)\}, j = 1,2$ and one semi-infinite rays $\gamma_3 = R_+ = \{x_3 \in (0,\infty)\}$, with the origin of each ray identified with the single vertex of the graph . We consider on Γ the equation

$$Ly_j = -\frac{d^2 y_j}{dx_j^2} + q(x_j) y_j = s^2 y_j(x), \quad x_j \in \gamma_j \qquad 1)$$

defined for functions y_j satisfying the natural Kirchhoff boundary conditions on the vertex:

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0), \quad y_1'(0) + y_2'(0) + y_3'(0) = 0, \qquad 2)$$

and the boundary conditions

$$y_j'(1) + H_j y_j(1) = 0, \quad H_j = h_j - m_j s^2, \quad j = 1,2. \qquad (3)$$

Let $s_j(x,s), c_j(x,s)$, $j = 1,2,3$, be the solution of (1) which satisfies the initial condition $s_j(0,s) = 1 - c_j(0,s) = 0$, $1 - s_j'(0,s) = c_j'(0,s) = 0$ $(j = 1,2,3)$.

Let $e(x,s)$ be the Jost solution of (1) which satisfies the asymptotic condition $e(x,\lambda) \to e^{isx}$ ($x \in \gamma_3$, $x \to \infty$).

General solution on every interval can be represented as

$$y_j(x,s) = \alpha_j(s)c_j(x,s) + \beta_j(s)s_j(x,s), \quad j = 1,2,$$

$$y_3(x,s) = \Delta(s)s_3(x,s) + \sigma(s)e(x,s).$$

We look for a general solution of (1)-(4) for $\Im s \geq 0$. It has to satisfy the Kirchchoff condition (2): $\alpha_1(s) = \alpha_2(s) = \sigma(s)e(0,s)$.

We denote $\alpha(s) = \alpha_1(s) = \alpha_2(s)$ and suppose that $e(0,s) \neq 0$, i.e. $\alpha(s) \neq 0$ and $\sigma(s) = \dfrac{\alpha(s)}{e(0,s)}$.

The second Kirchhoff condition (2) requires $\beta_1(s) + \beta_2(s) + \Delta(s) + \sigma(s)e'(0,s) = 0$, i.e.

$$\beta_1(s) + \beta_2(s) + \Delta(s) + \alpha(s)\frac{e'(0,s)}{e(0,s)} = 0,$$

Boundary conditions on the ends of finite intervals (3) put the following conditions on $\alpha(s), \beta_1(s), \beta_2(s)$

$$\alpha(s)\left[c_j'(1,s) + H_j c_j(1,s)\right] + \beta_j(s)\left[s_j'(1,s) + H_j s_j(1,s)\right] = 0, \quad j = 1,2$$

As result

$$\beta_j(s) = -\alpha(s)\frac{c_j'(1,s) + H_j c_j(1,s)}{s_j'(1,s) + H_j s_j(1,s)}$$

It follows from this that

$$\Delta(s) = \alpha(s)\left[\frac{c_1'(1,s) + H_1 c_1(1,s)}{s_1'(1,s) + H_1 s_1(1,s)} + \frac{c_2'(1,s) + H_2 c_2(1,s)}{s_2'(1,s) + H_2 s_2(1,s)} - \frac{e'(0,s)}{e(0,s)}\right].$$

It follows from representation for $y_3(x,s)$, that all eigenvalues visible at in infinity have to be such that $\Im s > 0$, and $\Delta(s) = 0$.

If we know eigenvalues of problem (1)-(3) we can find boundary conditions (3). Let s_1^2 and s_2^2 be the eigenvalues of boundary value problem (1)–(3). Substituting these two values s_1 and s_2 in $\Delta(s) = 0$, we obtain system of two equations $\Delta(s_1) = 0, \Delta(s_2) = 0$ w.r.t unknowns m_1

and m_2. This system has two nonsymmetric solutions. Note, if we find h_1 and h_2, then we have two symmetric solutions (see [17]). So, our case finding m_1 and m_2 differs from [17].

Example. Let $s_1^2 = -1.7479^2$, $s_2^2 = -4.7467^2$ be the eigenvalues of boundary value problem (1)–(3) and $h_1 = -7$, $h_2 = -2$ be coefficients of boundary conditions (3). Then the system of two equations $\Delta(s_1) = 0, \Delta(s_2) = 0$ w.r.t unknowns m_1 and m_2 has two solutions: $m_1 = 0.01$, $m_2 = 0.07$ and $m_1 = 1.7040$, $m_2 = -0.1219$.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 15-01-01095 a), by the Academy of Sciences of the Republic of Bashkortostan (project 17-41-020230-r_bashkortostan_a).

References

1. Aksenova Z.F., Akhtyamov A.M. Acoustic diagnostic of concentrated mass at end of a string graph with elastic fastening at the ends // Vestnik Bashkirskogo uni-versiteta (Bulletin of Bashkir University), 2014. - T. 19, №1 – PP. 14-18 (Russian).

2. Belishev M.I. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method //Inverse Problems, 2004. – Vol. 20. – PP. 647-672.

3. Brown B.M., Weikard R. A Borg-Levinson theorem for trees, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2005. – Vol. 464, no. 2062. – PP. 3231-3243.

4. Faddeev M.D., Pavlov B.S. Model of free electrons and the scattering problem // Teor. Math. Fiz., 1983. – Vol. 55, no. 2. – PP. 257-269. (Russian); English transl. in Theor. Math. Phys. 1983. – Vol. 55, no. 2. – PP. 485-492.

5. Kottos T., Smilansky U., Quantum chaos on graphs // Phys. Rev. Lett., 1997. – Vol. 79. – PP. 4794-4797.

6. Langese J.E., Leugering G., Schmidt J.P. Modelling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures. Birkh¨auser, Boston, 1994.

7. Levitan B.M. Inverse Sturm-Liouville problems, Nauka, Moscow, 1984; English transl., VNU Sci.Press, Utrecht, 1987.

8. Marchenko V.A. Sturm-Liouville operators and their applications, Naukova Dumka, Kiev, 1977; English transl., Birkh¨auser, 1986.

9. Marchenko V.A., Mochizuki K. and Trooshin I, Inverse scattering on a graph containing circle.// Analytic methods of analysis and differential equations: AMADE 2006 (Cambridge: Camb. Sci. Publ), 2008. – PP. 237-243.

10. Mochizuki K., Trooshin I., On the scattering on a loop-shaped graph.//Evolution Equations of Hyperbolic and Schr"odinger Type, Progress in Mathematics, 2012.– Vol 301.– PP. 227-245.

11. Pokornyi Yu.V., Borovskikh A.V. Differential equations on networks (geometric graphs) // J. Math. Sci., 2004. – Vol.119, no. 6. – PP. 691-718.

12. Pokornyi Yu.V., Pryadiev V. The qualitative Sturm-Liouville theory on spatial networks // J. Math. Sci., 2004. – Vol.119, no. 6. – PP. 788-835.

13. Sobolev A., Solomyak M., Schr¨odinger operator on homogeneous metric trees: spectrum in gaps // Rev. Math. Phys., 2002. – Vol.14, no. 5. – PP. 421-467.

14. Yurko V.A. Inverse problems for Sturm-Liouville operators on graphs with a cycle // Operators and Matrices, 2008. – Vol.2, no. 4. – PP. 543-553.

15. Yurko V.A. Uniqueness of recovering differential operators on hedgehog-type graphs // Advances in Dynamical Systems and Applications, 2009. Vol. 4, no. 2. – PP. 231-241.

16. Yurko V.A. Inverse problems for Sturm-Liouville operators on bush-type graphs, Inverse Problems 25 (2009), no.10, 105008, 14 pp.

17. Akhtyamov A.M., Trooshin I.Yu. Boundary Inverse Problem for Infinite Star Graph // Materials of the Vth All-Russian Scientific-Practical Conference “Mathematical Modeling of Processes and Systems”, dedicated to Academician A.N. Tikhonov’s 110th anniversary. Part II. 17-19 November. Sterlitamak: BSU, 2016.

Information about authors

Akhtyamov Azamat Moukhtarovich, Doctor fiz.-mat. Sc., Professor of Math Modeling Department of Bashkir State university. E-mail: AkhtyamovAM@mail.ru

Trooshin Igor Yurievitch, PhD, Associate Professor, Global Learning Center Tohoku University (Japan), E-mail: trushin@m.tohoku.ac.jp

UDC 519.245:678.7

Ala V., Mamedov Kh. R.

ON BASIC PROPERTY OF EIGENFUNCTIONS OF ONE CLASS DISCONTINOUS STURM-LIOUVILLE OPERATOR

In this work, we study the completeness, the minimality and the basis properties of the eigenfunction system for a boundary value-problem.

For a different boundary value problem, the same results are investigated in [1] and asymptotic formulas are obtained in [2].

Key words: Discontinous Sturm-Liouville operator, basic property, spectral parameter in boundary conditions,transmission conditions,

We consider the discontinous Sturm-Liouville equation with boundary conditions depending eigenparameter and transmission conditions

$$ly := -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda\rho(x)y(x), \quad x \in [-1,0) \cup (0,1],$$

$$L_1(y) := y(-1)\cos\alpha + y'(-1)\sin\alpha = 0,$$

$$L_2(\lambda)y := \lambda(\tilde{\beta}_1 y(1) - \tilde{\beta}_2 y'(1)) + (\beta_1 y(1) - \beta_2 y'(1)) = 0,$$

$$L_3(y) := \gamma_1 y(-0) - \delta_1 y(+0) = 0,$$

$$L_4(y) := \gamma_2 y'(-0) - \delta_2 y'(+0) = 0,$$

where λ is a complex parameter, $q(x)$ is real-valued continous function on the intervals $[-1,0)$ and $(0,1]$ has finite limits, $\rho(x) > 0$ is a discontinuous weight function such that

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1^{\,2}, & x \in [-1,0) \\ \rho_2^{\,2}, & x \in (0,1] \end{cases}$$

and $\tilde{\beta}_i, \beta_i, \delta_i, \gamma_i, (i = 1,2)$ are real numbers.

For a different boundary value problem, the same results are investigated in [1] and asymptotic formulas are obtained in [2].

References

1. Mamedov Kh. R., “On a basic problem for a second order differential equation with a discontinuous coefficient and a spectral parameter in the boundary condition”, Geometry,Integrability and Quantization, Sofia, 218-225, 2005.

2. Akdoğan Z., Demirci M., Mukhtarov O. Sh., “Discontinuous Sturm–Liouville problems with eigenparameter-dependent boundary and

© Ala V., Mamedov Kh. R., 2017

transmissions conditions", Acta Applicandae Mathematica, 86(3), 329-344, May 2005.

Author aredentials

Volkan ALA, Research Assistant of Mersin University, Department of Mathematics, Turkey. E-mail: volkanala@mersin.edu.tr

Khanlar R. Mamedov, Professor of the Mersin University, Department of Mathematics, Turkey. E-mail: hanlar@mersin.edu.tr

UDC 519.245:678.7

Auken V.M.

UNIVERSITY PERFORMANCE MEASUREMENT IN QUALITY ASSURANCE

Based on the outcomes of the research on the holistic system for measuring the performance of teachers and students, the purpose of the current study is to integrate this system in a university's quality assurance system. Quality assurance using indicators defined by universities for assessing mainly cognitive skills of teachers and students like KPI and GPA is still about quality control. In addition to these indicators, the pro-posed system is rested upon new indicators like Intellectual Capital Indicator (ICI) for teachers and Employability Readiness Indicator (ERI) for students which are connected with the external environment for assessing non-cognitive skills as well.

Key words: higher education, quality assurance, performance measurement, competence development, employability readiness.

As for any enterprise, the competitiveness of a university depends on its efficiency. Universities function efficient if efforts of academic staff result in better employment of graduates. Productivity of teachers defines productivity of students and both affect efficiency of a university. Thus, to increase the efficiency of a higher education institution (HEI), there is a need to establish a close correlation between the system for the measurement of the teacher's performance and the system for the evaluation of the student's knowledge.

Due to importance of measuring the efforts of academic staff for monitoring their productivity, the system of performance indicators has been

© Auken V.M., 2017

adopted in a plenty of universities worldwide. Typically, such system is a set of internally defined indicators hardly having any connection to the external environment. To make it worse, there are some attempts to establish a positive correlation between the teacher's productivity measured by performance indicators and the student's productivity measured by grades. That can lead to grade inflation. A grading system and an assessment policy of students' success is an internal creature of each university as well.

In our opinion, measuring the performance of teachers and students using an assessment system based solely on self-perception of universities is a stumbling block for increasing the efficiency of HEI. Considering efficiency as a ratio of total input in form of teachers' efforts to useful output in form of students' competencies, one should check both in terms of their external values to increase an overall efficiency of the HEI. Therefore, both traditional indicators such as Key Performance Indicators (KPI) for teachers and a Grade Point Average (GPA) for students are not sufficient to create a holistic system for measuring the efficiency of the HEI.

External tools signaling universities about competitiveness of academic staff and graduates in the labor market are seen as especially useful for developing internal tools for the performance measurement. Internal assessment should be in compliance with external assessment. Without bringing internal tools in a relationship with respective external tools, it makes no sense to establish a correlation between KPI of teachers and GPA of students. To overcome this, the performance of teachers and students should be measured using new indicators such as Intellectual Capital Indicator (ICI) and Employability Readiness Indicator (ERI). ICI is a set of academic staff qualifications; ERI is a set of graduates' competences demanded in the labor market.

A coherent combination of traditional indicators like KPI and GPA with new introduced indicators like ICI and ERI can provide the general public with a fair assessment of efficiency of HEI in terms of developing graduates' competencies. Moreover, a new approach differentiates between cognitive, job-specific and non-cognitive, general competencies. General competencies such as creative thinking, decision making, problem solving etc. are highly valued because they can be easily transferred from one to another field of occupation enabling graduates to become independent from fluctuations in the labor market. A mutual complementation of all four indicators contributes to clarifying a question of what qualifications academic staff has to possess (ICI) for implementing teaching and research activities (KPI) aimed at developing graduates' cognitive, job-specific

competencies (GPA) as well as their non-cognitive, general competencies (ERI).

This is applied, empirical research aimed at testing relationships between four indicators for performance measurement and, thereby, for quality assessment such as traditional GPA and KPI as well as new introduced ICI and ERI. While ICI measures the qualification level of teachers involved in the development of competencies enabling students to successfully compete in the labor market, ERI evaluates the level of these competencies. An action research is curried out studying the case of undergraduate programs taught in English at one economic university.

A simple model describes the relationship among ICI that aggregates qualification characteristics of academic staff, KPI that measures teaching and research performance, GPA that aggregates grades of students and ERI that assesses the level of the student's employability readiness:

$$Y = \alpha*\mathbf{ICI} + \beta*\mathbf{KPI} + \gamma*\mathbf{GPA} + \delta*\mathbf{ERI} + \{\mathbf{a*ICI/KPI} + \mathbf{b*KPI(GPA)} + \mathbf{c*GPA/ERI} + \mathbf{d*ICI(ERI)} + e*ICI(GPA) + f*KPI/ICI + g*KPI(ERI) + h*GPA(ICI) + i*GPA(KPI) + j*ERI(ICI) + k*ERI(KPI) + l*ERI/GPA\} + \xi, \quad (1)$$

where $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta$, a, b, c, d, f, e, f, g, h, I, j, k, l, ξ and rational numbers.

Ratio	Comment
a*ICI/KPI	How hired staff is satisfied to current education process, where ICI is more cognitive and KPI is more non-cognitive
b*KPI(GPA)	How education process relates to studying process or teaching to learning, where KPI is more non-cognitive and GPA is more cognitive
c*GPA/ERI	The studying process is effectively satisfied to employability, where GPA is more cognitive and ERI is more non-cognitive
d*ICI(ERI)	How hired staff effects employability, where ICI is more cognitive and ERI is more non-cognitive
e*ICI(GPA)	How hired staff uses effectively assessment system and influences the students' motivation in studying, where both ICI and GPA more cognitive
f*KPI/ICI	How teaching evaluation helps administration to improve next recruiting, where KPI is more non-cognitive and ICI is more cognitive
g*KPI(ERI)	How current education process satisfies to employability, where both KPI and ERI are non-cognitive

h*GPA(ICI)	How studying process influences hiring process, where both GPA and ICI are more cognitive
i*GPA(KPI)	How studying process influences education process, e.g. student feedback, where GPA is more cognitive and KPI is more non-cognitive
j*ERI/ICI	How employability affects hiring process, where ERI is more non-cognitive and ICI is more cognitive
k*ERI(KPI)	How employability is considered in education process, where both ERI and KPI are more non-cognitive
l*ERI/GPA	How employability effects studying process, where ERI is more non-cognitive and GPA is more cognitive

Figure 2: Ratios and comments

In this research, we consider the initial choice between ICI and KPI, KPI and GPA, GPA and ERI, ICI and ERI only. Therefore, the first equation becomes as:

$$Y = \alpha*ICI + \beta*KPI + \gamma*GPA + \delta*ERI + \{a*ICI/KPI + b*KPI(GPA) + c*GPA/ERI + d*ICI(ERI)\} + \xi, \quad (2)$$

where $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta$, a, b, c, d, f, e, f, g, h, I, j, k, l, ξ and rational numbers. For the purpose of this research, we consider the ratios and correlations in the bracket (Figure) 3:

Ratio	Description	Comment
ICI/KPI	The relationship between qualifications of hired academic staff and their implementation of teaching and research activities	If ICI/KPI > 1, than we can say that 1. There is some problem in a hiring process where expectations from the beginning do not meet actual work. 2. There is some problem in a current administration, non-effective administrative internal policy. If 1 > ICI/KPI > 0, than we can say that 1. There is some case of underestimated qualification. 2. More proved training is required.

		If ICI/KPI = 1, then qualifications of hired academic staff meet required implementation of their teaching and research activities.
KPI(GPA)	The correlation between the implementation of teaching and research activities and competencies developed during the education process	KPI and GPA with positive correlation show the teaching effectiveness on the development of competencies. If correlation is positive, the strong positive correlation shows effective using of teaching for developing students' skills. A weak positive correlation shows non-effectiveness of the education process. Negative correlation is less effective due to less effective application of teaching for competency development.
GPA/ERI	Relationship between competencies developed during the education process and competencies demanded in the labor market	If 1 > GPA/ERI > 0, than we can say that 1. Competencies demanded in the labor market were not developed after completing the study program. 2. There is a case of a non-effective education process. If GPA/ERI > 1, than we can say that 1. There is a grade inflation problem or the assessment system is not efficient. 2. It shows outstanding student achievements and a big potential for continuing education. If GPA/ERI = 1, then the education process meets labor market requirements.
ICI(ERI)	The correlation between teachers'	ICI and ERI with positive correlation show the teaching effectiveness on

	recruitment and the education quality with further student' job placement	development of competencies. If correlation is positive, the strong positive correlation shows effective using of teaching for developing students' skills. A weak positive correlation shows non-effectiveness of the education process. Negative correlation is less effective due to less effective application of teaching for competence development.

Figure 3: Ratios and correlation

From Equation 2, we can gain information about what qualifications academic staff possesses (ICI) for implementing certain activities (KPI) aimed at developing students' cognitive skills (GPA) as well as their non-cognitive skills (ERI). Equations 3-6 describe the composition of each performance indicator:

$$ICI(\pi * A \text{ (cognitive value)} + \rho * B \text{ (non-cognitive value)}), \quad (3)$$

where $A > B$, and $\pi, \rho > 0$, constants.

$$KPI(\varsigma * A + \sigma * B), \quad (4)$$

where $A < B$, and $\varsigma, \sigma > 0$, constants.

$$GPA(\tau * A + \upsilon * B), \quad (5)$$

where $A > B$, and $\tau, \upsilon > 0$, constants.

$$ERI(\varphi * A + \chi * B), \quad (6)$$

where $A < B$, and $\varphi, \chi > 0$, constants.

Based on empirical data from the economic university, calculated ratios and correlations (tables 1 and 2 in Appendixes), our model presents the following research hypothesis:

H_1 ICI consists of cognitive and non-cognitive skills such as (Figure 4):

Cognitive skills	Non-cognitive skills
Education	Networking
Research & Innovation	Communication skills
Professional development	Organizational skills
Work experience	Team work

Figure 4: The structure of ICI

The impact of ICI of hired academic staff will be assessed through variables coded as 0 when there is a case of underestimated qualification and 1 if there is some problem in hiring process. The next hypothesis posits that:

H_2 KPI consists of cognitive and non-cognitive skills such as (Figure 5):

Cognitive skills	Non-cognitive skills
Teaching activity (education, work experience)	Teaching activity (communication skills, organizational skills)
Research activity (education, research and innovation)	Research activity (networking, team work)
Operational activities (education, work experience)	Operational activities (organizational skills, team work)
Facilitator (work experience)	Facilitator (networking, communication skills, organizational skills, team work)

Figure 5: The structure of KPI

The impact of implementation of teaching and research activities will be coded as 0 when there is effective using of teaching for developing students' skills and as 1 if it is non-effective. It is acknowledged that education process effectiveness in public universities in Kazakhstan depends on identified indicators in correlation of number of students and number of teachers (Auken 2009). Hence, it can be postulated that:

H_3 GPA consists of cognitive and non-cognitive skills developed during a study program (Learning and Teaching, curricular activities).

The impact of competencies developed in the education process is coded as 0 when there is a case of non-effective education process and as 1 if it shows outstanding student achievements. It can, thus, be posited that:

H_4 ERI consists of cognitive and non-cognitive skills after completing a study program (Learning and Teaching, curricular and extra-curricular activities).

The impact of the development of competencies demanded in the labor market is coded as 0 if they are not sufficiently developed in the education process and as 1 if they are fully satisfied to the labor market.

The preliminary results have shown that for developing an efficient and comprehensive quality assurance system, cognitive oriented indicators like KPI and GPA should be complimented by ICI and ERI which assess both cognitive and non-cognitive competencies. The minimum efficiency in terms of quality assurance is reached if KPI tends to ICI and GPA tends to ERI. The correlation between KPI and GPA has to be checked by similar relations between ICI and ERI. The closer correlation between ICI and ERI, the more efficient is a quality assurance system.

For integrating the performance measurement system into the quality assurance system, internally defined indicators should be framed by indicators having a close connection with the external environment. Reciprocal relationships between those indicators within the quality assurance system can uncover shortages in the design of the educational program and in the organization of the education process. Being permanently aware of trends in the labor market via new introduced indicators, this system can assure quality enhancement in the long run.

References

1. Arbaiy, N. and Suradi, Z. (2007) Staff Performance Appraisal using Fuzzy Evaluation, Artificial Intelligence and Innovations 2007: from Theory to Applications, Vol 247, Boston: Springer, pp 195-203.

2. Rawlings J. B., Ekerdt J. G. Chemical Reactor Analysis and Design Fundamentals. Madison: Nob Hill Publishing, 2002. PP. 609.

3. Armstrong, J.S. (2011) Natural Learning in Higher Education. University of Pennsylvania, Marketing Papers, 1-1-2011, http://repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1151&context=marketing_papers.

4. Asif, M., Awan M.U., Khan M.K., and Ahmad N.(2013) A model for total quality management in higher education, Quality & Quantity, Springer, Vol 47, pp 1883-1904.

5. Auken, V.M. (2009) Education Economics Theory & Methodology and Globalization (Теория и методология исследования экономики образования в условиях глобализации), Kazakh National University, Almaty.

6. Badcock P.B., Pattison, P.E. and Harris K.-L. (2010) Developing generic skills through university study: a study of arts, science and engineering in Australia, Higher Education, Springer, Vol 60, pp 441-458.

7. Cardoso, S., Tavares, O. and Sin, C. (2015) The quality of teaching staff: higher education institutions' compliance with the European Standards and Guidelines for Quality Assurance – the case of Portugal, Educational Assessment, Evaluation and Accountability, Springer, Vol 27, pp 205-222.

8. Chen, Y. and Hoshower, B. (2003) Student Evaluation of Teaching Effectiveness: an assessment of student perception and motivation, Assessment & Evaluation in Higher Education, Vol 28, pp 71-88.

9. Cheng, S. (2014) Executive Compensation in Public Higher Education: Does Performance Matter?, Research in Higher Education, Springer, Vol 55, pp 581-600.

10. Coates, H. and Mahat, M. (2014) Threshold quality parameters in hybrid higher education, Higher Education, Springer, Vol 68, pp 577-590.

11. ENQA (2015) Standards and Guidlines for Quality Assurance in the European Higher Education Area (ESG), http://www.enqa.eu/wp-content/uploads/2015/11/ESG_2015.pdf.

12. García, E. (2014) The Need to Address Noncognitive Skills in the Education Policy Agenda, ERI Briefing Paper, Economic Policy Institute, December 2, 2014, Brifing Paper #386, http://www.epi.org/files/2014/the-need-to-address-noncognitive-skills-12-02-2014.pdf.

13. García-Aracil, A. and Palomares-Montero, D. (2010) Examining benchmark indicator systems for the evaluation of higher education institutions, Higher Education, Springer, Vol. 60, pp 217-234.

14. Kautz, T., Heckman J.J., Diris, R., ter Weel, B. And Borghans (2014) Fostering and Measuring Skills: Improving Cognitive and Non-Cognitive Skills to Promote Lifetime Success, OECD Education Working Papers, No. 110, http://dx.doi.org/10.1787/5jxsr7vr78f7-en.

15. Kulski, M. and Groombridge, B. (2004) Aligning teaching quality indicators with university reward mechanisms, Tertiary Education and Management, Kliwer Academic Publishers, Vol 10, pp 45-59.

16. Lovaglio, P.G. and Verzillo, S. (2015) Heterogeneous economic return to higher education: evidence from Italy, Quality & Quantity, Springer, Published online: 14 February 2015.

17. Mägi, E. and Beerkens, M. (2015) Linking research and teaching: Are research-active staff members different teachers? Higher Education, Springer, Published online: 04 November 2015.

18. Rexwinkel, T., Haenen, J. And Pilot, A. (2013) Quality assurance in higher education: analysis of grades for reviewing course levels, Quality & Quantity, Vol 47, pp 581-598.

19. Rodman, K., Biloslavo, R. and Bratož, S. (2013) Institutional Quality of a Higher Education Institution from the Perspective of Employers, Minerva, Vol 51, pp 71-92.

20. Sultanova, G. (2011) Economic perspectives of student migration from Kazakhstan to Germany: Opportunities for state management (Wirtschaftliche Perspektiven der Bildungsmigration aus Kasachstan nach Deutschland: Möglichkeiten des staatlichen Managements), RWTH Aachen University.

21. Sum, N-L. and Jessop, B. (2013) Competitiveness, the Knowledge-Based Economy and Higher Education, Journal of the Knowledge Economy, Springer, Vol 4, pp 24-44.

22. Tremblay, K., Lalancette, D. and Roseveare, D. (2012) AHELO Feasibility Study Report, Volume 1 – Design and Implementation, OECD, http://www.oecd.org/education/skills-beyond-school/AHELOFSReportVolume1.pdf.

23. Turhan, C. and Akman, I. (2013) Employability of IT graduates from the industry's perspective: a case study in Turkey, Asia Pacific Education Review, Springer, Vol 14, pp 523-536.

24. Velasco, M.S. (2014). Do higher education institutions make a difference in competence development? A model of competence production at university, Higher Education, Springer, Vol 68, pp. 503-523.

25. Winthrop, R., Bulloch, G., Bhatt, P. and Wood, A. (2013) Investment in global education: A strategic imperative for Business, http://www.brookings.edu/~/media/research/files/reports/2013/09/investment-in-global-education/investment-in-global-education-final--web.pdf.

26. Wu, H-Y., Chen, J-K. and Chen, I-S. (2012) Ways to promote valuable innovation: intellectual capital assessment for higher education system, Quality & Quantity, Springer, Vol. 46, pp 1377-1391.

Author aredentials

Auken Vilmur Muratbekuly, PhD, Doctor of Science, Professor at Narxoz University in Almaty, Kazakhstan. E-mail: vauken@hotmail.com

UDC 519.245:678.7

Cerci G., Cetinkaya F. A., Mamedov Kh. R.

ON A DISCONTINUOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH RETARDED ARGUMENT

The paper deals with a boundary value problem, on a finite interval, which is generated by a discontinuous differential equation with a retarded argument. The interval, in which this boundary value problem is defined, also has two discontinuity. The spectral properties of this problem is stud-

© Cerci G., Cetinkaya F.A., Mamedov Kh. R., 2017

ied and the asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions are obtained.

Key words: retarded argument, boundary value problems, asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions.

The literature for the boundary value problems for differential equations of the second order with retarded arguments begins with [1-9]. Differential equations with retarded argument, describe processes with aftereffect; they find many applications, particularly in the theory of automatic control, in the theory of self-oscillatory systems, in the study of problems connected with combustion in rocket engines, in a number of problems in economics, biophysics, and many other fields.

The presence of retardations in the system studied often proves to be a result of a phenomenon which essentially influences the course of the process. For example, in automatic control systems the retardation is the time interval which the system requires to react to an input impulse. Various physical applications of such problems can be found in [8].

We can emphasize the differences between the boundary value problem we considered and the boundary value problem in [8] as the double discontinuities in both coefficient of the differential equation and on the interval in which we investigate the boundary value problem.

These differences affect is the expression of the equivalent integral expression of the solution of the boundary value problem which yields another difference in the expression of the characteristic equation. The characteristic equation of the boundary value problem plays a very important role while examining the properties of the eigenvalues and eigenfunctions.

In [10], [12] it can also be seen that how such differences in the differential equation and in the boundary and transmission conditions affects the asymptotic behaviour of the eigenvalues and eigenfunctions. Studies about the boundary value problems which is generated with a differential equation with retarded argument can not be restricted only to the investigation of the properties of eigenvalues and eigenfunctions. In [12], for example, inverse Sturm-Liouville problem with a delay on finite interval is examined.

In this paper we considered the boundary value problem

$$u''(x)+q(x)u(x-\Delta(x))+\lambda w(x)u(x)=0,\ x\in[0,\delta_1)\cup(\delta_1,\delta_2)\cup(\delta_2,\pi] \quad (1)$$

$$u(0)\cos\alpha+u'(0)\sin\alpha=0, \quad (2)$$

$$u(\pi)\cos\beta+u'(\pi)\sin\beta=0, \quad (3)$$

$$u(\delta_1 - 0) = \theta_1 u(\delta_1 + 0), \tag{4}$$

$$u'(\delta_1 - 0) = \theta_1 u'(\delta_1 + 0), \tag{5}$$

$$u(\delta_2 - 0) = \theta_2 u(\delta_2 + 0), \tag{6}$$

$$u'(\delta_2 - 0) = \theta_2 u'(\delta_2 + 0), \tag{7}$$

where the real valued functions $q(x)$ and $\Delta(x) \geq 0$ are continuous on the interval $[0, \delta_1) \cup (\delta_1, \delta_2) \cup (\delta_2, \pi]$, λ is a real parameter, $\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2$ are arbitrary real numbers and $w(x)$ is a piecewise continuous weight function. We examined the spectral properties of (1)-(7) and obtained the asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions.

References

1. Miskis A. D., Linear Differential Equations with Retarded Argument, GITTL, Moscow, 1951; German transl., VEB Deutscher Verlag, Berlin, 1955.

2. Elsgolc L .E., Qualitative Methods of Mathematical Analysis, GITTL, Moscow, 1955; English transl., Tarnsl. Matj. Monograph, Vol. 12, Amer. Math. Soc. Providence, R. I. 1964.

3. Elsgolc, L. E. Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments, Nauka, Moscow, 1964; English transl. Holden-Day, San Fransisco, Calif., 1966.

4. Krasovskii N. N., Certain Problems in the Theory of the Stability of Motion, Fizmatgiz, Moscow, 1959; English transl. Stability of Motion Application of the Ljapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay, Standford Univ. Press, Stanford, Calf., 1963.

5. Pinney E. Ordinary Difference-Differential Equations, univ. of California Press, Berkely, 1958; Russian transl., IL, Moscow, 1961.

6. Bellman R., Cook K. L., Differential-Difference Equations, New York Academic Press, London, 1963.

7. Norkin S. B., "On a boundary value problem of Sturm-Liouville type for second order differential equation with retarded argument", Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Matematika, 6(7), 203-214 (Russian) 1958.

8. Norkin S. B., Differential Equations of Second Ordere with Retarded Argument, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 31, AMS: Providence, 1972.

9. Demidenko D. M., Likhosvai V. A., “On differential equations with retarded argument”, Siberian Mathematical Journal, 46(3), 417-430, 2005.

10. Sen E., Bayramov A., “Asymptotic formulations of the eigenvalues and eigenfunctions for a boundary value problem”, Math. Meth. Appl. Sci., 36, 1512-1519, 2013.

11. Cetinkaya F A., Mamedov Kh. R., “A boundary value problem with retarded argument and discontinuous coefficient in the differential equation”, Azerbaijan Journal of Mathematics, 7(1), 130-140, 2017.

12. Pikula M. T., Vladicic V. M., Nedic D. D., “Inverse Sturm-Liouville problems with homogeneous delay”, Siberian Mathematical Journal, 55(2), 301-308, 2014.

Author aredentials

Gizem Çerçi, Msc., Mersin University, Department of Mathematics, Turkey. E-mail: cercigizem@gmail.com

F. Ayca Cetinkaya, Assistant Professor of the Mersin University, Department of Mathematics, Turkey. E-mail: faycacetinkaya@mersin.edu.tr

Khanlar R. Mamedov, Professor of the Mersin University, Department of Mathematics, Turkey. E-mail: hanlar@mersin.edu.tr

UDC 519.245:678.7

Çolakoğlu Havare Ö., Menken H.

ON THE p-ADIC GAMMA FUNCTION, CHANGHEE NUMBERS AND POLYNOMIALS

In the paper, we obtain fermionic Volkenborn integral of p-adic gamma function and give some results.

Key words: p-adic number, p-adic gamma function, the fermionic p-adic integral, Mahler coefficients, p-adic Euler constant, Changhee numbers and polynomials

The p-adic gamma function is considered to obtain its derivative and to evaluate its the fermionic p-adic integral. Furthermore the relationship between the p-adic gamma function and Changhee polynomials and also between the Changhee polynomials and p-adic Euler

© Çolakoğlu Havare Ö., Menken H., 2017

constants is obtained. In addition, the p-adic Euler constants are expressed in term of Mahler coefficients of the p-adic gamma function.

References

1. Diamond J., The p-adic log gamma function and p-adic Euler constant, Trans. Amer. Math. Soc. 233 (1977), 321-337.

2. Kim T., On the analogs of Euler numbers and polynomials associated with p-adic q-integral on Zp at q = -1,.J. Math. Anal. Appl., 331 (2007) pp779-792.

3. Kim D. S., Kim T., Seo J., A note on Changhee Polynomials and Numbers, Adv. Studies Theor. Phys., vol. 7, no.20,(2013), 993-1003.

4. Morita Y., A p-adic analogue of the gamma function, J. Fac. Science Univ., 22 (1975), 225- 266.

Author aredentials

Çolakoğlu Havare Özge, Mersin University, Science and Arts Faculty Math.Depart.,33343,Mersin-Turkey.E-mail:ozgecolakoglu@mersin.edu.tr

Menken Hamza, Mersin University, Science and Arts Faculty Math. Depart.,33343,Mersin-Turkey. E-mail: hmenken@mersin.edu.tr

UDC 519.2

Gandarilla-Pérez C.A., Reinaldo Rodríguez-Ramos R., Lau-Alfonso L., Sabina F.

MAXWELL METHOD APPLIED TO ELASTIC COMPOSITES

In the present work the elastic properties of composite materials are predicted by the Maxwell scheme. This method consist of reducing the problem to calculating elastic fields in a finite volume composite where the inclusions are embedded in an homogeneous finite medium (matrix) and subjected to constants external strain and stress fields. The inclusions are spheroidals and all of them present the same shape, size and are uniformly distributed. Analytical explicit equations for effective properties, and numerical solutions for materials in which the matrix and the inclusions have transversely isotropic properties are given taking into account the geometry of the inclusions. The present approach results are compared with the Effective Field Method (EFM) and the Effective Medium Method (EMM).

Key words: Maxwell scheme, homogenization, composites.

© Gandarilla-Pérez C.A., Reinaldo Rodríguez-Ramos R., Lau-Alfonso L., Sabina F., 2017

Introduction

In his book "A Treatise on Electricity and Magnetism" (1873), James Clerk Maxwell proposed a method for calculation of effective resistivity of a homogeneous medium with an array of spherical inclusions. In order to solve the problem, Maxwell neglected the interactions between inclusions. Simplicity of the Maxwell scheme seemed to be attractive for many authors, the method was applied to calculation of effective elastic properties of composites with ellipsoidal inclusions and even hybrid composites containing different families of ellipsoidal inclusions [3].

In this work, the problem of overall elastic properties for a composite where spheroidal inclusions are embedded into a matrix along one specific direction is solved based on Maxwell scheme. In the present approach the derivation of the method given in [3] is followed. Explicit tensorial expressions are developed for both, Green's functions and integral equations as they are shown in the Appendix, for composites with transversally isotropic properties. Different geometrical forms of the inclusions are considered. The numerical predictions of the present implementation are compared with the Effective Field Method (EFM), the Effective Medium Method (EMM), the semi-analytic finite element method (SAM) and another Maxwell method.

The Maxwell homogenization scheme

Elastic composite that consists of a solid matrix with stiffness tensor $C_{0(ijkl)}$, in which are embedded n types of inclusions with random distribution is considered. An inclusion of type r has stiffness tensor $C_{r(ijkl)}$, $r = 1, 2, ..., n$. The inclusion of type r has the same shape, size and orientation. The elastic properties dependence with the position in the composite $\mathbf{x}$ can be represent as: $C_{ijkl}(\mathbf{x}) = C_{r(ijkl)}$ when $\mathbf{x} \in v^r$, and $C_{ijkl}(\mathbf{x}) = C_{0(ijkl)}$ when $\mathbf{x} \notin v^r$. v^r is the volume of the $r-$th inclusion.

The stress $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ within the composite satisfy the equilibrium equation $\sigma_{ij,i}(\mathbf{x}) + f_i(\mathbf{x}) = 0,$ where $f_i(\mathbf{x})$ is the external force. The stress $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ is related with the strain $\mathrm{T}_{kl}(\mathbf{x})$ through the constitutive relations $\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}(\mathbf{x})\mathrm{T}_{kl}(\mathbf{x})$. The system of differential equations for the stress

$\sigma_{ij}(x)$ and strain $\varepsilon_{ij}(x)$ tensors may also be formulated in term of an integral equation for the strain field in the medium with the inclusion [4]

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) + \int_V K_{ijkl}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \cdot C^1_{klmn}(\mathbf{x}') \cdot \varepsilon_{mn}(\mathbf{x}') V(\mathbf{x}) \mathbf{d}\mathbf{x}' = \varepsilon^0_{ij}(\mathbf{x}), \quad (0.1)$$

$$K_{ijkl}(x) = -\nabla_j \nabla_l G_{ik}(\mathbf{x})\big|_{(ij)(kl)} . \quad (0.2)$$

Here $\varepsilon^0_{ij}(\mathbf{x})$ is the external strain field applied to the medium, $(\cdot)$ represents convolutions of tensors over two nearest indices, the subscripts in parentheses mean symmetrization, and $G_{ik}(\mathbf{x})$ is the Green's function of the operator $\nabla_j C^0_{ijkl} \nabla_l$ for the unbounded homogeneous background medium (see Appendix).

As in [3,5], a large sphere V^A of the radius R^A of a composite material containing N small ellipsoidal inclusions v^r subjected to a constant external field ε^0_{ij} applied to the heterogeneous medium is considered. If this field acts on every inclusion (inclusions don't interact!), the field inside the inclusions is defined by the expressions

$$\varepsilon^{(r)}_{ij} = \Lambda^{\varepsilon}_{ijkl}(\mathbf{a}_r)\varepsilon^0_{kl}, \qquad \Lambda^{\varepsilon}_{ijkl}(\mathbf{a}_r) = \left(I_{ijkl} + A_{ijmn}(\mathbf{a}_r) C^1_{mnkl} \right)^{-1}. \quad (0.3)$$

Here $I_{ijkl} = \delta_{i(k}\delta_{l)j}$ is the unit rank four tensor, $A_{ijmn}(\mathbf{a}_r)$ ($r = 1, 2, ..., N$) is the constant tensor that is represented as integral over the unit sphere Ω in the 3D-space

$$A_{ijkl}(\mathbf{a}_r) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega K^*_{ijkl}(\mathbf{a}_r^{-1}\mathbf{k}) \mathbf{d}\Omega. \quad (0.4)$$

In these equations, $K^*_{ijkl}(\mathbf{k}) = k_j k_l G^*_{ik}(\mathbf{k})\big|_{(ij)(kl)}$ is the Fourier transform of the function $K_{ijkl}(\mathbf{x})$, $\mathbf{k}$ is the Fourier transform parameter, and $\mathbf{a}_r = a_{r(ij)}$ is a linear transformation that converts an ellipsoidal domain V into a unit sphere and depends on the shape and orientation of the $r-$th ellipsoidal inclusion. Explicit tensorial expressions for $A_{ijkl}(\mathbf{a}_r)$ are given in Appendix.

The strain field ε_{ij}^{A} inside the homogeneous sphere V^{A} with the effective stiffness tensor C_{ijkl}^{*} of the composite is

$$\varepsilon_{ij}^{A} = \Lambda_{ijkl}^{*}\varepsilon_{kl}^{0}, \qquad \Lambda_{ijkl}^{*} = \left(I_{ijkl} + A_{ijmn}C_{mnkl}^{1*}\right)^{-1}, \quad (0.5)$$

where $C_{mnkl}^{1*} = C_{mnkl}^{*} - C_{mnkl}^{0}$, and A_{ijkl} is defined by (0.4), in which transformation a_{ij} is a unit tensor ($a_{ij} = \delta_{ij}$).

Far from the center of the large sphere, the disturbances of the strain field induced by N small inclusions and by the homogeneous large sphere can be equated. Obtaining the equation

$$\theta P_{ijkl} = C_{ijmn}^{1*}\left(I_{mnkl} + A_{mnrs}C_{rskl}^{1*}\right)^{-1}. \quad (0.6)$$

Here θ is the volume fraction of the inclusions, and it is denoted

$$P_{ijkl} = \frac{1}{\overline{V}}\left\langle C_{ijmn}^{1}\left(I_{mnkl} + A_{mnrs}(\mathbf{a}_r)C_{rskl}^{1}\right)^{-1} v_r \right\rangle, \qquad \overline{V} = \sum_{r=1}^{N} v_r \quad (0.7)$$

where average is performed over the ensemble distribution of the ellipsoid semi-axes and orientations.

The solution of equation (0.6) with respect to the effective moduli tensor C_{ijkl}^{*} yields

$$C_{ijkl}^{*} = C_{ijkl}^{0} + pP_{ijmn}\left(I_{mnkl} - pA_{mnrs}P_{rskl}\right)^{-1}. \quad (0.8)$$

Consider now, that the large sphere V^{A} of composite material contain N different small ellipsoidal inclusions v^{r} aligned in the same direction. In this case, tensor P_{ijkl} given by (0.7) take the form

$$P_{ijkl} = \frac{1}{\overline{V}}\sum_{r=1}^{N} v_r C_{ijmn}^{1(r)}\left(I_{mnkl} + A_{mnrs}(\mathbf{a}_r)C_{rskl}^{1(r)}\right)^{-1}, \quad (0.9)$$

where $C_{ijkl}^{1(r)} = C_{r(ijkl)} - C_{0(ijkl)}$. The overall elastic properties of composites in which are embedded multiple aligned inclusions are given by(0.8), as was mentioned above.

Numerical results

In this section, the numerical results of the elastic effective properties derived by the Maxwell scheme (present model) for different composites with transversally isotropic symmetry are presented. The effective moduli are denoted by $\mathbf{C}^*$. Composites with one type of inclusions and two different types of inclusions embedded in the matrix phase are considered. The spheroidal geometry of the reinforcement is governed by the parameter δ. Different types of inclusion's aspect ratio δ are considered. The elastic properties of the materials that made the composites are shown in the Table 1. The material PZT-4 and PZT-5 represents the elastic coefficients of these ceramics with transversely isotropic piezoelectric properties. These values are taken from [1,2,9].

Tabla 1: Elastic properties of Al 6061, SiC and "Matrix" materials. The units of the elastic constants is $10^2 GPa$.

Materials	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	C_{66}
Al 6061	1.105	0.571	0.571	1.105	0.267	0.267
SiC	4.742	0.980	0.980	4.742	1.881	1.881
"Matrix"	2.653	0.837	0.837	2.653	0.908	0.908
PZT-4	1.390	0.778	0.743	1.150	0.256	0.306
PZT-5	1.210	0.754	0.752	1.110	0.211	0.228

The goal of this work is primarily to validate the Maxwell method for one type of inclusions and two different types of inclusions embedded in the matrix. The present model are compared with an effective medium self-consistent method (EMM) derived by [9], an effective field self-consistent method (EFM) and a Maxwell scheme presented by [3], and with the semi-analytic method.

Tabla 2: Comparison of static effective elastic coefficients ($10^2 GPa$) calculated by the Maxwell scheme (present model) and the semi-analytic method (SAM) for a composite formed by inclusions of Al 6061 and "Matrix" embedded in SiC with different aspect ratio and volume fraction.

	SAM	Max	SAM	Max	SAM	Max	SAM	Max
δ_1	0.666		0.666		0.666		0.666	
θ_1	0.023		0.029		0.036		0.048	
δ_2	1		1		1		1	
θ_2	0.035		0.043		0.055		0.072	
C_{11}	4.492	4.481	4.436	4.422	4.360	4.339	4.253	4.219
C_{12}	0.978	0.968	0.978	0.965	0.978	0.960	0.978	0.953
C_{13}	0.965	0.968	0.962	0.965	0.957	0.961	0.950	0.954
C_{33}	4.496	4.473	4.438	4.413	4.358	4.329	4.243	4.206
C_{44}	1.748	1.754	1.719	1.726	1.678	1.686	1.620	1.629
C_{66}	1.765	1.756	1.741	1.729	1.709	1.690	1.665	1.633

(SAM) reported in [6,7,8]. The closed-form expressions for the effective elastic properties obtained by [3], consider isotropic properties for the inclusions and matrix.

Comparisons between the present model with the semi-analytic method (SAM) is provided in Table 2 for a composite in which "Matrix" (first inclusion) and Al 6061 (second inclusion) are embedded in SiC matrix, where change the aspect ratio δ and volume fraction θ of both inclusions. The parameters δ_1, θ_1 are referred to the "Matrix" and δ_2, θ_2 to Al 6061. Note that the normalized difference ($(\mathbf{C}^{Max} - \mathbf{C}^{SAM}) / \mathbf{C}^{SAM}$) for each elastic property is 10^{-2} order.

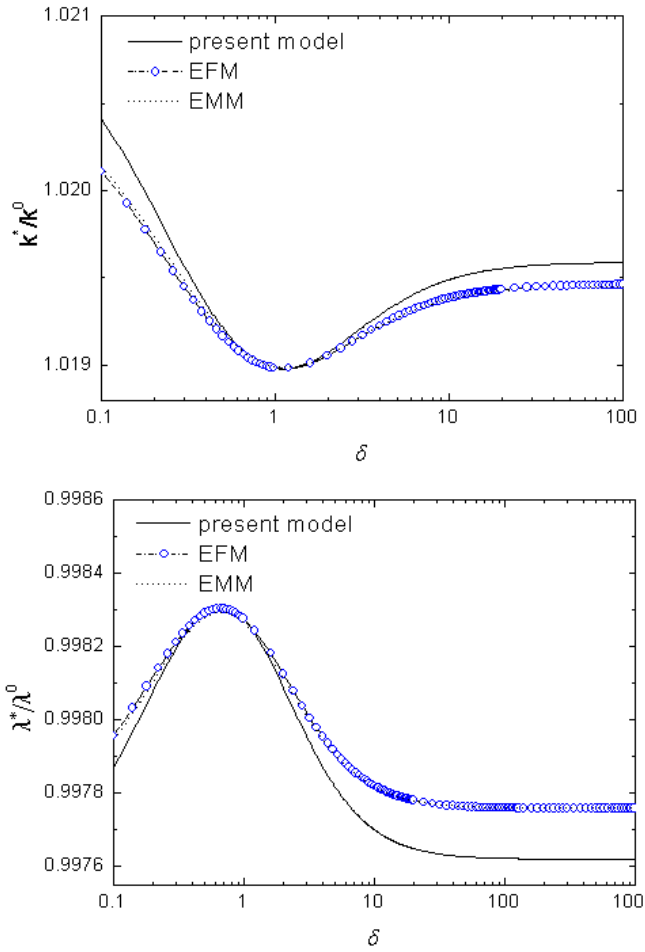


Fig. 1: Comparison between the present model, EFM and EMM for the variation of effective relative k^* / k_0 and λ^* / λ_0 coefficients against inclusions aspect ratio δ for a fixed volume fraction $\theta_1 = 0.2$ of PZT-4 inclusions embedded in PZT-5 matrix. Different geometrical forms of PZT-4 inclusions are considered.

In Fig.1 the dependencies of normalized effective coefficients k^* / k_0 and λ^* / λ_0 with respect to the aspect ratio δ (using a logarithm scale) of PZT-4 inclusions embedded in a PZT-5 matrix are given. The inclusion volume fraction is fixed at $\theta = 0.2$. The effective coefficients $k^* = (C_{11}^* + C_{12}^*)/2$, $m^* = C_{66}^*$, $\lambda^* = C_{13}^*$, $\mu^* = C_{44}^*$ and $n^* = C_{33}^*$ are taken into consideration. The materials PZT-4 and PZT-5 exhibit a transversally isotropic symmetry. The EMM and EFM results are indistinguishable. The numerical predictions given by the present method are very similar with EMM and EFM, the differences between these methods are in the order of 10^{-4}. The inclusion's aspect ratio δ affects the elastic moduli for $\delta \geq 10$, and for approximately $\delta \geq 100$ these moduli do not show a significant increasing (became saturated). The present approach gives different results in the saturated region (the reinforcement can be considered as long fibers in this region), but the three models given nearly the same results for the peak in $\delta = 1$.

Considering a composite in which is embedded two types of inclusions, spherical $\delta_1 = 1$ and prolate spheroids $\delta_2 = 2$, both inclusion materials are harder than the matrix material ($E / E_0 = 100$, $\nu = 0.3$ and $\nu_0 = 0.25$). The volume fraction of spheres θ_1 and spheroids θ_2 are related by $\theta_2 = 0.96\theta_1$. Fig. 2 shows the comparison between the present model with EMM and the Maxwell scheme developed in [3] for the dependence of normalized effective coefficients μ^* / μ_0 and n^* / n_0 with the total volume fraction θ. The total volume fraction $\theta = \theta_1 + \theta_2$ is considered up to a maximal value of $\theta = 0.5$. The numerical results of the present scheme are computed by (0.8) but taking account the tensor P_{ijkl} given by(0.9). The present model predictions are in agreement with [3] for the whole θ range of variations.

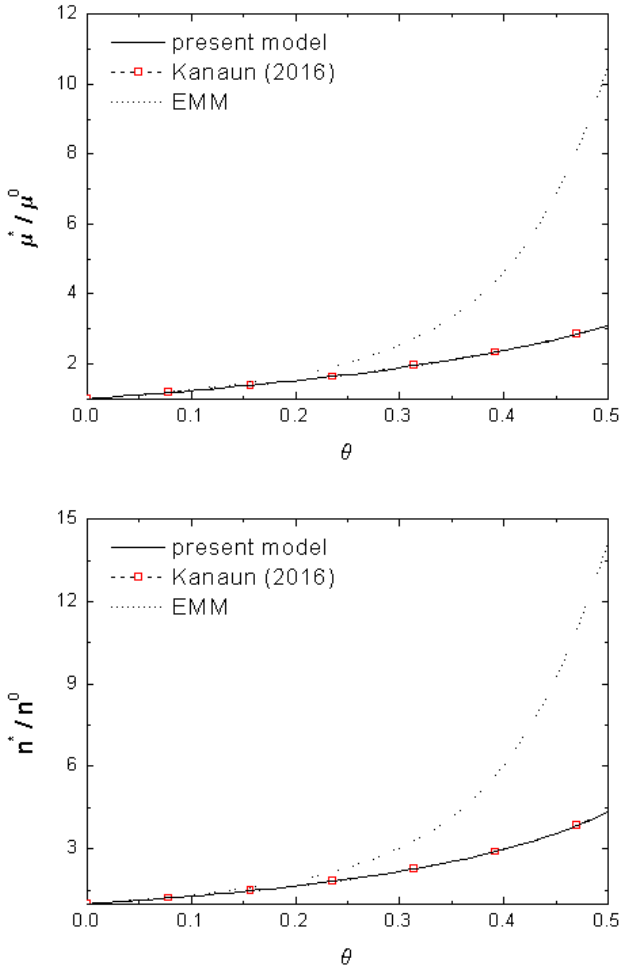


Fig. 2: Comparison between the present model, EMM and the Maxwell approaches in [3] for the dependence of coefficients μ^* / μ_0 and n^* / n_0 with the total volume fraction θ of spherical and prolate spheroid harder inclusions.

Conclusions

Effective elastic moduli of composite materials in which spheroidal inclusions are embedded in a matrix are obtained by the Maxwell method [3,5]. Explicit expressions for the Green's functions and the tensor A_{ijkl} are presented in Appendix for a reference medium with transversally isotropic properties. The influence of inclusion's geometrical form on the effective properties are described. The present scheme numerical predictions are compared with other theoretical methods like SAM, EMM, EFM and another Maxwell approach. In the case of elastic composites with spherical inclusions, the Maxwell scheme yields the same equations for the effective elastic constants as other homogenization methods that apparently take into account interactions between inclusions. In the case of two different types of inclusions, the present model results are in accordance with SAM, EFM and EMM. The results of the Maxwell scheme can be extended to the region of not small volume fractions of inclusions.

Apendix

The Green's function $G_{pq}(\mathbf{x})$ is the fundamental solution of the operator $\nabla_j C^0_{ijkl} \nabla_l$ and satisfy the equation

$$\Gamma^0_{il} \bar{G}^{''}(\zeta \cdot \mathbf{x}, \zeta) = \delta_{im} \delta(\zeta \cdot \mathbf{x}), \qquad \Gamma^0_{il}(\zeta) = C^0_{ijkl} \zeta_j \zeta_k, \quad (0.10)$$

where C^0 is referred as the elastic properties in the reference medium and $\zeta = (\sin\phi\cos\varphi, \sin\phi\sin\varphi, \cos\phi)$ is an unit vector in spherical coordinates with $\zeta_3 = \cos\phi = u$. The azimuth φ take values between $(0, 2\pi)$ and the latitude ϕ take values between $(-\pi/2, \pi/2)$. The solutions of (0.10) can be written in the form

$$G_{li}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_\Omega \left(\bar{\Gamma}^0_{li}(\zeta)\right)^{-1} \delta(\zeta \cdot \mathbf{x}) \mathbf{d}\Omega(\zeta). \qquad (0.11)$$

Taking account the Green's function (0.11), the components of the tensor $A_{ijkl}(\mathbf{a}_r)$ defined in (0.4), takes the form

$$A_{ijkl}(\mathbf{a}_r) = \frac{1}{(4\pi)^3} \int_\Omega \mathbf{d}\Omega(\xi) \int_\Omega \mathbf{d}\Omega(\xi)\, \xi_j \xi_l \left(\bar{\Gamma}^0_{ik}(\xi)\right)^{-1} \delta(\xi \cdot \mathbf{y}), \quad (0.12)$$

where $\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{y}$ and $\xi_i=a_{ij}^{-1}\zeta_j$. If v_r represents spheroids, and the coordinate transformation $x_i=a_{ij}^{-1}y_j$, convert the spheroids v_r $(x_1^2/a+x_2^2/a+x_3^2/c<1)$ into the unit sphere Ω $(y_1^2+y_2^2+y_3^2=1)$.

$$a_{ij}^{-1}=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \delta a \end{bmatrix}, \qquad (0.13)$$

with a and c the spheroid's minor and major semi-axis and by changing $\delta=a/c$ can be obtained oblate or prolate spheroids.

The integral over the unit sphere Ω in (0.12), is equal to the area of intersection of the plane $z=\hat{\boldsymbol{\xi}}\cdot\mathbf{y}$ with Ω; that is $\pi(d^2-z^2)$ if $|z|\le d$ and zero if $|z|>d$. Therefore the tensor $A_{ijkl}(\mathbf{a}_r)$

$$A_{ijkl}(\mathbf{a}_r)=\frac{1}{(4\pi)^3}\int_{\Omega}\mathbf{d}\Omega(\xi)\,\xi_j\left(\bar{\Gamma}^0_{ik}(\xi)\right)^{-1}\xi_l, \qquad (0.14)$$

and taking into account the dependence with φ and u, the only non zero components of A_{ijkl} are $A_{1111}=A_{2222}$, $A_{1122}=A_{2211}$, A_{3333}, $A_{1133}==A_{2233}=A_{3311}=A_{3322}$,
$A_{2323}=A_{2332}=A_{3223}=A_{3232}=A_{1313}=A_{1331}=$
$=A_{3113}=A_{3131}$ and $A_{1212}=A_{1221}=A_{2112}=A_{2121}$. Then

$$A_{1111}(\mathbf{a}_r)=\frac{1}{(4\pi)^3}\int_{-1}^{1}\mathbf{d}u\,\frac{1-u^2}{|\Gamma^0_{ik}|}\left(\Gamma^0_c(\Gamma^0_a+3\Gamma^0_b)-(\Gamma^0_{ac})^2\right),$$

$$A_{1122}(\mathbf{a}_r)=\frac{1}{(4\pi)^3}\int_{-1}^{1}\mathbf{d}u\,\frac{1-u^2}{|\Gamma^0_{ik}|}\left((\Gamma^0_{ac})^2-\Gamma^0_{ab}\Gamma^0_c\right),$$

$$A_{1133}(\mathbf{a}_r)=\frac{1}{(4\pi)^3}\int_{-1}^{1}\mathbf{d}u\,\frac{u\sqrt{1-u^2}}{|\Gamma^0_{ik}|}\Gamma^0_{ac}\left(\Gamma^0_{ab}-\Gamma^0_a-3\Gamma^0_b\right),$$

$$A_{3333}(\mathbf{a}_r) = \frac{1}{(4\pi)^3}\int_{-1}^{1}\mathbf{d}u\,\frac{u^2}{|\Gamma^0_{ik}|}\Big((\Gamma^0_a)^2-(\Gamma^0_{ab})^2+6\Gamma^0_a\Gamma^0_b+(\Gamma^0_b)^2\Big),$$

$$A_{2323}(\mathbf{a}_r) = \frac{1}{2(4\pi)^3}\int_{-1}^{1}\mathbf{d}u\,\frac{1-u^2}{|\Gamma^0_{ik}|}\Big((\Gamma^0_a)^2-(\Gamma^0_{ab})^2+6\Gamma^0_a\Gamma^0_b+(\Gamma^0_b)^2\Big)+$$

$$+\frac{2}{(4\pi)^3}\int_{-1}^{1}\mathbf{d}u\,\frac{u\sqrt{1-u^2}}{|\Gamma^0_{ik}|}\Gamma^0_{ac}\Big(\Gamma^0_{ab}-\Gamma^0_a-3\Gamma^0_b\Big)+$$

$$+\frac{4}{(4\pi)^3}\int_{-1}^{1}\mathbf{d}u\,\frac{u^2}{|\Gamma^0_{ik}|}\Big(\Gamma^0_c(\Gamma^0_a+\Gamma^0_b)-(\Gamma^0_{ac})^2\Big),$$

$$A_{1212}(\mathbf{a}_r) = \frac{1}{(4\pi)^3}\int_{-1}^{1}\mathbf{d}u\,\frac{1-u^2}{|\Gamma^0_{ik}|}\Big(\Gamma^0_c(3\Gamma^0_a+\Gamma^0_b-\Gamma^0_{ab})-2(\Gamma^0_{ac})^2\Big).$$

where $\Gamma^0_a(\xi)$, $\Gamma^0_b(\xi)$, $\Gamma^0_c(\xi)$, $\Gamma^0_{ab}(\xi)$ and $\Gamma^0_{ac}(\xi)$ are given by

$$\Gamma^0_a(\xi) = \frac{1}{a_r^2}\left(C^0_{11}(1-u^2)+\frac{C^0_{44}u^2}{\delta_r^2}\right),\quad \Gamma^0_{ab}(\xi) = \frac{C^0_{11}+C^0_{12}}{2a_r^2}(1-u^2),$$

$$\Gamma^0_{ac}(\xi) = \frac{C^0_{13}+C^0_{44}}{a_r^2\delta_r}u\sqrt{1-u^2},\quad \Gamma^0_b(\xi) = \frac{1}{a_r^2}\left(C^0_{66}(1-u^2)+\frac{C^0_{44}u^2}{\delta_r^2}\right),$$

$$\Gamma^0_c(\xi) = \frac{1}{a_r^2}\left(C^0_{44}(1-u^2)+\frac{C^0_{33}u^2}{\delta_r^2}\right),\quad |\Gamma^0_{li}| = -\Gamma^0_b\Big((\Gamma^0_{ac})^2-\Gamma^0_a\Gamma^0_c\Big).$$

References

1. Berlincourt, D.A., 1971. Piezoelectric crystals and ceramics. In: Mattiat, O.E. (Ed.), Ultrasonic Transducer Materials, 63-119.

2. Chan, H.L.W., Unsworth, J., 1989. Simple model for piezoelectric ceramic/polymer 1-3 composites used in Ultrasonics Transducers applications. IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Control 36, 434-441.

3. Kanaun, S, 2016. Effective homogenization techniques for elastic composites: Maxwell scheme vs effective field method: International Journal of Engineering Science (103). 19-34.

4. Kunin, I. 1983. The theory of elastic media with microstructure II. Berlin: Heidelberg.

5. Levin, V.M, Kanaun, S.K. 2012. Generalized Maxwell Method for calculation of effective conductivity of matrix composite materials. Proceedings of Petrozavodsk State University (4(125)), 87-90.

6. Medeiros, R., Rodríguez-Ramos, R., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Otero, J.A., Tita, V. 2015. Numerical and analytical analyses for active fiber composite piezoelectric composite materials. Journal of Intelligent Material Systems and Structures (26(1)), 101-118.

7. Otero, J.A., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J.,Guinovart-Díaz, R., Sabina, F.J., Monsivais, G., 2013.Semi-analytical method for computing effective properties in elastic composite under imperfect contact. Int. J. Solids Struct. 50, 609-622.

8. Rodríguez-Ramos, R., Medeiros, R., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Otero, J.A., Tita, V., 2013. Different approaches for calculating the effective elastic properties in composite materials under imperfect contact adherence. Comp. Struct. 99, 264-275.

9. Sabina, F.J., Gandarilla-Pérez, C.A., Otero. J.A., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., Guinovart-Díaz, R., Valdiviezo-Mijangos, O., 2015. Dynamic homogenization for composites with embedded multi-oriented elipsoidal inclusions. J of Solids Struct. 69, 121-130.

Author aredentials

Carlos Gandarilla Perez, professor, Facultad de Fisica, Universidad de la Habana. E-mail: cgandarilla@fisica.uh.cu

Reinaldo Rodriguez Ramos, professor, Facultad de Matematica y Computacion, Universidad de la Habana. E-mail: reinaldo@matcom.uh.cu

Leandro Lau Alfonso, professor, Facultad de Matematica y Computacion, Universidad de la Habana. E-mail: l.lau@estudiantes.matcom.uh.cu

Federico Sabina, professor, Instituto de Investigaciones en Matematicas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autonoma de Mexico. E-mail: fjs@mym.iimas.unam.mx

UDC 519.245:678.7

Goktas S., Maris E.A.

ON THE SPECTRAL EXPANSIONS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A SPECTRAL PARAMETER DEPENDING ON QUADRATICALLY IN ONE BOUNDARY CONDITION

In this paper, we consider the spectral problem with differential equation which is included with real valued and continuous potantial function on the interval [0,1] and a spectral parameter depending on quadratically in one boundary condition. We investigate the uniform convergence of the spectral expansions in terms of root functions of this problem.

Key words: Differential Operator, eigenvalue, root functions, uniform convergence of spectral expansion.

In spectral theory of differential operators, Proving existence of eigenvalues, obtaining oscillation of eigenfunctions, giving asymptotic formulae of eigenvalues and eigenfunctions, investigating the basis properties of the system of root functions in different functional spaces and the convergence of the spectral expansions in terms of root functions in some linear spaces are important the goals.

We research the uniform convergence of the Fourier Series expansions in terms of eigenfunctions for the boundary value problem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, 0 < x < 1,$$

$$y'(0)\sin\beta = y(0)\cos\beta, 0 \le \beta < \pi$$

$$y'(1) = \left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)y(1), a \ne 0$$

where λ is the spectral parameter, $q(x)$ is a real valued and continuous function on the interval [0,1], and a,b,c are real.

In [1], it has been investigated that basisness of root functions of this problem. It has been determined that the explicit form of the biorthogonal system. Using this, it was proved that the system of root functions, with

© Goktas S., Maris E. A., 2017

arbitrary two functions removed, form a minimal system in $L_2(0,1)$, except some cases where this system is neither complete nor minimal. For the basicity in $L_2(0,1)$, it was proved that the system of eigenfunctions is quadratically close to corresponding sine or cosine systems which are orthonormal bases in $L_2(0,1)$.

It is important to notice the paper [2] which the basis property for the system of eigenfunctions of the boundary value problem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 < x < 1,$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) - d\lambda y(1) = 0$$

is studied in $L_p(0,1)\ (1 < p < \infty)$. It is also verified that the system of root functions of this problem with one function deleted, is a basis in the space $L_p(0,1)\ (1 < p < \infty)$; this basis is unconditional for $p = 2$. Moreover, the conditions of the uniform convergence of spectral expansions of continuous functions in the system of eigenfunctions of this problem are established.

In [3], the sharpened asymptotic formulae for eigenvalues and eigenfunctions of a spectral problem with a boundary condition rationally depending on the eigenparameter are obtained and the uniform convergence of the spectral expansions of the continuous functions in terms of eigenfunctions is presented.

The uniform convergence of the Fourier series expansions in terms of eigenfunctions of the problem the boundary value problem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 < x < 1$$
$$b_0 y(0) = d_0 y'(0),$$
$$(a_1\lambda + b_1)\, y(1) = (c_1\lambda + d_1)\, y'(1),$$

where $q(x)$ is a real-valued continuous function on [0,1] and $|b_0| + |d_0| \neq 0$, $a_1 d_1 - b_1 c_1 > 0$, was researched in [4].

References

1. Kerimov N.B., Aliyev Y.N., The basis property of Sturm-Liouville problems with boundary conditions depending quadratically on

the eigenparameter, Arabian Journal For Science And Engineering, volume 33, issue 1A, pp. 123-136, 2008.

2. Kerimov N.B., Maris E.A., On the basis properties and convergence of expansions in terms of eigenfunctions for a spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition, Proc. IMM NAS Azerb., 40(Sp. Is.), 245-258, 2014.

3. Kerimov N.B., Goktas S., Maris E.A., Uniform convergence of the spectral expansions in terms of root functions for a spectral problem, Elect. Jour. Diff. Eq., 2016(2016)(80), 1-14, (2016).

4. Kerimov N.B., Maris E.A.,On the uniform convergence of the Fourier Series for one spectral problem with a spectral parameter in a boundary condition, Math. Meth. App. Sci., 39(9), 2298-2309, (2016).

Author aredentials

Sertac Goktas, Research assistant of the Mersin University, Department of Mathematics, Turkey. E-mail: srtcgoktas@gmail.com

Emir A. Maris, Lecturer Doctor of the Mersin University, Technical Sciences Vocation School, Turkey. E-mail: ealimaris@gmail.com

UDC 517.5

Kopezhanova A.N., Nursultanov E.D., Persson L.-E.

ON THE TWO-SIDED INEQUALITY FOR THE FOURIER TRANSFORM

In this work the sufficient condition is derived so that the Fourier transform $\hat{f}$ *belongs to* L_p*-space* $(1< p <\infty)$*. Also the conditions are obtained so that the norm of the Fourier transform* $\hat{f}$ *in* L_p*-space* $(1< p <\infty)$ *has both upper and lower estimates.*

Key words: Fourier transform, the Hausdorff-Young inequality, the total variation.

Let

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx, \quad x\in R,$$

be the Fourier transform of a function $f\in L_1(R)$.

© Kopezhanova A.N., Nursultanov E.D., Persson L.-E., 2017

Let $1 < p < 2$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$ and $0 < q \le \infty$. Then we have the following inequalities

$$\left\| \hat{f} \right\|_{L_{p'}(R)} \le c_1 \| f \|_{L_p(R)}, \tag{1}$$

$$\left\| \hat{f} \right\|_{L_{p',q}(R)} \le c_2 \| f \|_{L_{p,q}(R)}, \tag{2}$$

where $L_{p,q}(R)$ is the classical Lorentz space. These inequalities are called the Hausdorff-Young inequality and the Hardy-Littlewood-Stein inequality, respectively, (see e.g. [4]).

Note that these inequalities (1) and (2) hold with equality for $p = q = 2$ (Plancherel's theorem) but do not hold in general for $2 < p < \infty$.

Let $0 < p, q \le \infty$, M be the set of the segments $[a,b]$ in R and $|e| = b - a$.

The net space $N_{p',q}(M)$ is defined as the set of all measurable functions f such that the quasinorm

$$\| f \|_{N_{p',q}(M)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}} \bar{f}(t, M) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

for $q < \infty$, and

$$\| f \|_{N_{p',\infty}(M)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p'}} \bar{f}(t, M) < \infty$$

for $q = \infty$, where $\bar{f}(t, M) := \sup\limits_{\substack{|e| \ge t \\ e \in M}} \dfrac{1}{|e|} \left| \int_e f(x) dx \right|$.

These spaces were introduced in [2] (see also [3]). In particular, the following result was proved:

Theorem A. Let $2 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$. Then

$$\left\| \hat{f} \right\|_{N_{p',q}(M)} \le c_3 \| f \|_{L_{p,q}(R)}. \tag{3}$$

The inequality (3) complements the Hardy-Littlewood-Stein inequality. Similar results for the Fourier transform in the periodic case were obtained in [3] and [1].

The total variation of the function f, defined on an interval $[a,b] \subset R$ is the quantity

$$V_a^b(f) := \sup_{\Im} \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

where the supremum is taken over all partitions of $[a,b]$:

$$\Im: \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad n \in Z_+.$$

We say that the measurable function $f(x) \in V([a,b])$ if $V_a^b(f) < \infty$.

The main results read as follows.

Theorem 1. Let $1 < p < \infty$ and $f \in L_1(R)$. If f satisfies the condition

$$\left(\sum_{k \in Z} \left(2^{\frac{k}{p'}} V_{2^k}(f) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

then $\hat{f} \in L_p(R)$ and the inequality

$$\left\| \hat{f} \right\|_{L_p(R)} \le c_4 \left(\sum_{k \in Z} \left(2^{\frac{k}{p'}} V_{2^k}(f) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

holds. Here the constant c_4 does not depend on f.

Theorem 2. Let $1 < p < \infty$. Assume that the function f satisfy that there exists $c_5 > 0$ such that

$$V_{2^k}(f) \le c_5 \sup_{\substack{|e| \ge 2^k \\ e \in M}} \frac{1}{|e|} \left| \int_e f(x) dx \right|, \quad k \in Z.$$

Then $\left\| \hat{f} \right\|_{L_p(R)} < \infty$ if and only if $\|f\|_{N_{p',p}} < \infty$ and, moreover,

$$\left\| \hat{f} \right\|_{L_p(R)} \approx \|f\|_{N_{p',p}(M)}.$$

Conventions. The letter $c(c_1, c_2, etc.)$ means a constant not dependent on the involved functions and it can be different in different occurrences. Moreover, for $A, B > 0$ the notation $A \approx B$ means that there exists positive constants a_1 and a_2 such that $a_1 A \le B \le a_2 A$.

The author was supported by the grant 5540GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

1. Kopezhanova A. and Persson L.-E. On summability of the Fourier coefficients in bounded orthonormal systems for functions from Lorentz type spaces // Eurasian Math. J. – 2010. – V. 1, № 2. – P. 76-85.

2. Nursultanov E.D. Network space and Fourier transform // Dokl. Russ. Akad. Nauk. – 1998. – V. 361, № 5. – P. 597–599.

3. Nursultanov E.D. Network spaces and inequalities of Hardy-Littlewood type // Math. Sb. – 1998. – V. 189, № 3. – P. 83-102 (in Russian).

4. Stein E.M. and Weiss G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton: Princeton University Press. – 1972.

Author aredentials

Kopezhanova Aygerim Nurzhanovna, PhD, L.N.Gumilyov Eurasian National University. e-mail: Kopezhanova@yandex.ru

Nursultanov Yerlan Dautbekovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kazakhstan Branch of M.V. Lomonosov Moscow State University

Persson Lars-Erik, Professor, Lulea University of Technology

UDC 327.8

MA Bin

NEW SILK ROAD ECONOMIC BELT AND SINO-RUSSIAN RELATIONS IN CENTRAL ASIA[1]

(Center for Russia and Central Asia Studies, Fudan University, China)

New Silk Road Economic Belt initiative is the new factor which could impact on Sino-Russian relations in the area of Central Asia. The result-oriented discussions exaggerate the possibility of this initiative and its influence to Central Asia affairs. At least there are two kinds of obstacles which could constrain some optimistic or pessimistic prediction coming

© MA Bin, 2017

1 The article runs under the project "Study of the Pairing Strategies of the Silk Road Economic Belt and Eurasian Economic Union", received the Institute of World Economy of Fudan University Humanities and Social Sciences of Ministry of Education Planning Fund for 2015 № project approval 15JJD790006.

true. The first is the inherent problems of the Silk Road Economic Belt initiative; The second is the weak institution basis of the integration of Silk Road Economic Belt and Eurasian Economic Union. The influence of the Silk Road Economic Belt to Sino-Russian relations is much more on the interaction between two countries, it will promote Sino-Russian relations into a new stage which need a more flexible perspective to study it, but not bring a fundamental change. A process-oriented analysis structure is probable to understand the relationship between China and Russia under the background of Silk Road Economic Belt.

Keywords: Silk Road Economic Belt, Eurasian Economic Union, Sino-Russian relations, Central Asia.

Introduction. The impact on Sino-Russia relations became a very hot topic when China declared its Silk Road Economic Belt Initiative(SREB), especially Russia announced an integration project in Eurasia area, the Eurasian Economic Union(EEU). Many observers widely believed that it's just a matter of time before clashes occur between the two integration projects.[1] On the contrary, there also are lots of analysis show an optimistic future of two countries relationship in this region. If we put this question in an interaction perspective, both of these two result-oriented opinions focus too much on the imaginary end, as two of the key actors in the international community, Russia and China regulate their relationship depend on a comprehensive background. In other words, it will be a constructive way to interpret Sino-Russia relations in an interactive process perspective based on their policy. This article will focus on influences of the Silk Road Economic Belt to China and Russia relations in Central Asia area, and it argued that, the result-oriented opinions exaggerated the impact of Silk Road Economic Belt and regarded it as a successful reality. Actually, the Silk Road Economic Belt faces many obstacles and its impact on Sino-Russia relations depends very much on the interactions related with them between two countries.

SREB as China's New Central Asia Policy. New Silk Road Economic Belt was recognized as China's latest strategy toward Central Asia by many scholars and observers after it was proposed on 2013. Although One Belt One Road Initiative covers lots of areas, the Central Asia area

1 Alexander Gabuev, Eurasian Silk Road Union: Towards a Russia-China Consensus? The Diplomat, June 5, 2015.
(http://thediplomat.com/2015/06/eurasian%ADsilk%ADroad%ADunion%ADtowards%ADa%ADrussia%ADchina%ADconsensus/1/2)

was put into a special place. This is not only because of the fact that Central Asia had played an apparent role in world well-known Silk Road in history, its importance of Central Asia to Sino-Russian relations also make this kind of opinions seem reasonable. For some of the observers, there are at last three reasons which make China pursue a particular role in Central Asia through the New Silk Road Economic Belt initiative.

The first is about the energy cooperation between Central Asia and China. As we know, Central Asia has become a more and more important energy supplier to China, their cooperation included energy explorations, exploitations and transportations. Both China and Central Asian states, such as Kazakhstan, Uzbekistan and Turkmenistan hope to keep this kind of energy cooperation as a stable relationship. According to lots of forecasting, China should import more oil and gas in order to keep the growing of its economy in the future. For China, cooperating with Central Asia states is a relative rational choice for its energy security. On the one hand, this kind of cooperation will partly meet China's energy consumption. On the other hand, China seems like at a much stronger place because of it have more tools to effect Central Asian counterparts. The New Silk Road Economic Belt, especially this initiative's investment projects, such as investing in infrastructure attracted Central Asia's attention and interest successfully, and some projects are being carrying out. These investments and some other economic cooperation will have positive influence to China's role in Central Asia's energy field.

The second is related with China's foreign policy structure. China's new government has made efforts to redesign its foreign policy. In the past several years, the role of neighbor countries and area has been become more and more important in China's foreign policy. And in the eyes of many analysts and strategists, the region of Central Asia is not only the China's strategic rear, but also the China's experimental area, the success in this region is crucial. On the one hand, China could have more time and resources to deal with challenges come from the east part. On the other hand, some new policy design in Central Asia are good example for China' foreign policy and strategy, for instance, the creation and operation of Shanghai Cooperation Organization. For China, Central Asia is one of the few regions where China could transfer its economic power into foreign policy influence in a relatively easy way.

The third is about the grassroots of international cooperation. In the past 20 years, especially in the latest decade, the economic cooperation between Central Asian states and China grew fast. For example, China has

become the main trade partner of Central Asian states, and the number of China's investment in the region increased a lot. The political and foreign relations between China and Central Asian countries keep in a stable level in the past years. There are no upheaval and tumultuous changes. On the contrary, some of these countries often supported each other when faced with challenges especially when those challenges and critics come from the Western countries. There are some obstacles, however, SCO is a good platform for China and Central Asian states' cooperation.

However, the New Silk Road Economic Belt will be the new stage of China's policy toward Central Asia. In the past decades, China pursued its interests though bilateral and multilateral ways in Central Asia area, and have been the economic great power in the region. Its economic cooperation has been established in many sections of this region economy, especially in the energy and trade area. The New Silk Road Economic Belt policy should have some new features.

Effect to Sino-Russian relations. As we know, the contents of Sino-Russian relations are very complicate, it's hard to make two countries relationship plunge off the basic tracks. This is the starting point of understanding the effect of New Silk Road Economic Belt to Sino-Russian relations. The New Silk Road Economic Belt is not an all-or-nothing game between China and Russia. It is a new stimulation for Sino-Russian relations' evolution.

For the optimistic opinion, China's Silk Road Initiative will improve cooperation between China and Russia, particularly in the economic areas, for instance, trade, investment and infrastructure connection between China and Russia could be accelerated. There are some agreements seem to prove this kind of idea after China put forward the One Belt One Road initiative. According to Chinese government's statistic, the investment and trade cooperation with countries along One Belt One Road grew fast in the past two years. Meanwhile, China and Russia government signed numbers of agreements and contracts about economic cooperation.

The opposite idea about the effect of Silk Road Economic Belt to Sino-Russian relations tells a different story. This kind of thinking emphasizes the competition between China and Russia. For their understanding, the struggle or competition is the principle feature of international relations, and the nature of structure for conflict determined the negative result of Silk Road Economic Belt. If China try to or achieve their special goals successfully in Central Asia by the New Silk Road Economic Belt initiative, this region's strategical structure will be changed. China's influence

will grow and get more power. That means the other countries' effect, such as Russia, U.S., will be undermined. So, their reaction to rebalance China will be a rational choice. And Sino-Russian relations will lead to a pessimistic track. Russia as a traditional dominator in regional affairs, its interest or influence will be weakened by China's activity, or the progress of SRI. This kind of zero-sum logic is popular among observers.

Although the debates are going on, China and Russia have done many things relating with Silk Road Economic Belt. The most remarkable one is the joint statement of the connection between Silk Road Economic Belt and Eurasian Economic Union on 2015. Not only the optimistic opinions which think the integration of SRI and EEU will make Sino-Russian relations make a big step forward, but also the pessimistic ideas which emphasized the conflict between China and Russia in the affairs of regional cooperation, account this kind of connection as a determine factor for Sino-Russian relationship. At least, there are three reasons why two initiative's connection are so important.

On the international level, both China and Russia are under the pressure from the west world, especially from the U.S., the economic sanctions on Russia because of the annexation of Crimea, pivot-to-Asia policy were the main challenges which Russia and China are facing. In other words, two countries status in international community forced them getting closer, there are a lot of way to pursue this goal, and the connection between Silk Road Economic Belt and Eurasian Economic Union is the new example of two countries strategical cooperation.

On the regional level, both China and Russia are main actors in Central Asia affairs. None of them could expel the other. They have built a relative stable regional structure in this area, and develop their relations with Central Asian states. This is not only because both of them have their own advantages which are non-substitutable, but also because Central Asian states do not have this kind of wishes. As we know, the diversification diplomacy is the strategy of Central Asian states. The knocking down of any great power will ruin the balance of regional structure. Central Asia states will try their best to keep the balance of power in order to maximize benefit. The connection between Silk Road Economic Belt and Eurasian Economic Union could be a good opportunity to meet different needs of balance.

On the level of bilateral relationship, the statement of two initiatives' connection means China and Russia reached sort of concession in Central Asia. No matter how fruitful in the future, the scale of regional markets

and the potential in the short or middle term will be more sensitive in the current policy decision process. Simply speaking, the market potential of Central Asia is not huge enough to support Chinese and Russian economy. Competition or conflict is inevitable between China and Russia. When China proposed One Belt One Road initiative, Russia launched its Eurasian Economic Union plan, both of them think highly of Central Asia area. That made China and Russia looks like going to the conflict. Actually, this kind of recognition were not rare in the early stage of Silk Road Economic Belt. But the statement of connection lead the two initiative into a cooperation way in spite of many obstacles are there.

In brief, the New Silk Road Economic Belt has become a very important new stimulation of Sino-Russian relations since it was proposed, but it's hard to say the effect is positive or negative. The feature of effect depends much on the progress of the connection between Silk Road Economic Belt and Eurasian Economic Union.

Obstacles of Cooperation between SREB and EEU. For improving the cooperation between Silk Road Economic Belt and Eurasian Economic Union, the way of handling difficulties or obstacles should be settled. One premise should be figure out at first, that is what obstacles two initiative's connection facing. The obstacles usually mentioned are lack of mutual-trust, absence of resources, challenge from third parties and so on. Those analyses are partly true, instead of draw the whole picture, this article will focus on the problems of Silk Road Economic Belt and argue that the connection will not be an easy task. Meanwhile, this part will make a further study on the effect of Silk Road Economic Belt, and argue that its influence to Sino-Russian relations and Central Asia was exaggerated, some evaluation of these effect is not as real as imagined. Main Problems of Silk Road Economic Belt Initiative

China's New Silk Road Economic Belt has attracted numerous of attentions of scholars and officials, however, there are four fundamental questions still not be answered. And most of these unsolved questions will reduce the shock of Silk Road Economic Belt. In other words, think the Silk Road Economic Belt as a well-designed geo-political or economic strategy was too optimistic. To some extent, the Silk Road Economic Belt much more like a learning-by-doing policy. This means Russia and Central Asia countries which take part in the projects have opportunities to form the way of Silk Road Economic Belt development. It will limit the impact of Silk Road Economic Belt to the Sino-Russian relations. There are some

evidences that could prove the learning-by-doing feature of Silk Road Economic Belt.

The first is local government's role. Many analyses regard the New Silk Road Economic Belt is China's latest strategy toward Central Asia and some other areas, but at the beginning of this policy designing, some local governments played a very important role, especially Chongqing. Because of the well-known international railroad from Chongqing to Germany is crucial to its economy development. Chongqing government tried hard to solve the transport cost problem. It lobbied China's central government to give some help. Its idea got lots of support from Xinjiang, Gansu and so on. After President Xi stated this policy, these local governments became much more energetic, but according to China's foreign policy design process, there are few rooms left to the local government. If China's Central government wants to put the New Silk Road Economic Belt to the strategic place, local government's flexibility could be narrowed. So how to get a balance between Central government's strategic design and local government's convenience will be a big problem for the progress of New Silk Road Economic Belt policy in the future.

The second is the programs it concluding. However, there are few specific programs have been issued in the structure of New Silk Road Economic Belt. Most of the discussions covered the importance and ideas. Some local governments and scholars have proposed many plan and opinions, but no one have been accepted by the Central government. There is an obvious phenomenon, some local governments and scholars considered the New Silk Road Economic Belt will be an opportunity for their province or China's economic, they seem like it could cover everything. But as we know, the New Silk Road Economic Belt will not be a basket which could contain any kind of policy. Although the idea of New Silk Road Economic Belt is popular, it still on the stage of discussion, there are no specific programs will be a tough nut to crack.

The third is the boundary of New Silk Road Economic Belt. This problem includes two levels. In the domestic level, more and more local governments are interested in the New Silk Road Economic Belt, they think this policy will get central government's financial or policy support, then they issued numbers of ideas in order to board the new policy. In the international level, the New Silk Road Economic Belt policy is not China's Marshall Plan. Seem like the internal level, some countries think this new silk road policy would be China's aiding strategy. Although the policy meaning is not very clear, many countries have expressed their enthusiasm.

If we review China's foreign policy in recently years, we can imagine that the neighbor countries will be the focus of China's new Silk Road economic belt policy. This will make some countries fell disappointment. And there is the other key factor which will hold the New Silk Road Economic Belt policy back from "Marshall Plan". China New Silk Road Economic Belt policy is not a pure foreign policy, in my opinion, the domestic development is this policy's main object. When we pay more attention to the local government plan, we can get this conclusion. Their plans are focus on how to develop their own economy, not about foreign affairs.

Weak Institution Basis of two initiatives' connection. On the May 2015, China and Russia signed the joint statement of the connection of SREB and EEU. It seems made a more positive future for the regional cooperation in Central Asia. Indeed, this joint declaration relieved stress between two countries in a certain extent, but did not make concrete institution basis to the integration. For the integration of Silk Road Economic Belt and EEU, an obvious obstacle is the lack of institution platform which could support the integration. Although China and Russia signed a joint statement about their cooperation in the future, however, whether from the perspective of the independent framework of Eurasian Economic Union, or Silk Road Economic Belt, or from the perspective of their interaction, the institution construction is an urgent issue, especially most of the regional organizations in Central Asia are relatively weak.

Among the existing multilateral cooperation systems in the Eurasian region, the SCO has included the key countries of the Silk Road Economic Belt such as China, Russia and Kazakhstan, and it is regarded as the main platform for the interconnection between Silk Road Economic Belt and EEU to expand the space for pragmatic bilateral cooperation, expedite the process of Eurasian economic integration, and maintain regional peace and development.[1] For many observers, using the SCO platform to promote the integration became a very attractive choice. It is rational to make SCO serving as the platform because of its potential. But the experience of SCO on economic field seems like predict a complicated or pessimistic scenario to us.

During the past decade, the SCO put forward many proposals about regional economic cooperation among its member states, and economic

1 Coopetition and Cooperation: the Silk Road Economic Belt is connecting up with the Eurasian Economic Union, *Russian Central Asian & East European Market*, № 5, 2016, p.128.

cooperation is regarded as one of the basic pillar.[1] Since its establishment, observers have argued that the SCO would wind up being the NATO of Asia. Specifically, the argument holds that the SCO will in the future become a politico-military organization dominated by China and Russia to oppose and deter the United States and other Western powers. Contrary opinions hold that the purpose of the SCO is to strengthen mutual trust, friendship and good neighborhood among its member-States, to consolidate multi-disciplinary cooperation in the maintenance and strengthening of peace, security and stability, to counteract new challenges and threats and to facilitate comprehensive and balanced economic growth, social and cultural development.[2] Although both arguments are persuasive to a certain extent, none attributes a viable political personality to the SCO.

Despite the consensus according to which the SCO shall play a more important role in economic, security, energy and cultural cooperation, little discussion is devoted to detailed policy design. As a result, the role of the SCO in regional integration is constrained. The limited influence exerted by SCO is manifest in the development of Central Asian politics as well as in security and economic cooperation among member-states. On the whole, in the decade after its foundation, the Organization barely alters the behavior of its member-states. China, Russia and other Central Asian states have been relying upon bilateral approaches to develop their relations. According to this, SCO is not a very efficiency platform for the connection between Silk Road Economic Belt and Eurasian Economic Union.

Compared with SCO, the conditions of the other institutions exit in this region are similar or worse, in other words, their ability of serving the connection between Silk Road Economic Belt and Eurasian Economic Union is weaker than SCO. In terms of the limitations and obstacles of the connection between Silk Road Economic Belt and Eurasian Economic Union, the impact caused by the Silk Road Economic Belt on China and Russia relations would not as huge as some discussions said, because most of these discussions see the connection of two initiatives as the certain fact, they ignored the possibility of failure and difficulty of success. Then, it's

1 In 2001, the Declaration on the Establishment of SCO had stated the cooperation in the area of trade and economy, and said a negotiation process will be launched on the issues related to establishing favorable conditions for trade and investment, and for the long-term program of multilateral trade and economic cooperation. See *Declaration on the Establishment of SCO*. (file:///Users/bin/Downloads/Declaration_on_the_establishment_of_the_SCO.pdf)

2 *The Charter of the Shanghai Cooperation Organization*, see on the web: http://www.sectsco.org/CN/show.asp?id=103

necessary to use a more flexible framework of observation to study the effect of New Silk Road Economic Belt to Sino-Russian relations on the back ground of both countries launched their own regional economic cooperation plan.

New Scenario of Sino-Russian Relations. According to the obstacles of New Silk Road Economic Belt and its connectivity with Eurasian Economic Union are obvious, a prudent analysis about the scenario which the Silk Road Economic Belt might lead to is proper, however, Sino-Russian relations should be put into a more basic level compared with the connection between Silk Road Economic Belt and Eurasian Economic Union. Generally speaking, the connection of two initiatives could add new contents to Sino-Russian relations, but will not change the basis of it. This is the most probable situation of two countries relations in the foreseeable future on the background of Silk Road Economic Belt, the complexity and stability of Sino-Russian relations also are certain in this scenario.

First of all, the development of Sino-Russian cooperation is the result of many factors. External strategic pressure is an important stimulating factor in the development of Sino-Russian relations, but the complex political and economic demands within the two countries have a more fundamental guiding role. Second, the development of Sino-Russian relations depends to a large extent on whether the two sides can grasp the rhythm of their political and economic cooperation. The development of Sino-Russian political relations is a good supplement to the promotion of economic and trade relations. The economic relations between the two countries is inseparable from the political coordination. The expansion of Sino-Russian economic and trade cooperation is an important thrust of sound development of bilateral relations, but economic factor cannot support the long-term, sound development of Sino-Russian relations by its own. Third, competition is the normal part of bilateral relations. It is the normality of bilateral relations to promote the common interests through cooperation and realize the unique interests of the two countries through competition.

This scenario makes the process-oriented model becoming more important and useful in the process of exploring Sino-Russian relations on the background of Silk Road Economic Belt. This model argues that the effect of Silk Road Economic Belt and its connection with Eurasian Economic Union towards Sino-Russian relations is not from its imagined consequences, but mainly come from the interactions among China, Russia, and

Central Asian states, and the process of interacting will play a more important role in the development of Sino-Russian relations.

In the past 3 years, the progress of Silk Road Economic Belt happened in bilateral and multilateral level, the cooperation in bilateral level played the main part, not the other around. China had developed numerous of bilateral programs with different Central Asian states and Russia under the framework of Silk Road Economic Belt, they are very critical for the progress of Silk Road Economic Belt. The multilateral cooperation in this region happened among China, Russia and Central Asian states now is under the framework of two initiatives' connection. All consequences from different level will determine the future of Silk Road Economic Belt together. For China, a rational choice is exploring a relative independent relationship with Central Asian states when she keeping Sino-Russian relations at a high level.

Conclusion. Silk Road Economic Belt as the new initiative of China's economic cooperation with Central Asian states is the new background of Sino-Russian relations facing in Central Asia area, so to some extent two countries' comprehensive relationship is entering into a new stage. The connection between Silk Road Economic Belt and Eurasian Economic Union provides new contents to two countries' relation, and this kind of multilateral interaction is one part of effect which Sino-Russian relations facing, the other part is bilateral interactions involved in Silk Road Economic Belt between China and this region's countries. Although many efforts were made in order to keep the Silk Road Economic Belt and its connection with Eurasian Economic Union in the positive track of improving Sino-Russian relations, obstacles are still obvious and will influence the scenario of Sino-Russian relations. In conclusion, the interaction of different countries of this region will determine the effect of Silk Road Economic Belt to Sino-Russian relations, and this kind of effect would be limited because of the complexity and stability of two countries' relationship.

References

1. Zhao Huasheng, China's Central Asia Policy, Shishi Press, 2008.Stephen Blank, Whither the new great game in Central Asia? *Journal of Eurasian Studies*, № 3, 2012.

2. Alvin Cheng-Hin Lim, China and The Eurasian Economic Union: Prospects For Silk Road Economic Belt, Eurasia Review, May 14, 2015.

3. Alexander Gabuev, Eurasian Silk Road Union: Towards a Russia-China Consensus? The Diplomat, June 5, 2015.

4. Catherine Putz, China's Silk Road Belt Outpaces Russia's Economic Union, The Diplomat, March 10, 2016.

5. Michael Clarke,"One Belt, One Road"and China's emerging Afghanistan dilemma, *Australian Journal of International Affair*s, Vol. 70, № 5, 2016.

Author aredentials

MA Bin, Doctor, Assistant Researcher, China, Shanghai, Fudan University
E-mail: mabin@fudan.edu.cn

UDC 519.245:678.7

Menken H., Çolakoğlu Havare Ö.

A NOTE ON THE p-ADIC GAMMA FUNCTION AND q-CHANGHEE POLYNOMIALS

In the paper, we obtain fermionic Volkenborn integral of p-adic gamma function and give some results.

Key words□p-adic number, p-adic gamma function, the fermionic p-adic q-integral, Mahler coefficients, p-adic Euler constant, q-Changhee Polynomials.

In the present work, we consider the fermionic p-adic q-integral of p-adic gamma function and of derivative of p-adic gamma function by using their Mahler expansion. Relationship between the p-adic gamma function and q-Changhee numbers is obtained. It is given a new representative for the p-adic Euler constant. Also, we study relationship between q-Changhee polynomials and p-adic Euler constant using the fermionic p-adic q-integral techniques the idea that the q-Changhee polynomials.

References

1. Diamond J., The p-adic log gamma function and p-adic Euler constant, Trans. Amer. Math. Soc. 233 (1977), 321-337.

2. Kim T., q-Volkenborn integration, Russian Journal of Mathematical Physics, vol. 9, no. 3, pp. 288-299, 2002.

3. Kim T., T. Mansour, S. H. Rim, J. J. Seo, A Note on q-Changhee Polynomials and Numbers, Adv. Studies Theo. Phys, 8, 1, (2014), 35-41.

4. Morita Y., A p-adic analogue of the gamma function, J. Fac. Science Univ., 22 (1975), 225-266.

© Menken H., Çolakoğlu Havare Ö., 2017

Author aredentials

Menken Hamza, Mersin University, Science and Arts Faculty Math. Depart., 33343, Mersin-Turkey. E-mail: hmenken@mersin.edu.tr

Çolakoğlu Havare Özge, Mersin University, Science and Arts Faculty Math.Depart., 33343, Mersin-Turkey.E-mail:ozgecolakoglu@mersin.edu.tr

UDC 517.518.34; 517.982.22

Nasibova N.P.

BASES OF EXPONENTS WITH A PIECEWISE LINEAR PHASE IN GENERALIZED WEIGHTED LEBESGUE SPACE

The perturbed system of exponents with a piecewise linear phase is considered in this work. Under certain conditions on the weight function of the form of power function, sufficient conditions for basicity of this system are obtained in generalized weighted Lebesgue space.

Key words: system of exponents, weighted space, variable exponent, basicity.

Consider the following system of exponents

$$\{e_n(t)\}_{n\in Z}, \tag{1}$$

where $e_n(t)=\exp i(nt+\gamma(t)sign\, n), \gamma(t)=\alpha t+\beta\, sign\, t;\ \alpha,\beta\in R$ are real parameters. In the study of basis properties of the system (1) in $L_{p(\cdot),\rho}$, we will apply the method of boundary value problems, namely, we will consider the following Riemann problem

$$\begin{cases} F^+(\tau)+e^{-2i\gamma(t)}F^-(\tau)=g(\tau)e^{-i\gamma(t)}, \\ F^+\in H^+_{p(\cdot),\rho},\quad F^-\in H^-_{p(\cdot),\rho}, \end{cases}$$

where $g(\cdot)$ is some Holder function on $\partial\omega$. We will solve this problem by the method developed in monograph [1]. Here we need some auxiliary functions.

© Nasibova N.P., 2017

Statement 1. *Let* $p \in WL,\ p(t) > 0, \forall t \in [-\pi, \pi];\ \{\alpha_i\}_0^m \subset R$. *The weight function* $\rho(t) = |t|^{\alpha_0} \prod_{i=1}^{m} |t - \tau_i|^{\alpha_i}$, *belongs to the space* $L_{p(\cdot)}$, *if the following inequalities*

$$\alpha_i > -\frac{1}{p(\tau_i)},\ \ \forall i = \overline{0,m};$$

are satisfied, where $-\pi = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m = \pi,\ \tau_0 = 0,$

$$\tau_i \neq 0, \forall i = \overline{1,m}.$$

$$WL \overset{def}{\equiv} \Big\{ p : p(-\pi) = p(\pi); \exists C > 0, \quad \forall t_1, t_2 \in [-\pi, \pi]: |t_1 - t_2| \le \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |p(t_1) - p(t_2)| \le \frac{C}{-\ln|t_1 - t_2|} \Big\}.$$

The following fact plays an important role in obtaining the main results.

Property B [2]. *If* $p(t): 1 < p^- \le p^+ < +\infty$, *then the class* $C_0^\infty(-\pi, \pi)$ *(class of finite and indefinitely differentiable functions) is everywhere dense in* $L_{p(\cdot)}$.

By S we denote the singular integral

$$Sf = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma,$$

where $\Gamma \subset C$ is some piecewise Hölder curve on C. Define weight class $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$: $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)} \overset{def}{\equiv} \{ f :\ \rho f \in L_{p(\cdot)} \}$, furnished with a norm $\|f\|_{p(\cdot),\rho(\cdot)} \overset{def}{\equiv} \|\rho f\|_{p(\cdot)}$. The validity of the following statement is established in [15].

Statement 2 [3]. *Let* $p \in WL$, $1 < p^-$. *Then, singular operator S is acting boundedly from* $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$ *to* $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$ *if and only if*

$$-\frac{1}{p(\tau_k)} < \alpha_k < \frac{1}{q(\tau_k)}, \quad k = \overline{0,m}.$$

Define the generalized weighted Hardy classes $H^{\pm}_{p(\cdot),\rho}$. By $H^{+}_{p_0}$ we denote the usual Hardy class, where $p_0 \in [1,+\infty)$ is some number. Define $H^{\pm}_{p(\cdot),\rho} \equiv \left\{ f \in H^{+}_{1} : f^{+} \in L_{p(\cdot),\rho}(\partial\omega) \right\}$, where $\omega = \left\{ z \in C : |z| < 1 \right\}$ and f^{+} – are non-tangential boundary values on $\partial\omega$ of f. The following is proved in [4].

So, we have proved

Theorem 1. *Let* $p \in WL, p^{-} > 1$ *and the following inequalities be satisfied*

$$-\frac{1}{p(\tau_i)} < \alpha_i < \frac{1}{q(\tau_i)},\ i = \overline{0,m};$$

$$-\frac{1}{p(0)} < \alpha_0 + \gamma_2 < \frac{1}{q(0)};\ -\frac{1}{p(\pi)} < \alpha_1 + \gamma_1 < \frac{1}{q(\pi)};$$

$$-\frac{1}{p(\pi)} < \alpha_m + \gamma_1 < \frac{1}{q(\pi)};\ \gamma_1 = 2\left(\alpha + \frac{\beta}{\pi}\right);\ \gamma_2 = -\frac{2\beta}{\pi}.$$

Then the system $\{e_n\}_{n \in Z}$ *forms a basis for* $L_{p(\cdot),\rho}$.

Let us consider some special cases of this theorem.

Corollary 1. *Let* $p \in WL, p^{-} > 1$ *and* $\alpha_k = 0, k = \overline{2, m-1}; \beta = 0$. *If the following inequalities*

$$-\frac{1}{p(0)} < \alpha_0 < \frac{1}{q(0)};\ -\frac{1}{p(\pi)} < \{\alpha_1; \alpha_m\} < \frac{1}{q(\pi)};$$

$$-\frac{1}{p(\pi)} < \alpha_1 + 2\alpha < \frac{1}{q(\pi)};\ -\frac{1}{p(\pi)} < \alpha_m + 2\alpha < \frac{1}{q(\pi)},$$

hold, then the system of exponents $\left\{ e^{i(n+\alpha\, sign\, n)t} \right\}_{n \in Z}$ *forms a basis for* $L_{p(\cdot),\rho}$.

Consider a more complicated case.

Corollary 2. *Let* $p \in WL, p^{-} > 1$ *and* $\alpha_k = 0, k = \overline{2, m-1}; \alpha = 0$. If the inequalities

$$-\frac{1}{p(0)} < \alpha_0 < \frac{1}{q(0)};\ -\frac{1}{p(\pi)} < \{\alpha_1; \alpha_m\} < \frac{1}{q(\pi)};$$

$$-\frac{1}{p(0)}<\alpha_0-\frac{2\beta}{\pi}<\frac{1}{q(0)};\quad -\frac{1}{p(\pi)}<\alpha_1+\frac{2\beta}{\pi}<\frac{1}{q(\pi)};$$

$$-\frac{1}{p(\pi)}<\alpha_m+\frac{2\beta}{\pi}<\frac{1}{q(\pi)},$$

are fulfilled, then the system of exponents $\left\{e^{i\left(nt+\beta\, sign\, t\, sign\, n\right)}\right\}_{n\in Z}$ *forms a basis for* $L_{p(\cdot),\rho}$.

References

1. Gakhov F.D. Boundary Value Problems // Moscow: Nauka. – 1977. – 640 p.

2. Xianling F., Dun Z. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ // Journal of Math. Anal. and Appl. – 2001. – 263. – P. 424-446.

3. Kokilashvili V., Samko S. Singular integrals in weighted Lebesgue spaces with variable exponent // Georgian Math. J. – 2003. – V.10. – № 1. – P. 145-156.

4. Ismayilov N.A., Nasibova N.P. Bases Of Exponents In Weighted Hardy Classes. // International J. of Math. Sci. – 2013. – V. 7. – № 3. – P. 101-109.

Author aredentials

Nasibova Natawan Polad, researcher, Institute of Mathematics and Mechanics,National Academy of Sciences of Azerbaijan. E-mail: natavan2008@gmail.com

UDC 519.245:678.7

Mamedov Kh. R.

ON AN INVERSE PROBLEM FOR A CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Characteristic properties of the scattering data for the Schrodinger equation on the line are investigated.

Key words: Schrodinger equation, Jost solution, integral representation.

In this paper we consider the differential equation on the line $-\infty<x<+\infty$

© Mamedov Kh. R., 2017

$$-y''+q(x)y=\lambda^2\rho(x)y \tag{1}$$

where λ is a complex parameter, $q(x)$ is a real-valued function defined on the real line such that

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x)\left|q(x)\right|dx<+\infty\,. \tag{2}$$

In the case $\rho(x)\equiv 1$ the direct and inverse problem for equation (1) was completely solved in [1-7]. In the present work we investigate the characteristic properties of the scattering data by using the new integral representations of Jost solutions of equation (1) (see [8]).

References

1. Faddeev L. D., "The inverse problem in the quantum theory of scattering", Uspechi Mat. Nauk., 14(4), pp. 57-119, 1959 (in Russian), J. Math. Phys. 4, pp. 72-104, 1963.
2. Deift P., Trubowitz E., "Inverse scattering on the line", Comm. Pure Appl. Math., 32, pp. 121-251, 1979.
3. Guseinov I. M., "On the continuity of the coefficient of reflection of the Schrodinger one dimensional equation", Diff. Uravn. 21 (11), pp. 1993-1995, 1985 (in Russian).
4. Marchenko V. A., Sturm-Liouville Operators and Applications, vol. 22 of Operator Theory: Advances and Applications, Birkhauser, Basel, Switzerland, 1986.
5. Levitan B. M., Inverse Sturm-Liouville Problems, VSP, Zeist, The Netherlands, 1987.
6. Chadan K., Sabatier P. C., Inverse Problems in Quantum Scattering Theory, Springer, Verlag, 1977.
7. Huseynov H. M., Osmanli J. A., "Inverse scaterring problem for one dimensional Schrodinger equation with discontinuity conditions", Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 9(3), 332-359, 2013.
8. Nabiev A A., Mamedov Kh. R., "On the jost solutions for a class of Schrodinger equations with piecewise constant coefficients", Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 11(3), 279-296, 2015.

Author aredentials

Khanlar R. Mamedov, Professor of the Mersin University, Head of the Department of Mathematics, Turkey. E-mail: hanlar@mersin.edu.tr

UDC 517.984

Mochizuki Kiyoshi, Trooshin Igor

ON STABILITY OF INVERSE SCATTERING PROBLEM ON A LASSO-SHAPED GRAPH

We investigate a conditional stability of inverse scattering problem on a lasso-shaped graph.

Key words: inverse scattering problem, lasso-shaped graph.

Let Γ be a graph which consists of a half line $\gamma = \{x \mid 0 < x < \infty\}$ and a loop $\kappa = \{z \mid 0 < z < 2\pi\}$, joint at the point $\{x = 0\} = \{z = 0\} = \{z = 2\pi\}$. We consider on Γ the following spectral problem describing one-dimensional scattering of a quantum particle:

$$-u'' + \{q(X) - \lambda^2\}u = 0, \quad X \in \Gamma, \tag{1}$$

$$u(x = 0) = u(z = 0) = u(z = 2\pi), \tag{2}$$

$$u'(x = 0 + 0) + u'(z = 0 + 0) - u'(z = 2\pi - 0) = 0. \tag{3}$$

Here differentiation with respect to the variable X is understood as differentiation with respect to x, when $X \in \gamma$, and as differentiation with respect to z, when $X \in \kappa$. Differentiation is not defined at the vertex. The potential $q(X)$ is real-valued, and is required to satisfy $(1 + x)q(x) \in L^1(\gamma)$. Parameter λ is a complex number such that $\mathrm{Im}\lambda \geq 0$.

For any real $\lambda \neq 0$ there exists a solution $\Phi(X, \lambda)$ of problem ((1) – (3)) which is represented on γ uniquely as follows:

$$\Phi(x, \lambda) = e(x, -\lambda) - S(\lambda)e(x, \lambda); \tag{4}$$

Here $e(x, \lambda)$ are so called Jost functions, which behave on the closed upper half-plane of spectral parameter λ as

$$e(x, \lambda) = e^{i\lambda x}\{1 + o(1)\}. \tag{5}$$

The function $S(\lambda)$ is called the scattering function for the boundary value problem ((1) – (3)).

Eigenvalues of the problem ((1) – (3)) are called "visible at infinity" if there exist corresponding eigenfunctions which are not identically vanishing on γ. The problem ((1) – (3)) posses at most a finite number of

© Mochizuki Kiyoshi, Trooshin Igor, 2017

"visible at infinity" eigenvalues $-\lambda_j^2$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$, which are all negative and simple.

We call

$$m_j = \|E(x,i\lambda_j)\|^{-1}_{L^2(\Gamma)},\ j = 1,\ldots,n \tag{6}$$

the "weight numbers" of problem ((1) – (3)). Here $E(X,i\lambda_j)$ is an eigenfunction of operator L, corresponding to the eigenvalue "visible at infinity" $-\lambda_j^2$, which is normalized as $E(x,i\lambda_j) = e(x,i\lambda_j)$ for $x \in \gamma$.

We consider two problem of the type ((1) – (3)) with potentials $q^1(X), q^2(X)$. Theorem of Stability. Let

a. $q^k(x) \in C^1[0,\infty), k = 1,2;$

b. $\exists \alpha(x) \in C([0,\infty)) \cap L([0,\infty)), \alpha(x) -$ non-increasing and s.t. $\int_x^\infty q^k(t)dt \le \alpha(x), k = 1,2;$

c. $\lambda_j^1 = \lambda_j^2, m_j^1 = m_j^2,$ and $S^1(\lambda) = S^1(\lambda), \lambda \in (-A,A), \quad j = \overline{1,n},$

d. $\Delta(A) = \int_0^{A^{-1}} \alpha(x)dx < 1/2$

then for $\forall h > 1/A$

$$|q^1(x) - q^2(x)| \le 2\pi h\delta(x,h) + \frac{16\Delta(A)(1+9h\alpha(x))}{9h^2(1-2\Delta(A))}$$

where $\delta(x,h) = max_{k=1,2}\ sup_{x\le y\le x+\pi h} |\frac{d}{dy}q^k(y)|$

It is well known (see [1]) that the solution $e(x,\lambda)$ of equation (1) in γ can be represented as

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt, \tag{7}$$

where the kernel $K(x,t)$ is continuous on $0 \le x \le t < \infty$ and satisfies the equation

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)dt, \quad x > 0. \tag{8}$$

We have proved (see [2] – [4]), that for any fixed $x \in \gamma$ the kernel $K(x,t)$ of transformation operator (4) satisfies the equation

$$F(x+t) + K(x,t) + \int_x^\infty K(x,y)F(t+y)dy = 0, \quad 0 < x < t < \infty, \qquad (9)$$

where

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k x} + F_S(x), \qquad (10)$$

$$F_S(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(S_0(\lambda) - S(\lambda))e^{i\lambda x}d\lambda. \qquad (11)$$

Function $S_0(\lambda)$ is the scattering function of ((1) – (3)) in the case $q(X) \equiv 0$, $X \in \Gamma$ and function $F_S(x)$ is understood as the Fourier transform of the function from $L^2(-\infty,\infty)$.

To prove the theorem of conditional stability, we repeat the arguments ([1], pp. 364-380).

References

1. Marchenko V A 2011 Sturm-Liouville Operators and Applications, Revised Edition, AMS Chelsea Publishing.

2. Marchenko V, Mochizuki K and Trooshin I 2008 Inverse scattering on a graph containing circle (Analytic methods of analysis and differential equations: AMADE 2006)(Cambridge: Camb. Sci. Publ) p 237–243.

3. Mochizuki K and Trooshin I 2011 Inverse Scattering Problem for Schroedinger Operator on Graph Containing Loop "Seminar Notes of Mathematical Sciences 13", Ibaraki University, in Japanese, p 113–127.

4. Mochizuki K and Trooshin I 2012 On the scattering on a loop-shaped graph, "Evolution Equations of Hyperbolic and Schrodinger Type", Progress in Mathematics 301, Springer, p 227–245.

Author aredentials

Mochizuki Kiyoshi, Emeritus, Tokyo Metropolitan University, 8315-7, Hotaka, Azumino-shi, Nagano, 399-8303, Japan, mochizuk@math.chuo-u.ac.jp

Trooshin Igor, Global Learning Center, IEHE, Tohoku University, 41 Kawauchi, Aoba-ku, Sendai, Miyagi, 980-8576, Japan, trushin@m.tohoku.ac.jp

UDC 517.5

Nursultanov E.D., Tleukhanova N.T.

INEQUALITIES OF HARDY-LITTLEWOOD TYPE IN ANISOTROPIC SPACE

The Hardy-Littlewood type inequalities in anisotropic space are obtained.

Keywords and phrases: the Hardy-Littlewood inequalities, the anisotropic space, Fourier coefficients.

Let $1 < p < \infty$ and $\Phi = \{\varphi\}_{k=1}^{\infty}$ be the orthonormal system bounded in total, $\in L_p[0,1]$, $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$. In a case of $1 < p < 2$ the task about properties of summability of Fourier coefficients $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ can be solved by classical Hardy-Littlewood-Paley inequality [1]

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} |a_k|^p \le c\|f\|_{L_p}^p.$$

For the case when orthonormal system $\Phi = \{\varphi\}_{k=1}^{\infty}$ is regular and $2 \le p < \infty$, the corresponding inequality proved by E.D. Nursultanov in [2]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} |\bar{a}_k|^p \le c\|f\|_{L_p}^p,$$

where $\bar{a}_k = \frac{1}{k}\left|\sum_{m=1}^{k} a_m\right|$.

These inequalities are also valid in the multidimensional case (see e.g. [3]). For function from anisotropic spaces with a vector parameter $= (p_1, \dots, p_n)$, it is necessary to consider a problem of summability of Fourier coefficients when some parameters p_i more than 2, and others less or equal to 2. This work is devoted to the problem.

E. Nursultanov was supported by MON RK grants 4080GF4, N. Tleukhanova was supported by MON RK grants 5540GF4, 3311GF4.

References

1. Bary N.K. Trigonometric series. Volumes I and II. New York: The Macmillan Co. – 1964.

2. Nursultanov E.D. On multipliers of Fourier series in a trigonometric system // Math. Notes. – 1998. – V. 63. – № 2. – P. 205-2014.

© Nursultanov E.D., Tleukhanova N.T., 2017

3. Nursultanov E.D. On the coefficients of multiple Fourier series from L_p -spaces // Izv. Math. – 2000. – V. 64. – № 1. – P. 93-120.

Author aredentials

Nursultanov Erlan Dautbekovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor of Kazakhstan branch of Lomonosov Moscow State University, Astana. E-mail: er-nurs@yandex.ru

Tleukhanova Nazerke Tulekovna, doctor of physical and mathematical sciences, professor L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana. E-mail: tleukhanova@rambler.ru

UDC 517.98

Quliyeva A.A.

BASICITY OF THE PERTURBED SYSTEM OF EXPONENTS IN MORRY-LEBESGUE SPACE

This work considers the Riemann boundary value problem with the piecewise continuous coefficient in Morrey-Hardy classes. The obtained results are applied to the study of basis properties of the system of exponents with a piecewise linear phase in Morry-Lebesgue space.

Keywords and phrases: Morrey-Hardy classes, Riemann problem, bases, double system of exponent.

Let's consider the following homogeneous Riemann problem in classes $\left(H_+^{p,\alpha};\ {}_mH_-^{p,\alpha}\right)$:

$$\begin{cases} F^+(\tau)-G(\tau)F^-(\tau)=0\ ,\tau\in\gamma, \\ F^+(z)\in H_+^{p,\alpha}\ ;\ F^-(z)\in {}_mH_-^{p,\alpha}\ , \end{cases} \tag{1}$$

where

$$G\left(e^{it}\right)=\left|G\left(e^{it}\right)\right|e^{i\theta(t)},\ \ \theta(t)=\arg G\left(e^{it}\right), t\in[-\pi,\pi).$$

Consider the non-homogeneous Riemann boundary value problem

$$F^+(\tau)-G(\tau)F^-(\tau)=\ f(\arg\tau),\tau\in\partial\omega, \tag{2}$$

in Morrey-Hardy classes $H_+^{p,\alpha}\times {}_mH_-^{p,\alpha}, \alpha\in(0,1),\ \ 1<p<+\infty$, where $f\in L^{p,\alpha}$ is some given function.

© Quliyeva A.A., 2017

In this work proved the following

Theorem 1. *Let the coefficient* $G(\cdot)$ *of the problem (2) satisfy the conditions*

$$h_k = \theta(s_k + 0) - \theta(s_k - 0),\ k = \overline{1, r},$$

be the jumps of the function $\theta(t) \equiv \arg G(e^{it})$ *at the points of discontinuity*

$$\{s_k\}_1^r \subset (-\pi, \pi);\ h_0 = \theta(-\pi) - \theta(\pi).$$

Assume that the following inequalities are fulfilled

$$-\frac{\alpha}{q} \le \frac{h_k}{2\pi} < \frac{\alpha}{p},\ k = \overline{0, r}.$$

Then the following assertions are true with regard to the solvability of non-homogeneous problem (2) in the class $H_+^{p,\alpha} \times {}_mH_-^{p,\alpha}$ *:*

α) *when* $m \ge -1$, *the problem (2) has a general solution* $F(\cdot)$ *of the form*

$$F(z) = Z(z)P_m(z) + F_1(z),$$

where $Z(\cdot)$ *is a canonical solution of the homogeneous problem (1),* $P_m(\cdot)$ *is an arbitrary polynomial of degree* $k \le m$, $F_1(\cdot)$ *is a particular solution of the form*

$$F_1(z) = \frac{Z(z)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{Z^+(e^{it})} K_z(t)dt,$$

$K_z(\cdot)$ *is a Cauchy kernel, and* $f \in L^{p,\alpha}$ *is an arbitrary function;*

β) *when* $m < -1$, *the problem (2) is solvable if and only if the orthogonality conditions*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{Z^+(e^{it})} e^{ikt}dt = 0,\ k = \overline{1, -m-1},$$

are true, and $F(z) \equiv F_1(z)$ *is a unique solution of this problem.*

Consider the following dual system of exponents

$$\{A(t)e^{int}; B(t)e^{-int}\}_{n \in Z_+, k \in N},$$

with complex coefficients

$$A(t) = |A(t)|e^{i\alpha(t)};\ B(t) = |B(t)|e^{i\beta(t)},$$

on an interval $[-\pi,\pi]$, where $Z_+ = \{0\} \cup N$. We will require the fulfillment of the following conditions

$\alpha)$ $A^{\pm}; B^{\pm} \in L_\infty \equiv L_\infty(-\pi,\pi)$;

$\beta)$ $\theta(t) \equiv \beta(t) - \alpha(t)$ *is a piecewise continuous function on* $[-\pi,\pi]$ *with the points of discontinuity* $\{s_k\}_1^r : -\pi < s_1 < \ldots < s_r < \pi$, *and* $h_k = \theta(s_k + 0) - \theta(s_k - 0)$, $k = \overline{1,r}$ *- are the jumps of this function at the points* s_k, *and let* $h_0 = \theta(-\pi) - \theta(\pi)$.

More details on Morrey and Morrey-Hardy spaces can be found in [1-12].

References

1. Anna L. Mazuccato. Decomposition of Besov-Morrey spaces. In Harmonic Analysis at Mount Holyake // AMS series in Contemporary Mathematics. – 2003. – 320. – P. 279-294.
2. Yemin Chen. Regularity of the solution to the Dirichlet problem in Morrey space // J. Partial Diff. Equations. – 2002. – 15. – P. 37-46.
3. Lemarie-Rieusset P.G. Some remarks on the Navier-Stokes equations in R^3 // J. Math. Phys. – 1988. – 39(8). – P. 4108-4118.
4. Giga Y., Miyakawa T. Navier-Stokes flow in R^3 with measures as initial vorticity and Morrey spaces // Comm. In Partial Differential Equations. – 1989. – 14(5). – P. 577-618.
5. Duoandikoetxea J. Weight for maximal functions and singular integrals // NCTH Summer School on Harmonic Analysis in Taiwan. – 2005.
6. Peetre J. On the theory of $L^{p,\lambda}$ spaces // J. Funct. Anal. – 1964. – 4. – P. 71-87.
7. Zorko C.T. Morrey space // Proc. of the Amer. Math. Society. - 1986. – V. 98. – № 4. – P. 586-592.
8. Ky N.X. On approximation by trigonometric polynomials in L_u^p - spaces // Studia Sci. Math. Hungar. – 1993. – 28. – P.183-188.
9. Kokilashvili V., Meskhi A. Boundedness of maximal and singular operators in Morrey spaces with variable exponent // Govern. College Univ., Lahore. – 2008. – 72. – P. 1-11.
10. Israfilov D.M., Tozman N.P. Approxiamtion by polynomials in Morrey-Smirnov classes // East J. Approx. – 2008. – V. 14(3). – P. 255-269.

11. Bilalov B.T., Quliyeva A.A. On basicity of exponential systems in Morrey type spaces, International Journal of Mathematics. – 2014. – V. 25. – № 6. – P. 1-10.

12. Samko N. Weight Hardy and singular operators in Morrey spaces // Journal of Mathematical Analysis and Application. – 2009. – 35(1). – P. 183-188.

Author aredentials

Qulieva Aida Aghagul, researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. E-mail: aida.quliyeva@imm.az.

UDC 325.1

Xiyan Yang, Xiaohua Lin.

EFFECTS OF OUTWARD MIGRATION ON INWARD FDI: FROM SOCIAL NETWORKS TO HUMAN CAPITAL

We examine the link from outward migration to inward FDI in China by building a human capital component to the prevailing perspective of social networks. Several hypotheses are testing using several complementary datasets. According to our findings, there is a positive relationship between outward migration and inward FDI, but the relationship exists only for skilled migrants. Further investigations suggest that the effect of skilled migration is contemporaneous but not lagged and that the overall positive migration effects have been weakened over time.

Keywords: Foreign direct investment, Migration, human capital versus social network, China

Introduction

Two facts that have characterized globalization during the past decades are the massive movements of capital and people (Tung, 2007). Economists, who anchored their theoretical tenets on both capital and labor early at their discipline's formative stage and have long been keen on the possible impact of migration on international exchanges, are lately caught up with this paralleled surge in FDI and migration and have gradually accumulated empirical evidence on the migration-FDI relationships. By and large, this emerging literature support the consensus that migrant networks

© Xiyan Yang, Xiaohua Lin, 2017

promote FDI, an idea originated from studies of international trade (Gould, 1994) but running in counter to the proposition derived from the classic static trade theory that the relationship between out-migration and FDI should be substitute (Mundell, 1957). In spite of these seemingly consistent results, however, several questions remain unanswered in regards to the network effects. Since migrants tend to be diverse in composition, it is not clear how exactly they serve to facilitate FDI in their origin countries (Kugler & Rapoport, 2005). In essence, the network effects are largely conceptualized from a social capital perspective, but research in other contexts has shown a human capital effect of labor mobility (Corredoira & Rosenkopf, 2010). Although there is evidence that skilled migration exerts greater impact on FDI, satisfactory explanations have been elusive. The exploratory nature of this economic literature is also reflected in the omission of temporal effects in most of the studies or ambiguous findings in this regard (Singer, 2006).

The most remarkable aspect in this important discourse, however, is the non-presence of IB scholars. We have identified several studies that are centered around the network idea on subjects such as venture capital internationalization (Madhavan & Iriyama, 2009) and remittance-venture environment in developing countries (Vaaler, 2011), but no research has examined FDI from this conjecture. It is thus a serious omission in the IB literature since, if migration stimulates FDI, current FDI theories could be underspecified. In our view, it is at the intersection of migration and capital that there is potential for IB research to advance understanding in the domain of FDI and globalization (Madhavan & Iriyama, 2009).

The purpose of the current study is to examine the outward migration – inward FDI using several databases on China, currently the number one destination country for FDI and the largest source of emigration in the world. We build upon prior research, but add a human capital spin to the popular view that migrants help reduce transaction costs of foreign investors by serving as informal, social networks. In our views, migrants are an important source of human resources necessary for multinational companies (MNCs) to operate in newly established foreign markets, especially in the initial phase of entrance. While recognizing the informational-barriers-reduction effect of migration, we argue that it is human capital out of education and skills that help facilitate FDI in the origin countries. Largely confirming this human capital perspective and in the context of China, we find that the positive relationship between outward migration and inward FDI is significant only for skilled migrants, that the positive effect of

skilled migration is contemporaneous rather than lagged, and that the above effect has been diminished over time. Our findings contribute to a human capital theorizing of the relationship between outward migration and inward FDI and document support for the possibilities of brain circulation of benefits to the developing world. For MNEs and migrant communities, these findings offer important implications as we have entered an era when countries are increasingly connected through human and capital mobility, often hand-in-hand (Tung, 2007).

In the rest of the paper, we explain our research context in terms of migration and FDI in China, review background literature and subsequently develop our hypotheses. We then introduce our data sources and analytical approach, followed by a presentation of our empirical results. Finally, we discuss theoretical and practical implications of our findings and conclude with directions for future research.

Literature Review

The classic international trade theory, in consistence to the factor mobility paradigm, describe a substitutive (i.e., negative) relationship between emigration and inward FDI, assuming that the outflow of emigrants will lead to the decline of a country's labor volume, which led to the rise of capital-labor ratio, and the fall of the return rate of capital, resulting in FDI outflows (Mundell, 1957). Substitution between emigration and inward FDI may be also predicted from the perspective of technological externality that the proportion of skilled people in the total labor of the host country had a direct impact on the absorption capacity of FDI technology, impacting FDI spillover effects (Klenow and Rodriguez, 2005). In contrast, a new wave of research has emerged since the early 1990s around the idea that migration also generates network effects that positively impact on FDI in sending countries (Lucas, 2005). The idea was originated in the literature on international trade and is now well recognized in economics. However, IB scholars have been less attentive to the role of migration and contributed little to the understanding of the relationship between migration and FDI so far.

Focusing on the relationship between migration and international trade, Gould (1994) and others (e.g., Head & Ries, 1998; Rauch & Casella, 2003) find that migrant networks promote bilateral international trade by reducing transaction costs as well as by bringing a taste preference for certain products. In terms of transaction costs reduction, migrants may serve to overcome contractual barriers through their individual connections and/or informational barriers by providing information about home country

markets and institutions (Lucas, 2005). Since international investment involves greater complexities and uncertainties than trade, it is speculated that migrant network should play an even greater role in facilitating (Simone & Manchin, 2010).

At a first glance, the small but growing numbers of empirical investigations seem to support the consensus on a positive impact of migration on inward FDI, which economists have attributed to as network effects, that is, immigrants provide information about their home countries, thus reducing transaction costs by the foreign investors (Nijkamp et al., 2011). Particularly, Aroca and Maloney (2005) were able to show that the outflows of FDI from the U.S. from a specific sector to a specific country are triggered by the existing share of laborers in that sector from that country. A closer look at the economic quandaries, however, raises two questions concerning migration's composition and temporal dynamics, which are somehow interrelated. Kugler and Rapoport (2007) expected that the effects of migration are both substitutive and complementary and that the substitutive effect should be contemporaneous ("static") because outmigration drains labor pool whereas the complementary effect should be lagged ("dynamic") because migrants inform multinational companies about host country investment opportunities. Although overall both skilled and unskilled migrations were found positively associated with FDI inflows over the subsequent period, the findings became difficult to explain when taking into account the sector effect. In the manufacturing sector, for example, while migration with tertiary education had a positive impact on future inward FDI, those with secondary education was negatively associated with FDI over the same period. To date, the limited research has yet to establish unambiguously the role of skill/education level either empirically (Simone & Manchin, 2010). Conceptually, while most researchers assume that the information from skilled and unskilled migration should be different, they have yet to specify the types of information from the two groups. Only Kugler and Rapoport (2007) made a distinction: unskilled migrants are able to reveal information about labor force quality of origin country whereas skilled migrants "liaise between potential investors and partners (both private and public) in various aspects of setting up a production facility in the origin country of the migrant" (p. 156), that is, "take part into business networks" (Simone & Manchin, 2010: 601). Again, this raises the question concerning temporal implications of such differentiated effects (Kugler & Rapoport, 2007).

Despite an early call by Gillespie et al. (1999), FDI researchers have surprisingly contributed little to the discourse on the relationship between migration and FDI. However, the effects of migrant networks have been the focus of several studies in closely related contexts. Madhavan and Iriyama (2009) took the social embeddedness perspective (Granovetter, 1985) and considered globalization of venture capital industry as a process driven by both economic opportunities and network which is carried out by "transnational technical communities" embodied in professional and technical immigrants. Vaaler (2011) has taken the network effect notion to the effect of remittances on venture financing environment in developing countries and provided convincing evidence for the positive role of immigrant informal network in venture funding and founding in their origin place. Finally, since immigrants might opt for returning and setting up business ventures at origin, instead of merely sending money home, by taking advantage of their personal and professional ties across origin and destination countries as well as emerging market opportunities at origin (Saxenian, 2003; Lin, 2010).

Perhaps no country is more prominent than China in regards to the prevalence and importance of ethnic networks (Hamilton, 1996) and the migrant– motherland business linkage (Kao, 1993). Since China adopted the open-door policy in late 1970s, overseas Chinese have not only contributed a large proportion of FDI inflows, but also facilitated FDI by "other" foreign investors in China (Wang, 2001). Two studies have formally tested the widely speculated proposition that ethnic Chinese networks should help the formation of FDI in contemporary China. Controlling for traditional determinants of FDI and using population data of ethnic Chinese in investing countries, Gao (2003) found a significant positive role of "ethnic Chinese networks" in inward FDI over the period of 1984-1997. Singer (2006) emphasized the role social networks as a substitute for formal market institutions in the promotion of international investment and focused on how the positive role of ethnic Chinese networks sustain over time. According to the author, the positive effect of ethnic Chinese networks increased for the entire period of 1984-2003, but decreased for the more recent years between 1992 and 2003.

Hypothesis Development

From Ethnic Network to Human Capital

It is largely accepted that migrants serve as informal networks to help mitigate informational and transactional difficulties, thus facilitating the inflow of FDI (Kugler & Rapoport, 2007). Studies have shown that mi-

grant networks may promote international business transactions such as trade and investment by the following two mechanisms. First, migrant network can promote FDI by providing foreign investors important information that may otherwise be difficult or costly obtained. This kind of information includes critical information related to the domestic market, local policies and regulations, and potential business partners (Gould, 1994; Rauch & Casella, 2003). Second, in a weak international legal environment, the migrant network can prevent the breach of contract occurs through the implementation of community sanctions (Greif, 1993). Ethnic networks, including those in border-crossing setting, draw their strengths from common ethnic identity and community-sanctioned trust mechanisms (Portes et al., 2002. The contributions of Chinese migrants on promoting FDI in their country of origin dated centuries back (Kao, 1993) and have achieved eminence in China's ongoing growth process with prominent examples from the Silicon Valley where U.S. educated Chinese professionals played an active role in the process of foreign investment in China either through informal personal contact or a formal Association of overseas Chinese (Saxenian, 2003). Using large and complementary data sources on China, we test the following baseline hypothesis:

Hypothesis 1. There is a positive relationship between outward migration and inward FDI.

The notion of network effects needs to be further refined to ascertain how exactly ethnic networks work in promoting FDI in migrants' origin countries. Particularly, since recent evidence emphasized the greater impact of skilled migration, there could be different mechanisms through which out-migrants exert impact on FDI inflows. As reviewed earlier, only Kugler and Rapoport (2007) and Simone and Manchin (2010) spelled out a distinction: unskilled migrants afford information about labor force whereas skilled migrants take part in the business networks. Building upon these authors' contention, we argue for an explicit human capital view to be added on the general ideal of social networks. Specifically, we believe that skilled migrants could positively impact on inward FDI, *above and beyond information brought in by all migrants*, through their human capital endowments in the forms of education, technical skills, and relevant work experience in China. Given China's peculiar FDI environment, such contributions come through two major mechanisms that have some *immediate* effects on foreign investors' operations. First, the skilled migrants could provide foreign investors with information of technical nature, which is *operationally* necessary in light of China's mandate for FDI to carry "ad-

vanced" technologies and the relative concentration of FDI in the manufacturing sectors. Second, the skilled migrants could help identify suitable partners for foreign investors, which is *administratively* necessary given international joint ventures (IJVs) as the dominant form of FDI, especially when China first opened its doors (Luo, 2001). If migrants are able to absorb information about the destination country through employment at a MNE, they would become useful in facilitating technology transfer to China, e.g., helping install new assembling lines (Federici & Giannetti, 2006). According to Rangan (2000), in pursuing international business opportunities, MNEs tend to engage in a process "search" and "deliberation" concerning reliable and capable partners. Given the challenging cultural and institutional environments in China, foreign investors would need to engage skilled migrants to become insightful and effective in managing this process. In order for skilled migrants to play such a liaison role (Kugler & Rapoport, 2007), the foreign investor might decide to employ them, often sending them to China as part of their expatriate team. Previous literature has identified "learning by hiring" as a way to effectively access the migrants' prior firm (Oetti & Agrawal, 2008).

It is important to note that the human capital-based contributions would not be the only ones from skilled migrants, but contributions above and beyond the network-derived contributions (such as information about labor force quality) which would be made by all migrants including the unskilled. Thus summarizing the above discussions, we predict that skilled Chinese migrants should have a greater positive impact than unskilled Chinese migrants in facilitating FDI inflows in China. State formally, we put forward the following hypothesis for testing:

Hypothesis 2. The positive relationship between outward migration and inward FDI is stronger for skilled than unskilled Chinese migrants**.**

Temporal Effects of Migration

If the often-assumed "network effects" could be disentangled into two categories – social network and human capital based, respectively, it then follows that the positive effects of migration should be of either long-run or immediate. Intimate "local" knowledge in areas such as labor quality and regulatory regime should have a longer-term effect as MNEs strategize and configure their Chinese entry (Luo, 1999). And with their network with and in China, all Chinese migrants should be able to provide such information. In contrast, human capital derived effects, such as information about a particular joint venture partner or employment as a front line engineer in a MNE's assembly plant in China, are project specific and

immediate. As discussed in the previous section, all Chinese migrants should be responsible for the long term effects, but only skilled migrants are able to supply the latter type of information or service with immediate effects. We use the words lagged for long-term and contemporaneous for immediate to label the relationships between outward migration and inward FDI the following hypothesis:

Hypothesis 3. The positive relationship between inward migration and inward FDI are both contemporaneous and lagged.

Finally, we propose that the positive effects of Chinese migrants on inward FDI, both contemporaneous and lagged, should be weakening over time in China. Migrants as informal network exist to substitute formal institutions (Vaaler, 2011) and the exact reasons for the usefulness of Chinese migrants in promoting FDI has been the imperfection of China's market and regulatory institutions (Gao, 2003). Since, slowly but clearly, China has endeavored to improve and enhance a market-based institutional environment, the need for informal channels, such as those enabled by migrant networks, should be weakened (Singer, 2006). We emphasized the role of skilled migrants in regards to IJVs. However, since the Chinese government has legitimized wholly foreign owned enterprises over time, so has the role for managing the process of identifying and dealing with joint venture partners. As foreign investors have built up their presence, a MNE would be increasingly more able to practice "learning by hiring" beyond employing the newly landed migrants in their China operations, for instance, through personnel mobility within and between MNEs networks. We test the following hypothesis:

Hypothesis 4. The positive relationship between outward migration on inward FDI should be weakening over time.

Methodology

Models

While our focus is outward migration, we recognize other relevant and important variables in predicting inward FDI. We build upon the knowledge-capital model, an analytical formalization of the OLI framework (Dunning, 1977, 1981) which is proposed by Markusen (1997, 2002) and empirically specified by Carr, et al. (2001). Our basic empirical specification is represented by Model(15).

$$\ln FDI_{i,j} = \alpha + \delta Migration_{i,j} + \beta_1 \ln GDPSum_{i,j} + \beta_2 \ln GDPDifference_{i,j} + \beta_3 \ln Distance_{i,j} + \beta_4 SkillDifference_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad (15)$$

Where i denotes the host countries of migrants, j denotes the origin country of migrants (i.e., China for current paper); ε denotes the error term.

FDI represents FDI inflows to China; and ln indicates the log form. Consistent with Singer (2006), we measure FDI inflows using the average inflow during the period, which avoids the problem of volatility of FDI. GDPSum represents the sum of GDP of China and FDI source countries, and is estimated on the actual GDP (2000 figures in US$). According to the horizontal FDI theory, FDI is positively correlated with the market size of the two countries (xxxx); so the expected sign is positive. GDPDifference denotes the difference of GDP between FDI source country and China, and is estimated on the actual GDP (2000 figures in US$). According to the horizontal FDI theory, its sign should be negative. Distance represents the geographical distance between the FDI source countries and China, and is estimated with the geographical distance between Beijing and the capital of the FDI source countries. Following Gao (2003), the distance is used as a proxy for trade costs. However, the predictions of vertical FDI theory and horizontal FDI theory differ with regards to the effect of cost of trade: trade cost is negatively correlated with vertical FDI, but is positively correlated horizontal FDI. Besides, the cost of trade cooperation generally will increase along with increased geographical distance. The sign of distance is thus ambiguous.

SkillDifference denotes the difference of skilled labor ration between FDI source country and China, is estimated with the difference of the skilled labor ratio, i.e. the ratio of people with tertiary education to its total population in one country. Horizontal FDI and vertical FDI theory on this variable sign predict exactly the opposite. When the greater similarity of labor skill level between the two countries, horizontal FDI theory predict that more FDI inflow, but vertical FDI theory predict that less FDI inflow. The related empirical studies get different results (Carr et al., 2001). Therefore, its sign is ambiguous. In addition, for the measurement of SkillDifference, our method is different from that of Gao (2003) and Singer (2006). Singer (2006) uses GDP per capita as a proxy of labor skill differences between the two countries, and Gao (2003) use skilled labor ratio of FDI source country, instead of the difference of the skilled labor ratio between FDI source countries and China.

$Migration_{i,j}$ is the core variable vector that we interested in. Given our research needs and data availability, this variable is constructed and measured in three different ways.

First, in order to examine the relationship between total migrants and FDI with the WB and DM dataset, we set the variable $MigrantNetwork_{i,j}$ to

proxy China's aggregate migrant network in FDI source country, measured by the proportion of migrants from China to the host country's population, which is consistent with the existing literature on migration (Gao, 2003; Singer, 2006), with the assumption that the greater the migrants proportion of the population in host country, the greater the influence of this group network. To test the same relationship with the OC dataset, we set the variable $OverseasChineseNetwork_{i,j}$ to proxy the total migrant network in FDI source country, measured by the proportion of overseas Chinese to the host country's population. To account for potential effects of cultural similarity, we also add a dummy variable vector, including one for Southeast Asia and the other for Language. The former is used to distinguish Southeast Asian countries (regions), which are known exposed to the influence of the Chinese culture due to large numbers of Chinese decedents. The latter is used to distinguish the countries whose official language is Chinese. For both dummies, the value of 1 represents yes and 0, otherwise. Sample countries distinguished by the two dummy variables are indicated in table1.

Second, to examine the differential effects of immigrants on FDI due to their skill levels with the DM dataset, we use $MigrantNetwork_{i,j}^{tertiary}$, $MigrantNetwork_{i,j}^{secondary}$, and $MigrantNetwork_{i,j}^{primary}$ to proxy China's migrant network in FDI source country, measured by the proportion of migrants with tertiary, secondary, and primary education, respectively, to each segment of the FDI source population with corresponding education level.

Model (16), *the basis for testing P3 and P4 as well as P2 concerning the temporal* effect of migration on FDI, is originated from Model(15) and informed by Kugler and Rapoport (2005):

$$\ln FDI_{i,j}^{t} = \alpha + \gamma_1 \ln MigrantStock_i^{t-1} + \gamma_2 \ln MigrantFlow_i^t + \beta_1 \ln GDPSum_{i,j}^t + \beta_2 \ln GDPDifference_{i,j}^t + \beta_3 \ln Distance_{i,j} + \beta_4 SkillDifference_{i,j}^t + \varepsilon_{i,j}^t \quad (16)$$

Here the meanings of i, j, ε, $Distance_{i,j}$ remain the same as with Model (1). $FDI_{i,j}^t$ denotes the FDI inflows from country i to China for the period t ; $GDPSum_{i,j}^t$ denotes the sum of GDP of country i and China for the period t; $GDPDifference_{i,j}^t$ denotes the difference of GDP of country i and China for the period t; $SkillDifference_{i,j}^t$ denotes the difference of

skilled labor ratio between country i and China for the period t. The measurement methods and expected sign of the variables are consistent with Model (1). To investigate the temporal effect of migration on FDI, we construct $MigrantStock_i^{t-1}$ denoting migration stock from China in the FDI source country for the period t-1 and $MigrantFlow_i^t$ denoting migration flow from China to the FDI source country for the period t.

Addressing endogeneity concern

Prior to estimating our models with OLS, we want to address the potential problem of endogeneity, since FDI inflows may also influence migration. For example, FDI inflows could have negative influence on outward migration as they bring capital, new technologies and knowledge spillover to host countries (Alfaro et al., 2004) and multinationals may provide better paid jobs and more career development opportunity in migrant source countries (Lipsey & Sjoholm, 2004). Alternatively, the presence of FDI may positively impact migration. For instance, people of experience with multinational companies tend to have higher chance of being sent to the FDI source country (Javorcik, 2011).

We use the instrumental variable approach to address this concern. From a list of candidate instruments in the first-stage migration equation (Beine et al., 2008), we select life expectancy at birth and use the difference between FDI source country and China as the instrumental variable for total migration. Since life expectancy is indicative of a country's general standard of living, people are likely to migrate to countries with higher life expectancy at birth. As such, there should be a positive correlation between migration and the difference in life expectancy at birth between FDI source country and China. On the other hand, there is no reason to expect a direct relationship between the difference of life expectancy and FDI inflow. As reported in Appendix A, our test verifies that the difference in life expectancy at birth is a good instrumental variable.

Databases

Constrained by data availability and also consistent with Singer (2006), we adopted a cross-sectional approach. We consider the time span of 1984-2010 which represents three distinct phases of FDI inflows in China: 1984-1991, 1992-2001 and 2002-2010. Up to 1984, FDI was largely no-existent in China as the economy had opened up only of late. The period 1984-1991 is considered the *start-up phase* when the country witnessed first wave of large FDI inflows. Particularly, the volume of inward FDI in 1984 alone, the year seeing flagship Sino-Foreign joint ventures

such as Beijing Jeep being signed, was almost equal to the sum of the previous four years. 1992-2001 is the *steady growth phase*, as foreign investors re-established their confidence in China after the turmoil of 1989 Tiananmen event. Finally, the WTO admission in 2001 led China to the *leapfrog development stage* when FDI inflows gathered steam and started dramatic growth. The evolution of FDI inflows in China can be seen from Figure 1.

Figure 1 goes about here

There exist two types of "migration" data concerning China: one on overseas ethnic Chinese and the other on ongoing migration. Each database has its own advantages and disadvantages. In regards to compatibility and consistency, the ethnic Chinese databases are inferior to migration data since the definition of overseas Chinese is often vague and inconsistent. In contrast, migration databases contain census data on foreign-born population, which is consistent with the definition by the United Nations. Unfortunately, the Chinese migration data is available only for OECD countries. The migration data is divided into two categories: stock data and flow data. The migration flow dataset only include aggregate data, without layered data by education level. Given our focus on the skilled versus non-skilled migration, we use the migration stock data.

Migration stock data is from two sources: one is from the table "Bilateral Migration Database 1960-2000" of World Bank at http://go.worldbank.org/092X1CHHD0. It is referred to as the WB dataset in the current study. The WB dataset provides total Chinese migration stock data in 1980, 1990, 2000, covering 29 OECD countries. The other source is the dataset "International migration by educational attainment (1990-2000)-Release 1.1" at http://perso.uclouvain.be/frederic.docquier/oxlight.htm. This dataset, labeled the DM dataset in the current study, has been the mostly used data source in the migration literature. It provides layered Chinese migration data corresponding to education in 1990 and 2000, and covers the same 29 OECD countries as the WB dataset. The coverage of each database is detailed in Table 1.

Table 1 goes about here

Compared with the migration databases, the range of available overseas Chinese datasets is broader, covering all major source countries of

FDI and thus will serve as good complements to the migration databases. The overseas Chinese database used in the current study, labeled OC dataset, covers 65 countries (see Table 1) with the 1980 data being compiled from Poston and Mei (1990) and the 1990 data from Gao (2003).

Variables

Migrants in the two migration databases are foreign born, 25-year or older, long-term legal migrants in the OECD countries. Students and other short-term foreign individuals are largely excluded. Skills of migrants are measured by education levels (Docquier & Marfouk, 2006) in accordance with the International Standard Classification of Education by the United Nations: Low-skilled migrants are those with primary education (i.e., 0 to 8 years of schooling); medium-skilled migrants are those with secondary education (i.e., 9 to 12 years of schooling completed); and high-skilled migrants are those with tertiary education (i.e., 13 years and above).

Although there are skilled emigrants from China to non-OECD countries, such as Malaysia, the Middle East, South Africa, 90% of skilled emigrants of China live in OECD (Docquier & Marfouk, 2006).

Data on annual FDI inflows into China by source country are taken from Gao (2003) for the years 1984-1991 and from the National Bureau of Statistics of China (NBSC) for the years 1992-2010. To keep consistent with the GDP data, the FDI data are deflated by 2000 US dollar. We do not distinguish between vertical FDI and horizontal FDI, which is consistent with the convention in the existing literature and is allowed for by our empirical model (Singer, 2006).

GDP data is compiled from the World Bank through its World Development Indicators online as well as from NBSC which provides GDP data on Taiwan, Hong Kong, and Macao. The World Development Indicators also provides data on total population and population with tertiary education for all countries, except for China for which the data comes from NBSC. Based on the above data, we calculated skill differences between the countries in terms of SkillDifference. Data on distance between China and source countries of FDI and language of each country are available from Macalester University's website on international trade information at (http://www.macalester.edu/research/economics/PAGE/HAVEMAN/Trade.Resources/TradeData.html).

Results and Discussions

Model(15) is applied to DM and WB database, respectively to test H1 that out-migration positively predicts inward FDI. As shown in Table 2, OLS results largely support H1. Particularly, results from the two data-

bases are essentially similar. Except for the period 1984-1991, the migrant network (see MigrantNetwork in rows 2-4 of table 2) is positive and significant at the 1% level. For the aggregate migrants, from 1992 to 2001, every 1% increase in the proportion of the migrant population in the host country will lead to 2.6% (4.6% corresponding to WB dataset) rise in FDI inflow; from 2002 to 2010, every 1% increase in the proportion of migrant population in the host country will result in the 1.7% (2.4% corresponding to WB dataset) rise in FDI inflow. Consistent with the knowledge-capital model (Markusen 1997, 2002), most of the other variables have the expected signs and are significant at the 1% level.

Table 2 goes about here

H2 that positive relationship between outward migration and inward FDI is stronger for skill than unskilled migrants is tested by applying Model(15) to DM dataset, the only available migration dataset by education level. The results, reported in Table 3, support H2. During both time periods, migrant network with tertiary education is positively and significantly associated with inward FDI at the 1% level. For the period 1992-2001, each 1% rise in the proportion of the Chinese immigrant population with tertiary education in FDI home country will lead to 1.9% rise in FDI inflow; and for the period 2002-2010, every 1% rise in the tertiary migrant network in FDI home country will lead to 1.2% rise in FDI inflow. The effects of migration with secondary and primary education are statistically insignificant, and this is true for the two periods (see MigrantNetwork in rows 4-5 and 7-8 of table 3). We conducted F-test with the null hypothesis that the coefficient for is zero, and the null hypothesis can't be rejected (the two F statistics corresponding to two research stage equal to 0.37 and 0.97 respectively).

Table 3 goes about here

H3 suggests that the positive relationships between outward migration and inward FDI are both contemporaneous and lagged. To test this hypothesis, we apply Model(16) to WB database. Results, as shown in the columns 2-4 of Table 5, lent support for H3. Except for contemporaneous emigration for the period 2002-2010, there do exist positive relationships for the contemporary and past emigration for all periods (period 84-91: for past emigration, b=0.184, n.s., for contemporary emigration, b=0.514, n.s.;

period 92-01: for past emigration, b=0.347, p<0.05, for contemporary emigration, b=0.36, p<0.05, period 02-10: for past emigration, b=0.816, p<0.01.)

In order to find whether there are special relationships for the past and contemporary skilled migrants on FDI, we also apply Model(16) to DM dataset, we identify a significant and contemporaneous effect from skilled migration, but no significant effect from unskilled migration – neither contemporaneous nor lagged. As shown in Table 4, the contemporaneous emigration of skilled is significant at the level from 1% to 10% (Total migrants with different skill levels classified by past and contemporary emigration: b=0.395, p<0.1; Contemporary migrants: b=0.460, p<0.01; Tertiary Contemporary migrants: b=0.546, p<0.01). The effect of past emigration, including both skilled and the unskilled, are not statistically significant (MigrantStock_tertiary: b=0.0705, n.s.; MigrantStock_unskilled: b=-0.000942, n.s.). Besides, the contemporaneous emigration of unskilled is also not significant (Total migrants with different skill levels classified by past and contemporary emigration: b=0.165, n.s.; Contemporary migrants: b=0.157, n.s.).

Table 4 goes about here

H4 assumes that the positive relationship between outward migration on inward FDI should be weakening over time. Our results, reported in table 3， 4 and 5, support H4. According to table 5, the effect of contemporary emigration has weakened over the three periods (see columns 2- 4 in table 5, b=0.514 for period 84-91; b=0.36 for period 92-01; b=-0.114 for period 02-10.). This confirms the temporary pattern concerning skilled migration in the 1990s (see table 3, b=1.88 for period 92-01, b=1.22 for period 02-01.). Importantly, our results strongly prove that the effect of total emigration on the whole, without classified by contemporary or past emigration, or by skilled or unskilled emigration, has weaken over three periods（see columns 5-7 in table 5 , period 84-91: b=0.704, p<0.05; period 92-01: b=0.705, p<0.01; period 02-10: b=0.595, p<0.01）.

Table 5 goes about here

Implications and Conclusion

Theoretical Implications

In the context of People's Republic of China, our findings suggest that (1) outward migration is positively associated with inward FDI; (2) the positive effect is mainly due to skilled migration; (3) the effects of skilled migration is largely immediate; and finally (4) the immediate effects have decreased over time. These findings contribute to a refined understanding of role of migration on FDI formation by adding a human capital component to the acknowledged network effects and highlight opportunities for theory development in the IB field, including but not limited to theory of FDI. Important practical implications can also be drawn.

The emerging literature on the outward migration – outward FDI relationship, though still in its infancy, has largely supported a consensus on the positive effect of migration. Thus, our finding confirming H1 may appear to be less interesting. The significance of this finding, however, lies in our research context: no theory of migration – FDI linkage can be fully established without taking into account China as the top destination of FDI and largest source of out-migrants in the recent decade. The network effects, either through providing difficult-to-obtain information or socially-sanctioned contract fulfillment/enforcement, should only accrue in migrants-sending countries where there exist significant informal barriers to foreign investors, and this has exactly been the case in China which has challenged foreign investors with its weak legal infrastructure, lack of transparency, and overt reliance on personal network for business dealings (Wang, 2001; Gao, 2003; Singer, 2006). Taking advantage of two mutually validating databases, we confirm a complementary link between migration and capital flows in contemporary China, a confirmation that centuries-old overseas Chinese – motherland connection has been extended or renewed in the modern days.

Our major contribution comes with H2 and our finding that only skill migration has a significantly positive relationship with FDI inflows in China. Coming from a human capital perspective, we have disentangled the widely assumed "network effects" into two broad categories, one that is consistent with the prevailing view of social network and contributed by all migrants, and the other that requires education endowment, skills, and relevant work experience at origin. Grounded in the context of China's contemporary FDI regime – e.g., China's mandates for technology transfer and IJVs, this enhanced view of migrant networks enables us to explain unambiguously why skilled migration has often showed greater impact on

FDI (Nijkamp et al., 2011). Note that the immigration policies in Western countries such as Canada have long maintained a focus on skilled migrants. While being targeted for enhancing national technological capability, these skilled immigrants have been also employed by MNEs to facilitate their international operations (Hume, 2012). We believed that the human capital endowments would add "weights" to skilled migrants so that their effects on inward FDI would be greater than those from unskilled Chinese migrants. However, our results show that the effects of unskilled are insignificant. While this is consistent with some of recent empirical work, we particularly wonder about the value of information provided by unskilled migrants, such as information about labor force quality in sending countries (Kugler & Rapoport, 2007), to foreign investors in fast-changing markets like China?

Add a human capital view to the role of migrant network also allows for theorizing the temporal relationships between out-migration and FDI inflows in China. We hypothesized that all migrants, acting through connections with and in China, would contribute general-nature information that would influence foreign investors' entry decision in longer term. According to our findings, not only the effects of unskilled migration are insignificant, but the positive effects of skilled migration are immediate and do not have a bearing on future FDI inflows. In our view, it is so because of the peculiar contributions of skilled migrants to foreign investors, that is, providing project specific information and facilitating IJV formation and operation. When migrants' "skills" are attached to particular FDI projects, their impact would cease as soon as the projects are set up, especially in markets such as China where technologies have changed in accelerated pace and become obsolete overnight (Yoshida, 2005).

The positive effect of skilled migration may be explained by the notion of liability of foreignness, which will reduce over time as foreign investors have accumulated local experience (Lu & Beamish, 2004). It is thus no surprise that the value of skilled migrants shall decrease over years. Not only a particular foreign firm can reduce its reliance on skilled migrants but its improved China-specific capability should also spill over to all investors from the same destination country. In other words, as more and more investors are settled in China, the informational advantages of Chinese nationals will be diminishing, and the skills and knowledge in dealing with China-specific challenges (e.g., Guanxi) will be enhancing among investors from a particular destination country.

Our findings point to a direction for expanding theories of FDI. We echo the growing evidence about a positive relationship between skilled migration and FDI, a *human-capital* logic which to a certain degree contradicts the static trade theorizing of labor-capital mobility. If this finding could be generalized across countries at different FDI trajectories, the need for a new theory of FDI will surface. In our view, this newly found relationship is largely derived from the nature of contemporary migration, which is qualitatively different from "labor" merely as a production factor. For this reason, IB scholars will have to explicate the role of migrant networks to fully specify the mechanisms of FDI formation.

Based on our findings, IB scholars could make an impact on the ongoing discourse over so-called brain drain/gain phenomenon. Recent research has largely focused on returning or transnational entrepreneurs emerging from the immigrant communities (e.g., Saxenian, 2003). And these individual agents are often contrasted to MNEs for their propensity and capabilities with MNEs in regards to contributions to technological capacity building (Lin, 2010). However, if skilled migrants have made a significant impact on FDI inflows and particularly if such FDI serves as a vehicle for technology transfer, we can conclude with confidence that a brain gain has occurred. In a way, the current study has helped substantiated the claim that China is one of the few countries that have effectively turned brain drain into a situation of brain gain or brain circulation (Wang et al., 2011).

Practical Implications

To the Chinese government, which has long been concerned about "brain drain" to Western advanced economies, the positive impact of skilled emigration on FDI inflows are largely unexpected. While the country's success in attracting foreign investment has mostly been attributed to its abundant supplies of low-cost labor, contributions have also come from the country's human capital endowments by way of skilled emigration. In this sense, the loss of the "brains" is at least partially compensated by a gain in burgeoning inward FDI.

Western countries have targeted skilled immigration for enhancing their national innovation performance. However, Western firms should also be aware of the potential of migration networks for facilitating their investment in the migrants' origin countries. In China's case, although the value of skilled migration as informal networks may not be for the long haul and will decrease over time, Western investors that are new to China can still take advantage of skilled immigration in mitigating environmental

uncertainties and operational difficulties in light of the country's unfinished endeavor toward perfecting a rational-legal infrastructure and everlasting culture of Guanxi (Wang, 2001).

A human capital perspective of migration effects also brings about implications for skilled Chinese migrants. When China just opened its door some three decades ago, Western firms had hard time to collect reliable information about China and to overcome strategic and operational obstacles in their China operations. Therefore, it was almost universal for these firms to hire some Chinese professionals, often from among new immigrants, as part of their "Chinese team". These skilled immigrants are perceived more *current* than settled overseas Chinese in terms of knowledge about China and more *reliable* than local Chinese in terms of identification because of their newly acquired residence/citizenship status in the destination country. However, the value of their "skills" appears to be short-lived given the fast pace of technological and institutional changes in China. And as China has accumulated FDI stocks from a destination country, the need for fresh skilled migrants will be diminished altogether. With this realization, the migrants could opt for a "home alone" strategy, setting up new ventures by themselves in China. Combined with acquired new skills and connections in destination countries, returning migrants could be advantaged even over MNEs who remain suffering from the liability of foreignness (Lin, 2010). Evidence from Beijing's Zhongguancun Science Park shows that foreign investors are already faced with competition from Western-returned entrepreneurs as a legitimate force in innovation and economic internationalization (Wang et al., 2011).

Limitations and Future Research

While contributing to a new perspective on the migration-FDI linkage, the current study has also pointed to areas for future research, which are not fully addressed here. First, we find that the positive impact of migration is limited to the skilled ones, but this finding could be context specific. In a different but related research stream, Vaaler (2011) disputed the notion that only educated immigrants would contribute to a developing country's venture financing environment. To a large extent, this touches upon our distinction between social network versus human capital based effects of migration. We wonder to what extent our findings are China-bound as inward FDI may have been scrutinized on technological advancement more consciously in China than in other developing countries. If that is the case, social capital-centered network effects could be more

prominent such that unskilled migrants might be able to contribute to FDI inflows significantly.

Second, our findings on the temporal pattern of the migration-FDI relationship should be received with caution because we did not have true longitudinal data to work with. For example, some scholars proposed a positive link between migration and FDI due to an "incentive effect" that high return prospects of emigrants possibly promote more home-country nationals to invest in higher education and therefore lead to more substantial increase in the level of human capital of the home country, which in turn help attract more FDI (Beine et al., 2008). Given the data needs, testing such an interesting proposition in China posts a challenge for future research.

Appendix

A. Detecting endogeneity

We employ the instrumental variable approach to address the concern about potential endogeneity of the migration variable. Table 6 presents the F test results using the WB dataset. According to Staiger and Stock (1997), where there are only one endogenous variable and one instrumental variable, the F test value of first-stage regression of greater than 10 indicates that problem of weak instrumental variables is non-existent.

Table 6 goes about here

We then use the Hausman test to compare the estimation results from the instrumental variable approach and OLS. According to the P-values in Table 6, the results from the two methods are not significantly different.

B. Robustness Check

Although sample countries in the WB dataset and DM dataset, which cover 29 OECD countries (see Table 1), should be appropriate for addressing our research questions, we replicate our tests using OC dataset, which covers a larger number of FDI source countries, to ensure that our results are robust. As shown in Table 7, the test of Model (1) with the OC dataset (overseas Chinese dataset) reveals a similar positive effect of total migrants on FDI inflows (referring to Table 2).

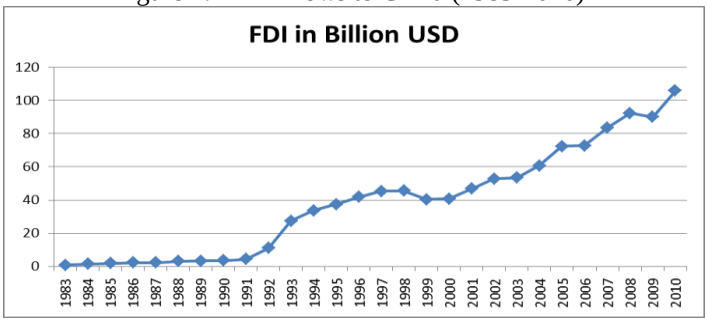
Table 7 goes about here

As expected, the coefficient sign of overseas Chinese network is positive, after adding dummy variables. For the period 1992-2001, the variable

OverseasChineseNetwork is significant at the 1% level. Comparing the time periods, we can see that the positive effect of the overseas Chinese network on FDI inflows rise from 1980s to 1990s. This result is consistent with those from table 2 using the same measurement. The signs for control variables, including GDPSum, GDPDifference, Distance, and SkillDifference, are all in line with expectations. In short, the robust tests suggest that our conclusion that migration is positively associated with FDI inflows is not subject to measurement errors due to sample size.

Figures

Figure 1. FDI inflows to China (1983-2010)



Source: National Bureau of Statistics of China.

Tables

Table 1. Sample countries

Country name	65 countries (regions)	29 OECD members	countries (regions) speaking Chinese	Southeast Asia countries(regions)
Egypt	√	-	-	-
Ireland	√	√	-	-
Austria	√	√	-	-
Australia	√	√	-	-
Macao	√	-	√	√
Pakistan	√	-	-	-
Paraguay	√	-	-	-
Panama	√	-	-	-
Brazil	√	-	-	-
Belgium	√	√	-	-
Iceland	-	√	-	-

Country name	65 countries (regions)	29 OECD members	countries (regions) speaking Chinese	Southeast Asia countries(regions)
Poland	√	√	-	-
Bolivia	√	-	-	-
Denmark	√	√	-	-
Germany	√	√	-	-
Dominican Republic	√	-	-	-
Ecuador	√	-	-	-
France	√	√	-	-
Philippines	√	-	-	√
Fiji	√	-	-	-
Finland	√	√	-	-
Columbia	√	-	-	-
Costa Rica	√	-	-	-
Korea	√	√	-	√
Netherlands	√	√	-	-
Honduras	√	-	-	-
Canada	√	√	-	-
Czech	-	√	-	-
Kenya	√	-	-	-
Laos	√	-	-	√
Libya	√	-	-	-
Luxembourg	√	√	-	-
Madagascar	√	-	-	-
Malaysia	√	-	-	√
Mauritius	√	-	-	-
United States	√	√	-	-
Peru	√	-	-	-
Myanmar	√	-	-	√
Mexico	√	√	-	-
South Africa	√	-	-	-
Nicaragua	√	-	-	-
Nigeria	√	-	-	-
Norway	√	√	-	-
Portugal	√	√	-	-

Country name	65 countries (regions)	29 OECD members	countries (regions) speaking Chinese	Southeast Asia countries(regions)
Japan	√	√	-	√
Sweden	√	√	-	-
Switzerland	√	√	-	-
Sri Lanka	√	-	-	-
Sudan	√	-	-	-
Taiwan	√	-	√	√
Thailand	√	-	-	√
Turkey	√	√	-	-
Guatemala	√	-	-	-
Uruguay	√	-	-	-
Spain	√	√	-	-
Greece	√	√	-	-
Hong Kong	√	-	√	√
Singapore	√	-	-	√
New Zealand	√	√	-	-
Hungary	√	√	-	-
Jamaica	√	-	-	-
Iran	√	-	-	-
Italy	√	√	-	-
India	√	-	-	√
Indonesia	√	-	-	√
Britain	√	√	-	-
Chile	√	-	-	-

Table 2. OLS specification: total migration, using DM dataset and WB dataset.

Depended variable Ln FDI	DM dataset 92-01	DM dataset 02-10	WB dataset 84-91	WB dataset 92-01	WB dataset 02-10
MigrantNetwork80			2.7		
			(4.44)		

MigrantNetwork90	2.631***			4.56***	
	(0.825)			(1.4)	
MigrantNetwork00		1.7***			2.36***
		(.346)			(.403)
Ln GDPSum	3.210***	3.26***	3.07**	3.22***	3.15***
	(0.421)	(.433)	(1.25)	(.437)	(.438)
Ln GDPDifference	-0.912***	-.865***	-.495	-.996***	-.815***
	(0.303)	(.259)	(.677)	(.319)	(.251)
Ln Distance	-1.766***	-1.47***	-.662	-1.9***	-1.44***
	(0.337)	(.44)	(.704)	(.368)	(.466)
SkillDifference90			-.789		
			(.843)		
SkillDifference95	-0.857***			-.903***	
	(0.0971)			(.1)	
SkillDifference05		-.64***			-.615***
		(.137)			(.136)
constant	-15.84**	-24.1***	-30.5*	-13.1**	-23.2**
	(5.907)	(7.85)	(15.8)	(6.23)	(8.39)
N	29	29	21	29	29
R^2	.846	.78	.566	.845	.788
Adjusted R^2	.813	.732	.421	.812	.743
F statistics	36.8	17.5	7.99	36.6	17.7

Note: ***, ** and * denote significant at 1%, 5% and 10% levels; numbers in brackets is robust standard error. 2. GDPDifference first taking the absolute value, before taking log. 3. SkillDifference90 denotes Skill-Difference in 1990, MigrantNetwork80 denotes MigrantNetwork in 1980; the figures beside other independent variables following similar logic. 4. The year of SkillDifference is accordance with the mid-value of each period and data availability. 5. The sample size reduced due to none data of some small countries.

Table 3. OLS specification: migration with different skill levels, using DM dataset.

Dependent variable lnFDI	Period 1992-2001		Period 2002-2010	
	Different skill levels	Tertiary level	Different skill levels	Tertiary level
MigrantNetwork_tertiary90	1.75***	1.88***		
	(.416)	(.259)		
MigrantNetwork_secondary90	-.464			
	(3.16)			
MigrantNetwork_primary90	.227			
	(.315)			
MigrantNetwork_tertiary00			.851	1.22***
			(.639)	(.262)
MigrantNetwork_secondary00			.435	
			(1.27)	
MigrantNetwork_primary00			.171	
			(.105)	
Ln GDPSum	3.24***	3.28***	3.26***	3.35***
	(.461)	(.441)	(.469)	(.45)
Ln GDPDifference	-.921**	-.948***	-.87***	-.846***
	(.34)	(.324)	(.287)	(.265)
Ln Distance	-1.76***	-1.74***	-1.48***	-1.43***
	(.389)	(.376)	(.464)	(.472)
SkillDifference95	-.855***	-.854***		
	(.101)	(.0981)		
SkillDifference05			-.644***	-.654***
			(.145)	(.139)
constant	-16.2**	-16.8**	-24**	-26.7***
	(6.68)	(6.48)	(8.66)	(8.2)
N	29	29	29	29
R^2	.847	.846	.782	.778
Adjusted R^2	.796	.812	.71	.73
F statistics	29.3	41.1	16.1	16.8

Note: the selected year of MigrantNetwork is in accordance with the practice of the existing literature. Other notes see Table 2.

Table 4. OLS specification: migration with different skill levels in the different period, using DM dataset.

Depended variable Ln FDI	period 1992-2001		
	Total migrants with different skill Levels, classified by past and contemporary emigration	Contemporary migrants	Tertiary Contemporary migrants
Ln MigrantStock_tertiary90	0.0705		
	(0.151)		
Ln MigrantStock_unskilled90	-0.000942		
	(0.152)		
Ln MigrantFlow_tertiary	0.395*	0.460***	0.546***
	(0.206)	(0.154)	(0.136)
Ln MigrantFlow_unskilled	0.165	0.157	
	(0.123)	(0.118)	
Ln GDPSum	1.505***	1.581***	1.765***
	(0.402)	(0.344)	(0.263)
Ln GDPDifference	-0.566***	-0.590***	-0.664***
	(0.183)	(0.158)	(0.126)
Ln Distance	-1.554***	-1.571***	-1.541***
	(0.144)	(0.119)	(0.138)
SkillDifference90	-0.706***	-0.740***	-0.807***
	(0.112)	(0.0849)	(0.0827)
SkillDifference95	-0.706***	-0.740***	-0.807***

	(0.112)	(0.0849)	(0.0827)
constant	3.019	2.390	0.870
	(4.697)	(4.817)	(4.830)
N	29	29	29
R^2	0.915	0.914	0.910

Note: ***, ** and * denote significant at 1%, 5% and 10% levels.

Table 5. OLS specification: total migration in the different period, using WB dataset.

Dependent variable LnFDI	total migration, classified by past and contemporary emigration			total migration on the whole		
	1984-1991	1992-2001	2002-2010	1984-1991	1992-2001	2002-2010
Ln MigrantStock in 1980	.184					
	(.314)					
Ln MigrantFlow in 1980s	.514					
	(.372)					
Ln MigrantStock in 1990		.347**		.704**		
		(.154)		(.329)		
Ln MigrantFlow in 1990s		.36**				
		(.131)				
Ln MigrantStock in 2000			.816***		.705***	
			(.177)		(.158)	
Ln MigrantFlow in 2000s			-.114			
			(.136)			
Ln MigrantStock in 2010						.595***
						(.112)
Ln GDPsum	1.22	1.05	.406	1.16*	1.14**	1.02***
	(2.06)	(.623)	(.522)	(.589)	(.515)	(.353)

Ln GDPdifference	-.224	-.39	-.154	-.216	-.435	-.327**
	(1.24)	(.307)	(.221)	(.333)	(.266)	(.119)
Ln distance	-1.08	-1.4***	-1.11***	-1.23	-1.43***	-.883***
	(.864)	(.221)	(.289)	(.851)	(.218)	(.179)
skill difference in 1990	-.043			-.0869		
	(.769)			(.788)		
skill difference in 1995		-.611***			-.712***	
		(.12)			(.102)	
skill difference in 2005			-.416***			-.37**
			(.146)			(.149)
constant	-7.89	5.19	8.41	-5.75	4.43	-1.85
	(18)	(6.58)	(8.52)	(12)	(6.21)	(5.8)
N	19	28	27	21	29	29
R^2	.682	.918	.898	.686	.917	.861
Adjusted R^2	.524	.894	.867	.581	.899	.831
F statistics	8.94	57	29.3	18	52.6	51.7

Note: ***, ** and * denote significant at 1%, 5% and 10% levels.

Table 6. Results of testing IV

stage 1 dependent variable Ln MigrantStock	period 84-91	period92-01	period 02-10
Number of observations	21	29	29
F test	72.6	10.53	11.09
P-value	0	0	0
R^2	0.821	0.6370	0.649
Adjusted R^2	0.7613	0.5765	0.590
chi2 of hausman test between IV and OLS method	0.46	0.03	0.91
P-value of hausman test between IV and OLS method	0.994	1	0.969

Table 7. OLS specification: total migration, using OC dataset.

Depended variable lnFDI	OC dataset 1984-1991		OC dataset 1992-2001	
	No dummy	Adding dummy	No dummy	Adding dummy
Ln GDPSum	2.967***	3.162***	2.978***	2.766***
	(0.574)	(0.605)	(0.307)	(0.324)
Ln GDPDifference	-0.0801	-0.142	-0.537**	-0.542**
	(0.337)	(0.379)	(0.246)	(0.252)
Ln Distance	-0.00719	0.315	-0.913**	-0.214
	(0.590)	(0.799)	(0.414)	(0.457)
SkillDifference90	-1.140***	-1.047***		
	(0.310)	(0.293)		
SkillDifference00			-0.632***	-0.763***
			(0.0983)	(0.0848)
OverseasChineseNetwork80	-0.0430**	0.0192		
	(0.0172)	(0.0306)		
OverseasChineseNetwork90			0.0717***	0.0989***
			(0.0164)	(0.0150)
SoutheastAsiaDummy		0.930		1.812**
		(1.492)		(0.863)
languagedummy		-7.705***		-3.853***
		(2.346)		(0.660)
constant	-39.70***	-45.89***	-27.42***	-29.31***
	(12.27)	(12.83)	(5.990)	(6.532)
N	59	59	65	65
R^2	0.542	0.600	0.782	0.828

References

1. Alfaro, L., Chanda, A., Kalemli-Ozcan, S., & Sayek, S. 2004. FDI and economic growth: the role of local financial markets. Journal of International Economics, 64 (1), 89–112.

2. Aroca, P., & & Maloney, W. F. 2005. Migration, trade, and foreign investment in Mexico. Policy Research Working Paper Series 3601, The World Bank.

3. Beine, M., Docquier, F., & Rapoport, H. 2008. Brain drain and human capital formation in developing countries: Winners and losers. The Economic Journal, 118 (April): 631-652.

4. Carr, L. David, J. R. Markusen and K. E. Maskus. 2001. Estimating the Knowledge-Capital Model of the Multinational Enterprise. American Economic Review, 91(3): 693-708.

5. Corredoira, R. A., & Rosenkopf, L. 2010. Should Auld Acquaintance Be Forgot? The Reverse Transfer of Knowledge through Mobility Ties, Strategic Management Journal, 31(2): 159-181.

6. Docquier F., & Marfouk, A. 2006. International Migration by Education Attainment in 1990–2000, in Ozden C, Schiff M (eds) International Migration, Remittances, and the Brain Drain, Washington, D.C.: The World Bank.

7. Dunning, J. 1977. Trade, location of economic activity and the multinational enterprise: A search for an eclectic approach. In Ohlin, B. Hesselborn, P. O., & Wijkman, P. M. (Ed.), The international allocation of economic activity. New York, NY: Macmillan.

8. Dunning, J. 1981. International production and the multinational enterprise. London, UK: Allen and Unwin.

9. Federici, D., & Giannetti, M. 2006. Temporary migration and foreign direct investment. CIDEI Working paper No. 72.

10. Gao, T. 2003. Ethnic Chinese networks and international investment: Evidence from inward FDI in China. Journal of Asian Economics, 14(4): 611-629.

11. Gillespie, K., Riddle, L., Sayre, E. & Sturges, D. 1999. Diaspora interest in homeland investment. Journal of International Business Studies, 30(3): 623–634.

12. Granovetter, M. 1985. Economic action and social structure: The problem of embeddedness. American Journal of Sociology, 91(3): 481-510.

13. Greif, A. 1993. Contract enforceability and economic institutions in early trade: the Maghribi Traders' Coalition," American Economic Review, 83(3): 525-548.

14. Gould, D.1994. Immigrant links to the home Country: Empirical implications for U.S. bilateral trade flows. Review of Economics and Statistics, 76(2): 302-316.

15. Hamilton, G. (ed.) 1996. Asian business networks. NY: Walter de Gruyter.

16. Head, K., & Ries, J. 1998. Immigration and trade creation: econometric evidence from Canada. Canadian Journal of Economics, 31(1): 47-62.

17. Hume, J. 2012. Immigrant employment: Multi-national employees help Toronto-area companies thrive around the globe. Toronto Star, March 7, accessed January 14, 2013 at

18. http://www.thestar.com/specialsections/immigrationemployment/article/1141974--immigrant-employment-multi-national-employees-help-toronto-area-companies-thrive-around-the-globe.

19. International Organization for Migration (IOM). 2010. World migration report 2010-the future of migration: Building capacities for change.

20. Javorcik, B.S., Ç. Özden, M. S., & Neagu, C. 2011. Migrant networks and foreign direct investment. Journal of Development Economics, 94(2): 231–241.

21. Kao, J. 1993. The worldwide web of Chinese business. Harvard Business Review, 109: 24–36.

22. Klenow, P. J., & Rodriguez, A. 2005. Externalities and growth. In: Aghion, P., Durlauf, S.(Eds.), Handbook of Economic Growth.

23. Kugler, M., & Rapoport, H. 2005. Skilled emigration, business networks and foreign direct investment. CESifo Working Paper No. 1455.

24. Kugler, M., & Rapoport, H. 2007. International labor and capital flows: Complements or substitutes. Economic Letters, 92(2): 155-162.

25. Lin, X. 2010. The diaspora solution to national technological capacity development: Immigrant entrepreneurs in the contemporary world. Thunderbird International Business Review, 52(2): 123-136.

26. Lipsey, R.E., & Sjoholm, F., 2004. Foreign direct investment, education and wages in Indonesian manufacturing. Journal of Development Economics, 73(1): 415-422.

27. Lu, J.W., & Beamish, P.W. 2004. International diversification and firm performance: The S-CURVE hypothesis. Academy of Management Journal, 47(4): 598-609.

28. Lucas, R. E. 2005. International migration and economic development: Lessons from low income countries. Sweden: Regeringskanliet.

29. Luo, Y. 1999. Dimensions of knowledge: Comparing Asian and Western MNEs in China. Asia Pacific Journal of Management, 16(1): 75-93.

30. Luo, Y. 2001. Strategy, structure, and performance of MNCs in China. Westport, CT: Quorum Books.

31. Markusen, J. 1997. Trade versus Investment Liberalization. NBER Working Paper 6231.

32. Markusen, J. 2002. Multinational Firms and the Theory of International Trade. Cambridge, MA and London, UK: MIT Press.

33. Mundell, R.A. 1957. International trade and factor mobility. American Economic Review, 47(3): 321-335.

34. Madhavan, R., & Iriyama, A. 2009. Understanding global flows of venture capital: Human networks as the "carrier wave" of globalization. Journal of International Business Studies, 40(8): 1241-1259.

35. Nijkamp, P., Gheasi, M., & Rietveld, P. 2011. Migrants and international economic linkages: A meta-overview. Spatial Economic Analysis, 6(4): 359-376.

36. Portes, A., Haller, W., & Guarnizo, L. (2002). Transnational entrepreneurs: An alternative form of immigrant economic adaptation. American Sociological Review, 67: 278-298.

37. Poston, D. L. Jr., & Mei, Y. Y. 1990. The distribution of the overseas Chinese in the contemporary world. International Migration Review, 24(3): 480-508.

38. Rangan, Subramanian. 2000. Search and Deliberation in International Exchange: Microfoundations to Some Macro Patterns. Journal of International Business Studies, 31,2: 205-22.

39. Rauch, J., & Casella, A. 2003. Overcoming informational barriers to international resource allocation: Prices and ties. Economic Journal, 113(484): 21-42.

40. Saxenian, A. 2001. Bangalore, the Silicon Valley of India? CREDPR Working Paper No. 91, Stanford University.

41. Saxenian, A. 2003. Brain circulation and capitalist dynamics: The Silicon Valley-Hsinchu-Shanghai Triangle. The Center for Economy and Society Working Paper Serious No. 8, Cornell University, Department of Sociology.

42. Simone, D. G.., & Manchin, M. 2010. Outward migration and inward FDI: Factor mobility between Eastern and Western Europe. Presentation at the conference in honor of Giancarlo Gandolfo, Rome.

43. Singer, D. 2006. The role of ethnic Chinese networks in China's FDI inflows. Honors Projects of Economics Department of Macalester College.

44. Tung, R. 2007. The human resource challenge to outward foreign direct investment aspirations from emerging economies: The case of China. International Journal of Human Resource Management, 18(5): 868-889.

45. Vaaler, P.M. 2011. Immigrant remittances and the venture investment environment of developing countries. Journal of International Business Studies, 42(9): 1121-1149.

46. Wang, H.Y. 2001. Weak state, strong networks: The institutional dynamics of foreign direct investment in China. Oxford University Press, Oxford.

47. Wang, H., Zweig, D., & Lin, X. 2011. Returnee Entrepreneurs: impact on China's globalization process. Journal of Contemporary China, 20(70): 413-431.

48. Yoshida, P.G. 2005. China's R&D/innovation – Growing fast. Research Technology Management, 48(6): 2-4.

Author aredentials

Xiyan Yang,Associate Professor of International Economics,Shanghai University of International Business and Economics.

E-mail: yangxiyan@suibe.edu.cn

Xiaohua Lin,Professor of International Business & Entrepreneurship, Ted Rogers School of Management, Ryerson University .

E-mail: hlin@ryerson.ca.

UDC 517.57

Yusuf Zeren, Seyma Cetin

SOME PROPERTIES OF THE MAXIMAL VALUES OF HARMONIC FUNCTIONS IN MORREY TYPE SPACES

Weighted Morrey-type classes of functions that are harmonic in the unit disk and in the upper half plane are defined in this work. Estimation of the maximum values of harmonic functions for a nontangential angle through the Hardy-Littlewood maximal function are generalized to more common case

Key words: Morrey-type classes, harmonic functions, Hardy-Littlewood operator.

Let Γ be some rectifiable Jordan curve on the complex plane C. By $|M|_{\Gamma}$ we denote the linear Lebesgue measure of the set $M \subset \Gamma$. All the constants throughout this paper (can be different in different places) will be denoted by c.

The expression $f(x) \sim g(x),\ x \in M$, means

© Yusuf Zeren, Seyma Cetin, 2017

$$\exists \delta > 0 : \delta \le \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \le \delta^{-1}, \forall x \in M \ .$$

Similar meaning is intended by the expression $f(x) \sim g(x),\ x \to a$.

By Morrey-Lebesgue space $L^{p,\alpha}(\Gamma),\ 0 < \alpha \le 1,\ p \ge 1$, we mean the normed space of all measurable functions $f(\cdot)$ on Γ with the finite norm

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)} = \sup_B \left(|B \cap \Gamma|_\Gamma^{\alpha-1} \int_{B \cap \Gamma} |f(\xi)|^p |d\xi| \right)^{1/p} < +\infty .$$

$L^{p,\alpha}(\Gamma)$ is a Banach space with $L^{p,1}(\Gamma) = L_p(\Gamma),\ L^{p,0}(\Gamma) = L_\infty(\Gamma)$.

Similarly we define the weighted Morrey-Lebesgue space $L_\mu^{p,\alpha}(\Gamma)$ with the weight function $\mu(\cdot)$ on Γ equipped with the norm

$$\|f\|_{L_\mu^{p,\alpha}(\Gamma)} = \|f\mu\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)},\ f \in L_\mu^{p,\alpha}(\Gamma).$$

The inclusion $L^{p,\alpha_1}(\Gamma) \subset L^{p,\alpha_2}(\Gamma)$ is valid for $0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le 1$. Thus, $L^{p,\alpha}(\Gamma) \subset L_1(\Gamma),\ \forall \alpha \in (0,1],\ \forall p \ge 1$. For $\Gamma = [-\pi, \pi]$ we will use the notation $L^{p,\alpha}(-\pi, \pi) = L^{p,\alpha}$.

More details on Morrey-type spaces can be found in [1-7].

Consider the arbitrary nontangential internal angle θ_0 with a vertex at the point $z = e^{it} \in \gamma,\ t \in [-\pi, \pi]$. Denote by $M_\mu f(t)$ the Hardy-Littlewood type maximal function (or Hardy-Littlewood operator) of the function $f(\cdot)$:

$$M_\mu f(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f(t)| d\mu(t),$$

where sup is taken over all intervals $I \subset [-\pi, \pi]$ which contain x, and $\mu(\cdot)$ is a Borel measure on $[-\pi, \pi]$, which satisfies the condition

$$\mu(I) > 0 \text{, for } \forall I : |I| > 0 .$$

By M we denote the usual Hardy-Littlewood operator, i.e.

$$Mf(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt ,$$

where $|I|$ is a Lebesgue measure of the interval $I \subset [-\pi, \pi]$.

We have proved the following.

Theorem 1. *Let*

$$u(x, y) = \int_R P_y(x-t) f(t) dt, \ y > 0,$$

be a Poisson integral. If $f \in L^{p,\alpha}$, *then* $u \in h^{p,\alpha}$ *and*

$$\|u\|_{p,\alpha} \le c \|f\|_{p,\alpha}, \ 1 < p < +\infty, \ 0 \le \alpha < 1.$$

Note that the methods of proving previous theorems are applicable to the case of unit circle, too. In this case, the spaces $L^{p,\alpha}(d\mu)$ and $h^{p,\alpha}(d\mu)$ are defined by the norms

$$\|f\|_{p,\alpha;d\mu} = \sup_{I \subset [-\pi,\pi]} \left(\frac{1}{|I|^{1-\alpha}} \int_I |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p},$$

and

$$\|u\|_{h^{p,\alpha}(d\mu)} = \sup_{0<r<1} \|u_r(\cdot)\|_{p,\alpha;d\mu},$$

respectively, where

$$u_r(\theta) = u\left(re^{i\theta}\right), \ \theta \in [-\pi, \pi].$$

Similarly we can prove the validity of the following

Theorem 2. *Assume that the measure* $\mu(\cdot)$ *on Borel subsets of* $[-\pi, \pi]$ *satisfies the conditions*

$$\mu(I) \sim |I|^{æ}, \ \forall I \subset [-\pi, \pi],$$

and

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\mu(\theta) < +\infty,$$

where æ > 0 *is some number. Let*

$$u_\mu\left(re^{i\theta}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \varphi) f(\varphi) d\mu(\varphi),$$

be a Poisson integral of the function $f \in L^{p,\alpha}(d\mu)$. *Then, for an arbitrary nontangential internal angle* $\gamma_{\theta_0}(t)$ *with* $\theta_0 \in (0,\pi)$ *and a vertex at the point* $\xi = e^{it}$, *there exists* $c_{\theta_0} > 0$ *such that*

$$u_\mu^*(t) = \sup_{z \in \gamma_{\theta_0}(t)} |u_\mu(z)| \le c_{\theta_0} M_\mu f(t), \ \forall t \in [-\pi, \pi],$$

where M_μ *is a maximal operator*

$$M_\mu f(t) = \sup_{I \ni t} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f(x)| d\mu(x).$$

Moreover, if æ=1 *and* $0 \le 1-\alpha < 1$, *then* $u_\mu^*(\cdot) \in L^{p,\alpha}(d\mu)$ *and*

$$\|u_\mu^*\|_{p,\alpha;d\mu} \le c\|f\|_{p,\alpha;d\mu}.$$

The following analog of Theorem 2 is also true.

Theorem 3. *Let*

$$u(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\varphi) f(\varphi) d\varphi,$$

be a Poisson integral. If $f \in L^{p,\alpha}$, *then* $u \in h^{p,\alpha}$, $1 < p < +\infty$, $0 \le \alpha < 1$, *and*

$$\|u\|_{p,\alpha} \le c\|f\|_{p,\alpha}, \ \forall f \in L^{p,\alpha}.$$

References

1. Bilalov B.T., Gasymov T.B., Quliyeva A.A. On solvability of Riemann boundary value problem in Morrey-Hardy classes // Turk. J. Math. – 2016. – Vol. 40, № 5. – P. 1085-1101.
2. Bilalov B.T., Quliyeva A.A. On basicity of exponential systems in Morrey-type spaces // International Journal of Mathematics. – 2014. – Vol. 25, № 6.
3. Israfilov D.M., Tozman N.P. Approximation by polynomials in Morrey-Smirnov classes // East J. Approx. – 2008. – Vol. 14, № 3. – P. 255-269.
4. Israfilov D.M., Tozman N.P. Approximation in Morrey-Smirnov classes // Azerbaijan J. Math. – 2011. – Vol. 1, № 1. – P. 99-113.
5. Peetre J. On the theory of spaces // J. Funct. Anal. – 1964. – № 4. – P. 71-87.

6. Samko N. Weight Hardy and singular operators in Morrey spaces // J. Math. Anal. Appl. – 2009. – № 35-1. – P. 183-188.

7. Zorko C.T. Morrey space // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – № 98-4. – P. 586-592.

Author aredentials

Yusuf Zeren, professor, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey. E-mail: yusufzeren@hotmail.com.

Ceyma Cetin, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey. E-mail: seyymacetin@gmail.com.

УДК 621.1:50(07)

Абдуллина Р.И.

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА ПРИ ЗАКАЧКЕ ЖИДКОСТИ В АНИЗОТРОПНЫЙ НЕОДНОРОДНЫЙ ПЛАСТ

Рассмотрена задача о температурном поле, создаваемом источниками, положение которых не зависит от вертикальной координаты и которые сосредоточены в горизонтальном проницаемом слое, окруженном теплопроводящей средой, при стационарном движении жидкости в радиальном направлении.

Ключевые слова: теплопроводящая среда, стационарный режим, фильтрация, температура, "в среднем точный" асимптотический метод.

Abdullina R.I.

TEMPERATURE FIELD OF SOURCES OF HEAT AT PURIFICATION OF LIQUID IN ANISOTROPIC INHOMOGENEOUS PLAST

The problem of the temperature field created by sources whose position is independent of the vertical coordinate and which are concentrated in a horizontal permeable layer surrounded by a heat-conducting medium is considered when the fluid moves in a radial direction.

Keywords: heat-conducting medium, stationary regime, filtration, temperature, "on the average exact" asymptotic method.

Интерес к фильтрационным задачам объясняется прежде всего своей практической значимостью. При этом важную роль играет ис-

© Абдуллина Р.И., 2017

следование теплофизических процессов, которые используются в нефтегазовой технологии при изучении методов увеличения нефтеотдачи пластов, температурных полей, появляющихся при закачке в нефтяной пласт химических реагентов – полимеров, кислоты, водных растворов ПАВ и т.п. Источниками тепла Q_d являются, к примеру, химические реакции, возникающие при воздействии химически активных веществ (например, кислоты), реакции радиоактивного распада, происходящие при фильтрации радиоактивных растворов, баротермический эффект и т.д. Температурные возмущения объясняются также разницей температуры закачиваемого флюида и естественной температуры пластов. Далее предполагается, что движение жидкости (фильтрация в пористой среде) происходит радиально в направлении от скважины к периферии и задача имеет осевую симметрию. Для упрощения будем считать, что функция источников не зависит от вертикальной координаты z_d, т. е. $Q_d = Q_d(r_d, t)$.

В цилиндрической системе координат среда состоит из трех областей с плоскими границами раздела $z_d = \pm h$, перпендикулярными оси z_d (рис.1). В области I среда имеет плотность ρ_1, удельную теплоемкость c_1, теплопроводности λ_{r1}, λ_{z1}, температуропроводности a_{r1}, a_{z1}, среда в области II характеризуется параметрами λ_{z2}, λ_{r2}, a_{r2}, a_{z2}, ρ_2, c_2, среда в области III (средняя область толщиной $2h$) имеет следующие параметры: λ_z, λ_r, a_r, a_z, ρ, c. Среда считается сильно анизотропной, поэтому $\lambda_r << \lambda_z$, $\lambda_{r1} << \lambda_{z1}$, $\lambda_{r2} << \lambda_{z2}$. Это позволяет при записи уравнения теплопроводности для всех областей пренебречь слагаемым, содержащим радиальную теплопроводность. В силу аксиальной симметрии задачи слагаемые, содержащие угловую координату φ, в уравнениях также опущены.

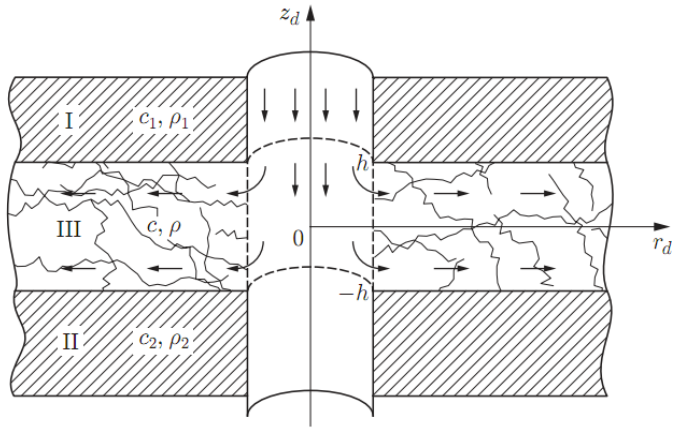


Рис. 1. Геометрия задачи: I – настилающий пласт, II – подстилающий пласт, III – проницаемый пласт

Математическая постановка задачи для покрывающего и подстилающего массивов включает уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = a_{z1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z_d^2},\ z_d > h,\ r_d > 0, t > 0,$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = a_{z2} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z_d^2},\ z_d < -h,\ r_d > 0,\ t > 0 \qquad (1)$$

и уравнение конвективной теплопроводности в пласте

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_d(r,t) \frac{\partial \theta}{\partial r_d} - a_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_d^2} = Q_d(r_d, t),\ |z_d| < h,$$

$$r_d > 0,\ t > 0, \qquad (2)$$

где θ, θ_1, θ_2 — температура проницаемого, настилающего и подстилающего пластов соответственно, $u(r)$ – функция скорости конвективного переноса тепла.

На границах раздела заданы условия равенства температур и тепловых потоков

$$\theta|_{z_d=h}=\theta_1|_{z_d=h},\quad \theta|_{z_d=-h}=\theta_2|_{z_d=-h},$$

$$\lambda_z\left.\frac{\partial\theta}{\partial z_d}\right|_{z_d=h}=\lambda_{z1}\left.\frac{\partial\theta_1}{\partial z_d}\right|_{z_d=h},\ \lambda_z\left.\frac{\partial\theta}{\partial z_d}\right|_{z_d=-h}=\lambda_{z2}\left.\frac{\partial\theta_2}{\partial z_d}\right|_{z_d=-h}. \tag{3}$$

В начальный момент времени температура слоев равна естественной температуре Земли, которая определяется решением соответствующей стационарной задачи при отсутствии источников

$$\theta|_{t=0}=\theta_0-\Gamma z_d,\ \theta_1|_{t=0}=\theta_0-\Gamma h-\Gamma_1(z_d-h),$$

$$\theta_2|_{t=0}=\theta_0+\Gamma h-\Gamma_2(z_d+h), \tag{4}$$

где $\Gamma=q_z/\lambda_z$, $\Gamma_1=q_z/\lambda_{z1}$, $\Gamma_2=q_z/\lambda_{z2}$, q_z-z – составляющая естественного теплового потока Земли, θ_0 – температура закачиваемой жидкости.

Предположим, что в скважине с нулевым радиусом температура закачиваемой жидкости изменяется по заданной зависимости

$$\theta|_{r=0}=\theta_0(t). \tag{5}$$

Решение предполагается ограниченным во всех точках $r_d>0$, функция источников $Q(r_d,t)$ не зависит от температуры. В рассматриваемой задаче источники тепла $Q(r_d,t)$ локализованы в ограниченной области, поэтому начальное распределение температуры сохраняется в течение любого конечного промежутка времени в достаточно удаленных от источника областях:

$$\theta_0-\Gamma h-\Gamma_1(z_d-h)-\theta_1|_{z_d\to\infty}\to 0,$$

$$\theta_0+\Gamma h-\Gamma_2(z_d+h)-\theta_2|_{z_d\to-\infty}\to 0. \tag{6}$$

Таким образом, задача (1)–(6) приводится к безразмерному виду. Применение “в среднем точного” асимптотического метода при решении задачи о температурном поле, создаваемом источниками при закачке жидкости в пласт, позволяет построить достаточно простые аналитические выражения для нулевого и первого коэффициентов разложения. С использованием этих выражений можно вычислить

осредненные значения температуры и детально исследовать соответствующее распределение температуры.

Библиографический список

1. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Филиппов К.А. и др. Использование баротермического эффекта для нагрева нефтяного пласта // Теплофизика высоких температур. 2009. Т. 47.– № 5.– С. 752–764.

2. Филиппов А. И. Скважинная термометрия переходных процессов. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1989.

3. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В., Горюнова М.А. Анализ температурного поля цилиндрического потока на основе “в среднем точного” решения // ПМТФ. 2010.– Т. 51.– № 3.– С. 84–93.

4. Филиппов А. И., Михайлов П. Н., Иванов Д. В. Температурное поле радиоактивных изотопов в пористой среде // Теплофизика высоких температур.– 2010.– Т. 48.– № 1.– С. 96–104.

Сведения об авторах

Абдуллина Руфина Игоревна, магистр СФ БашГУ. E-mail: rufina.abdullina.94@mail.ru

УДК 517.95

Акимов А.А., Агафонова А.А.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БАЛКИ

В работе рассмотрена начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки для случая шарнирно закрепленных концов. Поставленная задача сводится к решению задачи Коши бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Методом последовательных приближений доказана теорема существования решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: нелинейное уравнение колебаний балки, задача Коши, ряд Фурье.

© Акимов А.А., Агафонова А.А., 2017

Akimov A.A., Agafonova A.A.

ON A EXISTENCE OF THE SOLUTION BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR EQUATION OF OSCILLATION BEAM

The initial boundary value problem for the nonlinear equation of beam oscillations for the case of hinged ends is considered. The problem is reduced to solving the Cauchy problem of an infinite system of ordinary differential equations. By the method of successive approximations, the existence theorem for the solution of the problem is proved.

Keywords: nonlinear equation of beam oscillations, Cauchy problem, Fourier series.

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка, чем уравнение струны. В данной работе рассмотрим нелинейное уравнение поперечных колебаний упругой балки, рассмотренное в более общем виде чем [1].

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha u_{xxxx} - \left(\beta + \gamma \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right) u_{xx} + \delta u_t = 0 \quad (1)$$

в цилиндрической области $\Omega = I \times (0,\infty)$, где $I = (0,\pi)$ и $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma \geq 0, \delta \geq 0,\ 4\alpha + 4\beta > \delta^2$ и поставим следующую задачу:

Начально-граничная задача. Найти функцию $u(x,t)$ удовлетворяющую следующим условиям

$$u(x,t) \in C_{x,t}^{4,2}(\overline{\Omega});\ Lu(x,t) \equiv 0, (x,t) \in \Omega;\ (2)$$

$$u(\pi,t) = u(0,t) = u_{xx}(\pi,t) = u_{xx}(0,t) = 0,\ t \geq 0;\ (3)$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in [0,\pi],\ (4)$$

где $\varphi(x),\ \psi(x)$ − заданные функции.

Отметим, что в линейном случае, то есть когда $\beta = \gamma = \delta = 0$, задача (2) − (4) была исследована в [1] – [3].

Решение задачи (2) − (4) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx,$$

где $u_n(t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$u_n(t)=\varphi_n\widetilde{K}_n(t)+\psi_nK_n(t)-\frac{1}{2}\int_0^t K_n(t-s)N(u)u_n(s)ds,$$

φ_n и ψ_n – коэффициенты разложения в ряд Фурье функций φ и ψ по системе $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$,

$$a_n=\alpha n^4+\beta n^2,\ N(u)=\gamma\int_0^\pi u_\xi^2(\xi,t)d\xi,\ K_n(t)=\frac{1}{\omega_n}e^{-\frac{\delta t}{2}}\sin(\omega_n t),$$

$$\widetilde{K}_n(t)=\frac{\delta\omega_nK_n(t)+K_n'(t)}{\omega_n},\ \omega_n=\frac{\sqrt{4a_n-\delta^2}}{2}.$$

Методом последовательных приближений доказана следующая

Теорема. Если функции $\varphi(x)\in C^5[0,\pi]$, $\psi(x)\in C^3[0,\pi]$ и выполнены условия

$$\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(0)=\varphi''(\pi)=\varphi''''(0)=\varphi''''(\pi)=0,$$

$$\psi(0)=\psi(\pi)=\psi''(0)=\psi''(\pi)=0,$$

то существует единственное решение задачи (2) − (4).

Библиографический список

1. Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференциальные уравнения. 2017. – Т. 53. – № 1. – С. 89.

2. Акимов А.А., Абдуллина Р.И. Об одном нелинейном уравнении затухающих колебаний балки // Журнал научных и прикладных исследований.– 2015. – № 11. – С. 156-159.

3. Акимов А.А., Абдуллина Р.И., Чернов И.Г. О некоторых оценках для нелинейного уравнения колебания балки // Журнал научных и прикладных исследований.– 2015. – № 12. – С. 172-175.

Сведения об авторах

Акимов Андрей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: andakm@rambler.ru.

Агафонова Алена Александровна, студент факультета математики и информационных технологий. E-mail: andakm@rambler.ru.

УДК 51-7

Александров П.Н., Вардазарян Н.Г., Сулейманов Р.В., Синицкая Е.В.

АКТУАЛЬНОСТЬ МОДЕЛИ РИЧАРДСОНА В СОВРЕМЕННЫХ УСЛОВИЯХ

Рассматривается математическая модель гонки вооружений Л.Ф. Ричардсона и её актуальность в связи с появлением ядерного оружия. Это обстоятельство приводит к выводу, что в современных условиях эта модель применима только для анализа локальных конфликтов. Одним из таких локальных конфликтов является нагорнокарабахский конфликт между Азербайджаном и Арменией. На этом примере рассматриваются методологические основы применения математических методов для количественного анализа политических, в том числе международных, процессов.

Ключевые слова: модель Ричардсона, гонка вооружений, математическая модель, политические процессы, международные отношения.

Alexandrov P.N., Vardazaryan N.G., Sinitskaya E.V., Suleymanov R.V.

THE RELEVANCE OF THE RICHARDSON'S MODEL IN THE TODAY'S CONDITIONS

This work considers the mathematical model of arms race by Lewis Fry Richardson and its suitability in the wake of the nuclear weapons emergence. That means that the Richardson's model is applicable only for local conflicts. The Nagorno-Karabakh conflict between Azerbaijan and Armenia is an example of such kind of conflict. The methodological fundamentals of the mathematical methods application for the quantitative analysis of the political as well as international processes are exemplified through the abovementioned conflict.

Keywords: Richardson's model, arms race, mathematical model, political processes, international relations.

В первой половине XX века американским математиком Льюисом Ричардсоном (1881-1953) была разработана модель для описания гонки вооружений между двумя странами [1,2,3]. Ричардсон остано-

© Александров П.Н., Вардазарян Н.Г., Сулейманов Р.В., Синицкая Е.В., 2017

вился на относительно простой модели, учитывающей действие всего лишь трех факторов. Первый из них состоит в том, что государство x_1 ощущает наличие военной угрозы со стороны противника – государства x_2. Чем большим количеством вооружений располагает x_2, тем больше вооружений захочет приобрести x_1 в ответ на воспринимаемую им угрозу. Однако в то же самое время государство x_1 вынуждено решать и насущные социальные задачи, и не может перевести всю свою экономику на рельсы военного производства. Та же самая логика, которая применима к государству x_1, действует и в отношении государства x_2. С формальной точки зрения, это означает, что в момент времени $t+\Delta t$ (Δt – интервал времени между принятием военных бюджетов), то есть в момент принятия военного бюджета в настоящее время, он будет линейно зависеть от военного бюджета страны в момент времени t и от военного бюджета другой страны в тот же момент времени t. Аналогичное рассуждение справедливо и для другой страны. С математической точки зрения, все эти рассуждения сводятся к двум уравнениям

$$x_1(t+\Delta t) = a_{11}\Delta t x_1(t) + a_{12}\Delta t x_2(t)$$
$$x_2(t+\Delta t) = a_{21}\Delta t x_1(t) + a_{22}\Delta t x_2(t)$$

Представим данную систему уравнений в векторном виде:

$\mathbf{X}(t+\Delta t) = A\Delta t\mathbf{X}(t)$, где

$$\mathbf{X}(t+\Delta t) = \begin{pmatrix} x_1(t+\Delta t) \\ x_2(t+\Delta t) \end{pmatrix},\ \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Вычтем из полученной системы уравнений $\mathbf{X}(t)$ и поделим на Δt. При стремлении Δt к нулю получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{X}(t+\Delta t)-\mathbf{X}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = (A-[1])\mathbf{X}(t) = B\mathbf{X}(t),$$
$$B = A-[1] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, математической моделью гонки вооружений является система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

В случае гонки вооружения действительные собственные значения матрицы B являются положительными величинами и, следовательно, решение данной системы неустойчиво (по Ляпунову). Иначе говоря, гонка вооружений есть неустойчивый процесс. В противном случае, в конфликте снижается уровень напряжённости.

Основной целью количественного анализа гонки вооружений является вопрос: приведет ли гонка вооружений к военному конфликту или нет?

Наличие ядерного оружия исключает прямое вооружённое столкновение между странами, ведущими гонку вооружений, так как это гарантировано приведёт к их взаимному уничтожению. Таким образом, модель Ричардсона для ядерных держав является неактуальной. Однако из истории второй половины XX века отчётливо видно, что взамен прямому вооружённому столкновению между великими державами в мире увеличивается число локальных конфликтов. В этом случае модель Ричардсона сохраняет свою актуальность.

В случае близких собственных значений матрицы B, как показывает анализ 71 конфликта, военные действия не наступают. В том случае, если собственные значения матрицы B начинают отличаться, то военные конфликты переходят в открытую фазу. С формальной точки зрения, необходимо найти матрицу B и провести ее анализ. Для этого необходимо знать военные расходы участников конфликта за предыдущий интервал времени.

Одним из таких локальных конфликтов является конфликт между Арменией и Азербайджаном. После заключения соглашения о прекращении огня в 1994 году (Бишкекский протокол) между Азербайджаном, Арменией и самопровозглашённой Нагорно-Карабахской республики в зоне Карабахского конфликта по-прежнему возникают очаги напряжённости, прямые вооружённые столкновения и даже боевые действия.

Военные союзники Армении – это страны-члены блока ОДКБ, такие как Россия и Белоруссия (в уставе ОДКБ есть пункт о том, что "нападение на одну из стран, входящих в Организацию, означает нападение на всех"). Военные союзники Азербайджана – это Турция (между двумя странами существует ряд военных соглашений и соглашение о стратегическом партнёрстве; в Карабахском конфликте Турция поддерживает Азербайджан) и Пакистан (между Пакистаном и Азербайджаном существует ряд договорённостей о военном со-

трудничестве; в Карабахском конфликте Пакистан поддерживает Азербайджан).

Таким образом, вектор $\mathbf{X}$ будет состоять из 6 компонент:

$$\mathbf{X} = [\text{Азербайджан Турция Пакистан Армения Россия Беларусия}]^T$$

Для получения матрицы были использованы процентные показатели военных бюджетов по отношению к ВВП с 2000 года по 2015г.[4], которые изображены на рис.1.

Прежде всего, найдем матрицу A, которая необходима для прогноза развития гонки вооружений между указанными странами. Для этого введем составные матрицы:

$$Y = [\mathbf{X}(2001), \mathbf{X}(2002), ..., \mathbf{X}(2015)]$$

и матрицу

$$X = [\mathbf{X}(2000), \mathbf{X}(2001), ..., \mathbf{X}(2014)] \cdot$$

Это позволяет перейти от векторной системы уравнений к матричной $Y = AX$, откуда найдем матрицу $A = ((XX^T)^{-1} XY^T)^T$, которая имеет следующий вид:

	Азербайджан	Турция	Пакистан	Армения	Россия	Белоруссия
Азербайджан	0.0649	-0.6081	0.1493	0.2208	0.3497	2.0305
Турция	-0.0793	0.3055	-0.8728	0.3166	0.7738	0.8284
Пакистан	0.2049	0.3953	0.4346	0.3821	-0.1884	-0.4387
Армения	0.1135	-0.1588	-0.2056	0.6538	0.2289	0.7477
Россия	0.3328	-0.0713	-0.9346	-0.1230	1.2151	1.5176
Белоруссия	0.0593	-0.1626	-0.1497	0.1343	0.1917	0.5972

с точностью $100\frac{\|Y - AX\|}{\|Y\|} = 10.6718\%$, которая характеризует адекватность математической модели ренальным политическим процессам.

Матрица A демонстрируют взаимовлияние военных бюджетов в процентах 6 вышеупомянутых стран. Диагональные элементы – собственные расходы стран, недиагональные – взаимосвязи между военными бюджетами указанных стран. Например, если рассматривать влияние Турции на военный бюджет Азербайджана, то это влия-

ние отрицательное (-0.6081). Это означает, что Турция способствует снижению военного бюджета Азербайджана. Увеличение военного бюджета Азербайджана более всего стимулируют Россия (0.3497), Армения (0.2208) и Белоруссия (2.0305). Если обратиться к недиагональным показателям Армении, то обнаружится, что на увеличение её военного бюджета, в разной степени, влияют Россия (0.2289), Белоруссия (0.7477) и Азербайджан (0.1135).

На основе полученной матрицы A проведем прогноз развития гонки вооружений на 2016 год

$$\mathbf{X}(2016) = A\mathbf{X}(2015),\ \Delta t = 1\text{год}$$

и на 2017 год:

$$\mathbf{X}(2017) = A\mathbf{X}(2016) = AA\mathbf{X}(2015).$$

Эти прогнозные значения военных расходов изображены на рис. 1, которые указывают на стабилизацию гонки вооружений и отсутствие опасности возобновление военных действий на прогнозируемый срок.

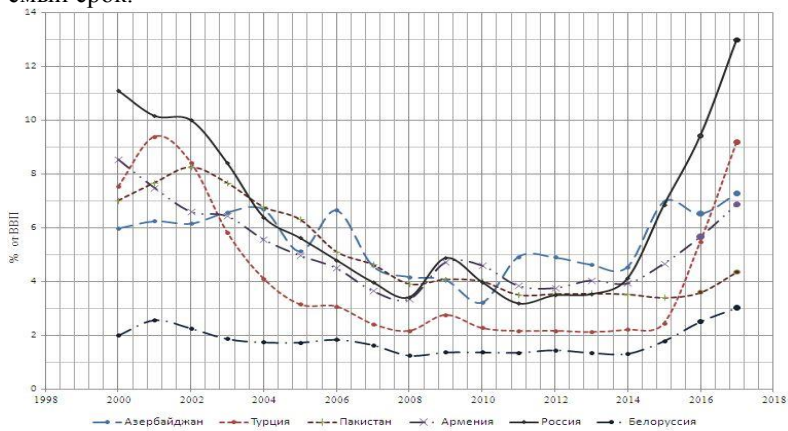


Рис.1. Военные расходы участников конфликта в нагорном Карабахе в процентном отношении к внутреннему валовому продукту стран. Жирными маркерами отмечен прогноз на ближайшие годы

На рис.2. отдельно показаны скорости изменения военных расходов Армении и Азербайджана.

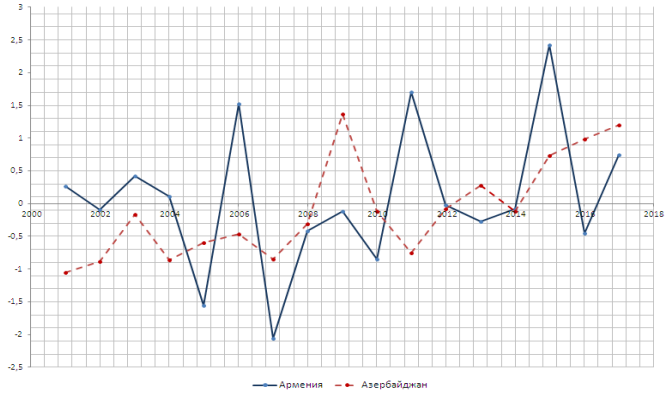


Рис. 2. Графики скорости изменения военных бюджетов

Эти данные позволяют установить инициатора конфликта. Для этого найдем функцию взаимной корреляции, которая представлена на рис. 3.

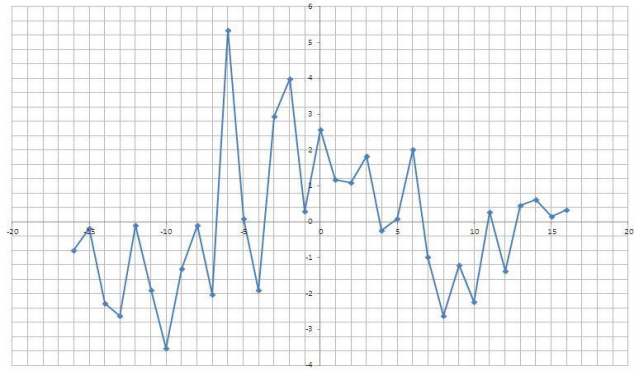


Рис. 3. Функция взаимной корреляции скорости изменения военных расходов Армении и Азербайджана

Корреляционная функция не является симметричной (условный максимум сдвинут влево от начала координат), что указывает на причинно-следственную связь между военными расходами. Спектральный анализ этой функции показывает, что в начале конфликта инициатором гонки вооружения была Армения, в последние годы инициатива перешла к Азербайджану.

Нетрудно получить действительные части собственных значений матрицы $B = A - [1]$, которые равны:

[-1.2833, -0.9310, -0.4475, -0.0330, -0.0330, -0.0009].

Все собственные значения отрицательны, вследствие чего в конфликте снижается уровень напряжённости, то есть происходит деэскалация конфликта.

Выводы

Модель Ричардсона теряет актуальность в отношении военных расходов крупных мировых (ядерных) держав в наши дни, поскольку она не отражает новые факторы, влияющие на возникновение вооруженных конфликтов между теми или иными крупными странами.

Модель Ричардсона по-прежнему остаётся актуальной для региональных конфликтов, где наличие гонки вооружений по-прежнему способствует эскалации конфликта, что и было показано на примере армяно-азербайджанского нагорнокарабахского конфликта, где было установлено, что между Арменией и Азербайджаном наблюдается стабилизация гонки вооружения. В ближайшие годы открытая фаза противостояния не прогнозируется при неизменности существующей геополитической обстановке в регионе.

Модель Ричардсона как гонки вооружений между ядерными странами нуждается в существенном совершенствовании и доработке.

Библиографический список

1. Мангейм Дж. Б., Рич Р.К. Политология. Методы исследования, «Весь мир», 1997. – 543 с.

2. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов. Логос, 2001. – 296 с.

3. Ахременко А.С. Динамический подход к математическому моделированию политической стабильности. – Полис. Политические исследования.– 2009.– № 3.– С. 105-112.

4. Stockholm International Peace Research Institute (SIPRI) https://www.sipri.org

Сведения об авторах

Александров Павел Николаевич, главный научный сотрудник ЦГЭМИ ИФЗ РАН. E-mail: alexander@igemi.troitsk.ru

Вардазарян Нона Гагиковна, ООО Гарбер, Хэннем энд Партнерс, заместитель Генерального директора по административным вопросам. E-mail: nona.g.oganyan@gmail.com

Синицкая Елена Владимировна, преподаватель НМУ. E-mail: lench81@mail.ru

Сулейманов Руслан Вахидович, студент факультета мировой политики МГУ. E-mail: rusaz94@mail.ru

УДК 517.95

Алиев А.Р., Эльбабли А.Л.

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В работе на полуоси изучаются корректные краевые задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка, имеющих кратную действительную характеристику. Доказано существование и единственность решения из пространства типа Соболева $W_2^3(R_+;H)$ для каждой из трех рассматриваемых краевых задач.

Ключевые слова: краевая задача, операторно-дифференциальное уравнение, кратная характеристика, самосопряженный оператор, регулярное решение.

Aliev A.R., Elbably A.L.

ON THE CORRECT SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ONE CLASS OF OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

In this paper, we study correct boundary value problems for a class of third-order operator-differential equations that have a multiple real characteristics. The existence and uniqueness of a solution from the Sobolev type space $W_2^3(R_+;H)$ for each of the three considered boundary-value problems are proved.

Keywords: boundary value problem, operator-differential equation, multiple characteristics, self-adjoint operator, regular solution.

Настоящая работа посвящена постановке и исследованию корректных краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка с действительными и

© Алиев А.Р., Эльбабли А.Л., 2017

действительными кратными характеристиками. Следует отметить, что дифференциальные уравнения, характеристические уравнения которых имеют действительные различные или действительные кратные корни, находят широкое применение при моделировании задач механики и техники, в частности, в задачах тепломассообмена и фильтрации [3], в задачах динамики арок и колец [5] и т.д.

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением (x,y), $x,y \in H$, A – самосопряженный положительно-определенный оператор в H, а H_γ ($\gamma \geq 0$) - шкала гильбертовых пространств, порожденная оператором A, т.е. $H_\gamma = D(A^\gamma)$, $(x,y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$, $x,y \in D\left(A^\gamma\right)$. При $\gamma = 0$ же считаем, что $H_0 = H$, $(x,y)_0 = (x,y)$, $x,y \in H$.

Обозначим через $L_2\left(R_+;H\right)$ гильбертово пространство всех вектор-функций $u(t)$, определенных на $R_+ = (0,+\infty)$ со значениями в H и нормой

$$\|u\|_{L_2(R_+;H)} = \left(\int_0^{+\infty} \|u(t)\|_H^2 \, dt \right)^{1/2} < +\infty .$$

Определим следующее пространство:

$$W_2^3\left(R_+;H\right) = \left\{ u(t) : \frac{d^3u(t)}{dt^3} \in L_2\left(R_+;H\right), A^3u(t) \in L_2\left(R_+;H\right) \right\}$$

(подробнее см. в [4, гл. 1]). Здесь и в дальнейшем, производные понимаются в смысле теории распределений (см. [4]). Пространство $W_2^3\left(R_+;H\right)$ становится гильбертовым пространством относительно нормы

$$\|u\|_{W_2^3(R_+;H)} = \left(\int_0^{+\infty} \left(\left\| \frac{d^3u(t)}{dt^3} \right\|_H^2 + \left\| A^3u(t) \right\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2} .$$

Теперь перейдем к постановке исследуемых краевых задач.

В пространстве H рассмотрим следующее операторно-дифференциальное уравнение третьего порядка, имеющее кратную характеристику:

$$\left(-\frac{d}{dt}+A\right)\left(\frac{d}{dt}+A\right)^2 u(t)=f(t),\ \ t\in R_+ \qquad (1)$$

где $f(t)\in L_2(R_+;H)$, A – тот самый, указанный в начале статьи, положительно-определенный самосопряженный оператор в H. Полагая $u(t)\in W_2^3(R_+;H)$, присоединим к уравнению (1) краевые условия в нуле вида

$$\frac{d^i u(0)}{dt^i}=\frac{d^j u(0)}{dt^j}=0, \qquad (2)$$

где i и j – фиксированные целые числа, причем $i<j$ и могут принимать одно из следующих значений: $i=0,1$; $j=1,2$.

Определение. *Если функция* $u(t)\in W_2^3(R_+;H)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *почти всюду в* R_+, *а краевые условия* (2) *выполняются в смысле*

$$\lim_{t\to 0}\left\|A^{3/2-k}\frac{d^k u(t)}{dt^k}\right\|_H=0,\ k=i,j,$$

то $u(t)$ *будем называть регулярным решением краевой задачи вида* (1), (2).

В настоящей работе доказана разрешимость каждой из краевых задач вида (1), (2).

Справедлива следующая теорема, доказательство которой приведем вкратце.

Теорема. *Краевая задача вида* (1), (2) *при любом* $f(t)\in L_2(R_+;H)$ *имеет единственное регулярное решение.*

Доказательство теоремы вытекает из того, что регулярное решение краевой задачи вида (1), (2) задается
при $i=0$, $j=1$ формулой

$$u(t)=\int_0^{+\infty}G(t-s)f(s)ds-\frac{1}{4}(E+2tA)\int_0^{+\infty}e^{-(t+s)A}\left(A^{-2}f(s)\right)ds,$$

при $i=0$, $j=2$ формулой

$$u(t)=\int_0^{+\infty}G(t-s)f(s)ds-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}e^{-(t+s)A}\left(A^{-2}f(s)\right)ds,$$

при $i=1$, $j=2$ формулой

$$u(t)=\int_0^{+\infty} G(t-s)f(s)ds+\frac{1}{4}(3E+2tA)\int_0^{+\infty} e^{-(t+s)A}\left(A^{-2}f(s)\right)ds,$$

где E - единичный оператор в H, а

$$G(t-s)=\frac{1}{4}\begin{cases}(E+2(t-s)A)e^{-(t-s)A}A^{-2}, & t-s>0,\\ e^{(t-s)A}A^{-2}, & t-s<0.\end{cases}$$

Следует отметить, что при $i=0$, $j=1$ краевая задача вида (1), (2) исследована в работах [1, 2].

Библиографический список

1. Aliev A.R., Elbably A.L. Well-posedness of a boundary value problem for a class of third order operator-differential equations // Boundary Value Problems. – 2013. – V. 2013:140, 15 p.

2. Aliev A.R., Elbably A.L. Completeness of derivative chains for polynomial operator pencil of third order with multiple characteristics // Azerbaijan Journal of Mathematics. – 2014. – V. 4. – № 2. – P. 3–9.

3. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24. – № 5. – С. 852-864.

4. Lions J.L., Magenes E. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Dunod, Paris, France, 1968; Mir, Moscow, Russia, 1971; Springer, Berlin, Germany, 1972.

5. Пилипчук В.Н. О существенно нелинейной динамике арок и колец // Прикладная математика и механика. – 1982. – Т. 46. – № 3. – С. 461-466.

Сведения об авторах

Алиев Араз Рафиг оглы, доктор наук по математике, профессор, заведующий кафедрой общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности в г. Баку. E-mail: alievaraz@yahoo.com.

Эльбабли Ахмед Лютфи, доктор философии по математике, старший преподаватель кафедры математики Хелванского университета в г. Каире (Египет). E-mail: ahmed_elbably2004@yahoo.com.

УДК 519.688:66.011

Аралбаева А.Р., Карамова А.И., Мустафина С.А.

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В КАСКАДЕ РЕАКТОРОВ

В работе построена математическая модель химического процесса с переменным реакционным объемом. Сформулирована задача моделирования в каскаде реакторов. Приведен вычислительный алгоритм и программа для расчета основных показателей процесса.

Ключевые слова: математическое моделирование, каскад реакторов, переменный реакционный объем.

Aralbaeva A.R., Karamova A.I., Mustafina S.A.

PROGRAM COMPLEX FOR MATHEMATICAL MODELING OF PROCESSES IN THE CASCADE OF REACTORS

A mathematical model of a chemical process with a variable reaction volume is constructed. The modeling problem in the cascade of reactors is formulated. A computational algorithm and a program for calculating the main indicators of the process.

Key words: mathematical modeling, cascade of reactors, variable reaction volume.

Современное химико-технологическое производство представляет собой систему взаимосвязанных аппаратов, так называемый каскад реакторов. Прежде чем переходить к оптимизации всей химико-технологической системы, необходимо обеспечить адекватность математической модели работы самой системы.

Математическая модель химико-технологической системы состоит из двух частей – совокупности математических моделей отдельных блоков и математической модели структуры системы. Для определения выходных переменных по математической модели реактора с неподвижным слоем катализатора, необходимо решить задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а в случае учета продольной диффузии – краевую задачу. При этом, учитывая, что система уравнений химической кинетики является жесткой, необходимы алгоритмы для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

© Аралбаева А.Р., Карамова А.И., Мустафина С.А.., 2017

Большинство химико-технологических процессов сопровождается значительным изменением температуры в реакторе. При проведении экзотермических реакций тепло реакции можно отводить с помощью внутренних или выносных холодильников. Для перехода на непрерывный процесс в целях его интенсификации и улучшения состава реакционной массы, при необратимых последовательно-параллельных реакциях, выгоднее применять каскад реакторов [2]. Использование каскада реакторов может существенно уменьшить стоимость производства.

Математическую модель процессов с переменным реакционным объемом можно представить в виде уравнений [2]:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{F_i - x_i F_n}{N}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

$$\frac{dN}{dt} = F_n(x,T) \tag{2}$$

с начальными условиями:

$$x_i(0) = x_i^0, \ \ i = \overline{1,m}, \ \ N(0) = 1. \tag{3}$$

Функции F_n, F_i выписываются с учетом матрицы стехиометрических коэффициентов.

Для математического описания процесса в реакторе необходимо систему уравнений материального баланса (1)-(3) дополнить уравнениями теплового баланса:

$$C_p C_0 \frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^{n} Q_j w_j + \alpha_x S_x (T_x - T), \tag{4}$$

$$C_{px} G_x \frac{dT_x}{dt} = \alpha_x S_x (T - T_x), \tag{5}$$

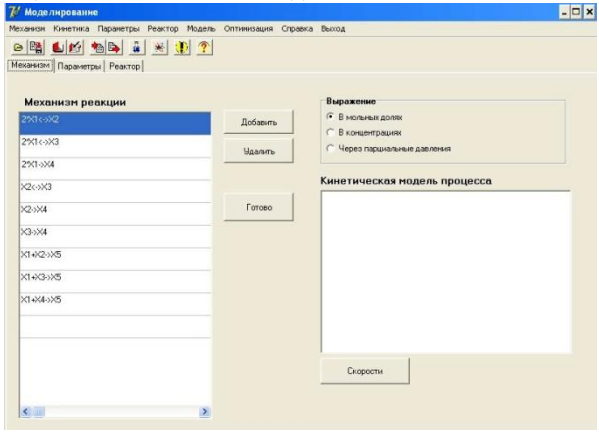
с начальными условиями

$$T(0) = T^0, \ T_x(0) = T_x^0. \tag{6}$$

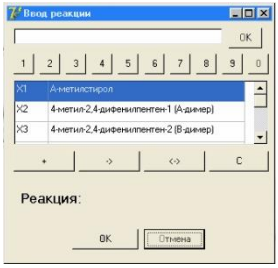
Таким образом, в случае рассмотрения каскада реакторов, выходные данные $(i-1)$-го реактора являются входными для следующего *i*-го реактора, а в уравнения (1)-(6) вводится дополнительная нумерация по номеру реактора.

Для расчета такой многомерной модели в среде программирования Borland Delphi создана программная оболочка. Входная форма

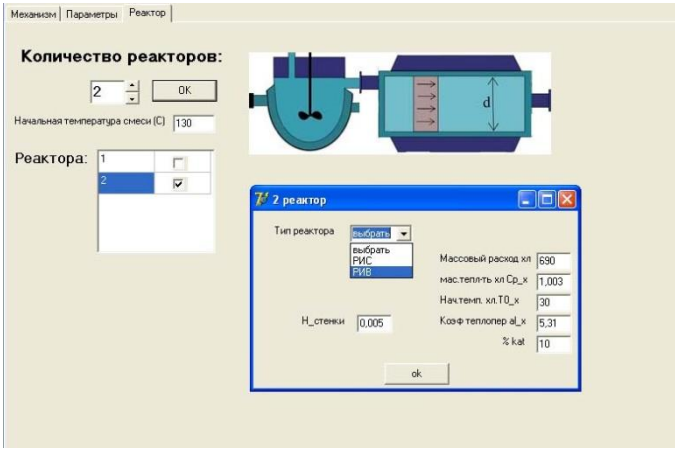
оболочки содержит три вкладки, на которых поэтапно задаются все составляющие математической модели.



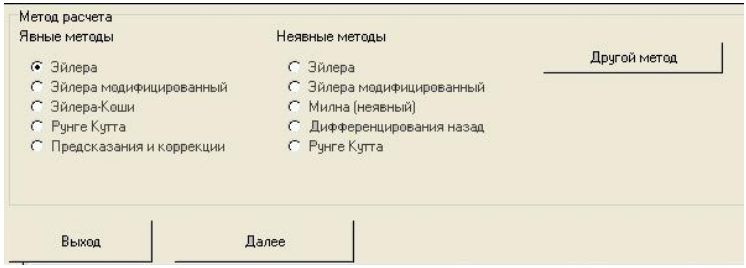
Шаг 1. Вводятся все реакции, составляющие процесс, коэффициенты автоматически заносятся в стехиометрическую матрицу. Для каждой реакции на основании закона действующих масс составляется кинетическое уравнение. При необходимости модель может быть изменена вручную с помощью набора доступных параметров или вновь созданных при необходимости.



Шаг 2. Вводятся термодинамические и теплофизические параметры процесса, создается файл модели. Выбирается схема реакторов для процесса.



Шаг 3. Для перехода к этапу расчета построенной модели выбирается метод решения прямой кинетической задачи из имеющихся библиотек.



Набор методов можно пополнять при соответствующем оформлении новых численных алгоритмов в виде dll-библиотек.

Шаг 4. На основе созданной модели проводятся расчета основных показателей процесса в зависимости от выбранных значений параметров. Результаты расчета выводятся таблично и графически.

Исследователю предоставляется возможность анализировать на соответствие результатов расчета с экспериментальными данными, путем внесения экспериментальных точек и по ним вычисления ошибки вычислительного эксперимента методами количественного анализа.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-47-020068 и проекта № 13.5143.2017/БЧ, выполняемого вузом в рамках государственного задания Минобрнауки РФ

The study was funded by RFBR according to the research project № 17-47-020068 and project No. 13.5143.2017/ BCH, carried out by the University in the framework of the State Task of the Ministry of Education of the Russian Federation

Библиографический список

1. Байтимерова, А.И. Жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений / А.И. Байтимерова, С.А. Мустафина. – М.: ВНТИЦ. – 2006. – № 0303024050320.

2. Байтимерова, А.И. Поиск оптимального управления в каскаде реакторов для процессов с переменным реакционным объемом / А.И. Байтимерова, С.А. Мустафина, С.И. Спивак // Системы управления и информационные технологии. – 2008, № 2 (32). – С. 38-42.

Сведения об авторах

Аралбаева Альбина Радиковна, аспирант, Институт нефтехимии и катализа РАН, E-mail: albina@aralbaeva.ru.

Карамова Альбина Ильгизовна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: alb_bai@rambler.ru

Мустафина Светлана Анатольевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры СФ БашГУ. E-mail: Mustafina_SA@rambler.ru

УДК 519.2

Арсланова Р.Р., Абдюшева С.Р.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ НАСЕЛЕНИЯ С УЧЕТОМ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ

В статье представлены результаты исследования зависимости заболеваемости от различных факторов на примере онкологических заболеваний. На основе данных методами статистического анализа построены адекватные математические модели и рассчитаны прогнозные значения заболеваемости на последующие временные периоды.

© Арсланова Р.Р., Абдюшева С.Р., 2017

Ключевые слова: статистический анализ, заболеваемость населения, математическая модель, факторы риска, классы болезней.

Arslanova R. R., Abdiusheva S. R.

STATISTICAL ANALYSIS OF MORBIDITY OF THE POPULATION TAKING INTO ACCOUNT VARIOUS FACTORS

Abstract: the article presents the results of the study based on the incidence of various factors on the example of cancer. On the basis of data methods of statistical analysis is an adequate mathematical model and calculated the predicted values of the morbidity in subsequent time periods.

Key words: statistical analysis, morbidity, mathematical model, risk factors, classes of diseases.

Заболеваемость – это важнейшая составляющая комплексной оценки здоровья населения. Проблемы здоровья населения следует отнести к глобальным, связанным с национальной безопасностью государства. Острый демографический кризис в России, сопровождающийся отрицательным влиянием на состояние здоровья населения, определяет особое внимание государства к состоянию здоровья граждан.

Здоровье населения обусловлено комплексным воздействием факторов, определяющих образ жизни человека и состояние среды его обитания. Факторы, потенциально опасные для здоровья человека и способствующие возникновению заболеваний, называют факторами риска.

Понятие «фактор риска» применяется к любому явлению, влияние которого повышает вероятность возникновения заболеваний. Наряду с непосредственными причинами заболеваний, факторы риска, действуя опосредованно, создают условия для возникновения и развития заболеваний. Выявление факторов риска и профилактика хронических заболеваний способствуют сохранению здоровья и повышению качества жизни населения страны. Из этого следует, что одна из важнейших задач государственной власти состоит в разработке комплексных мер, направленных не только на предупреждение заболеваний, но, в первую очередь, и на коррекцию и устранение факторов риска их возникновения.

Основными факторами риска являются 5 групп факторов: социально-экономические, социально-биологические, социально-гигиенические, эколого-гигиенические, медико-организационные [1]. Группа эколого-гигиенических факторов включает показатели содержания

опасных соединений в атмосферном воздухе, в воде, в почве, в пищевых продуктах, а также неблагоприятные климатические условия.

Целью данного исследования является проведение статистического анализа средней продолжительности жизни и здоровья населения на примере онкологических заболеваний. В соответствии с целью поставлены следующие задачи:

– проанализировать особенности здоровья население как статистического объекта исследования;

– исследовать зависимость заболеваемости онкологическими болезнями от различных факторов;

– проанализировать динамику заболеваемости и составить прогноз на ближайшую перспективу;

– рассмотреть факторы влияющие на среднюю продолжительность жизни.

Ранее в наших работах [2], [3] излагался подход, позволяющий анализировать и прогнозировать показатели заболеваемости населения по основным классам болезней. Влияние различных факторов на возникновение и развитие заболевания также представляет несомненный интерес как с точки зрения общего здоровья населения, так и с точки зрения построения математических моделей и их исследования. Рассмотрим этот вопрос подробнее на примере онкологических заболеваний.

Поставим задачу выявить наличие (или отсутствие) взаимосвязи онкологических заболеваний (новообразования) от выбросов в атмосферу загрязняющих веществ, отходящих от стационарных источников (корреляционный анализ), а также установить является ли линейная форма взаимосвязи соответствующей данным статистики (регрессионный анализ). У нас имеются данные по числу (тыс. человек) зарегистрированных заболеваний у больных с диагнозом, установленным впервые относительно онкологических заболеваний и данные по количеству (тыс. тонн) выбросов в атмосферу загрязняющих веществ, отходящих от стационарных источников 2005 по 2014 год по Республике Башкортостан (таблица 1).

В нашем случае, y – заболеваемость новообразованиями, x_1 – годы наблюдения, x_2 – выбросы в атмосферу загрязняющих веществ, отходящих от стационарных источников.

Получаем уравнение множественной регрессии:

$$y = 151{,}3347 + 2{,}6050 * x_1 + 0{,}2821 * x_2 .$$

Прогнозирование по уравнению множественной регрессии (столбец $\hat{y}$) получается очень близким к статистическим данным. Качество модели, исходя из относительных отклонений по каждому наблюдению, признается хорошим, т.к. средняя ошибка аппроксимации составляет 1,67% .

Таблица 1

Взаимосвязь онкологических заболеваний от выбросов в атмосферу загрязняющих веществ

	Выбросы в атмосферу загрязняющих веществ, отходящих от стационарных источников, тыс.тонн, x	Новообразования, на 100 тыс. чел., y	$\hat{y}_x$
2005	410,6700	270,5000	280,9931
2006	395,0000	272,7000	273,3792
2007	406,6100	271,9000	279,0204
2008	417,4000	277,7000	284,2632
2009	397,9000	275,4000	274,7883
2010	387,5900	279,5000	269,7787
2011	406,4400	278,5000	278,9378
2012	402,8270	287,8000	277,1823
2013	448,9420	287,8000	299,5893
Сумма	3673,3790	2501,8000	2517,9321
Сред.знач	408,1532	277,9778	279,7702

Стандартизированное уравнение $\hat{t}_{x_1} = \beta_1 * t_{x_1} + \beta_2 * t_{x_2} + \varepsilon$ регрессии будет выглядеть следующим образом: .

$$\hat{t}_{x_1} = 0{,}5379 * t_{x_1} + 0{,}4424 * t_{x_2}$$

Так как стандартизированные коэффициенты регрессии можно сравнивать между собой, то можно сказать, что фактор x_1 оказывает большее влияние на *y,* чем x_2. Коэффициент множественной корреляции $R_{yx_1x_2} = 0{,}8763$ указывает на весьма сильную связь всего набора факторов с результатом. С помощью F-критерия Фишера подтверждается статистическая значимость всего уравнения и показателя тесноты связи $R_{yx_1x_2}$.

Для проверки возможности прогнозирования исключим 2014 год. Уравнение регрессии примет вид $y = 212{,}4116 + 0{,}1606 * x$. Выбросы в атмосферу в 2014: 458,365. Подставляя в уравнение, получаем прогноз заболеваемости: 286,0425. Это довольно сильно различается с реальным статистическим значением: 320,3 (10,7%). Однако по рисунку 1 видно, что значение 2014 года (10-ый год наблюдения) сильно «выбивается» из общей тенденции. Возможно, на выявление впервые заболевших в этом году повлияли какие-то дополнительные факторы. Так, это могли быть результаты всеобщей диспансеризации.

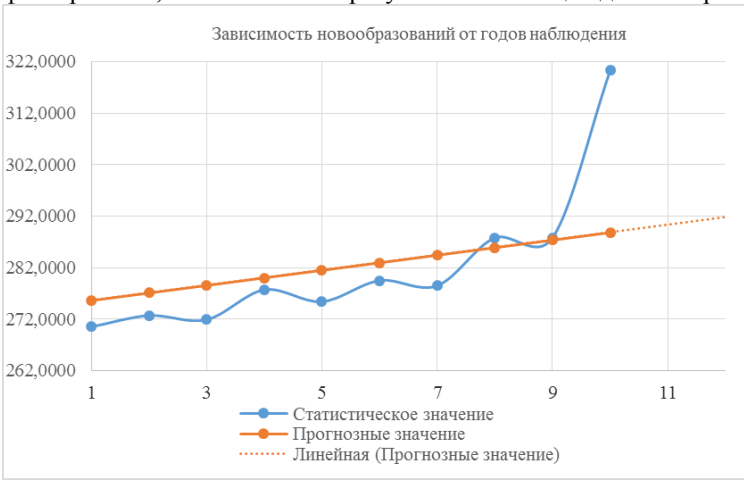


Рис.1. Зависимость количества заболевших новообразованиями от года наблюдения

Для получения более точных прогнозов необходимо исследовать дополнительные факторы, которые могут влиять на заболеваемость населения.

Теперь поставим задачу выявить наличие (или отсутствие) взаимосвязи средней продолжительности жизни и расходов на здравоохранение (в % от ВВП). У нас имеются данные средней продолжительности жизни (годы) и данные расходов на здравоохранение (в % от ВВП) 1995 по 2014 год по России (таблица 2).

Таблица 2

Взаимосвязь средней продолжительности жизни от расходов на здравоохранение

	Средняя продолжительность жизни, лет, y	Годы, x1	Расходы на здравоохранение (в % от ВВП), x2	$\hat{y}_x$
1995	65,22	1	5,36	64,3828
1996	66,19	2	5,55	64,8235
1997	66,95	3	7,1	67,0386
1998	66,78	4	6,62	66,6051
1999	66,04	5	5,8	65,7281
2000	65,34	6	5,42	65,4251
2001	65,49	7	5,67	65,9440
2002	65,09	8	5,99	66,5544
2003	65,01	9	5,61	66,2514
2004	65,42	10	5,19	65,8962
2005	65,47	11	5,21	66,1151
2006	66,64	12	5,3	66,4253
2007	67,5	13	5,38	66,7225
2008	67,85	14	6,22	68,0112
2009	68,6	15	7,44	69,7958
2010	68,86	16	6,83	69,1927
2011	69,66	17	6,61	69,0985
2012	70,24	18	6,88	69,6435
2013	70,76	19	7,09	70,1103
Сумма	70,93	20	7,07	70,2770
Сред.знач	1344,0400	210	122,3400	1344,0410

Пусть y – средняя продолжительность жизни, x_1 – годы наблюдения, x_2 – расходы на здравоохранение (в % от ВВП).

Получаем уравнение множественной регрессии:

$$y = 57{,}1968 + 0{,}1928 * x_1 + 1{,}3047 * x_2 .$$

Прогнозирование по уравнению множественной регрессии (столбец $\hat{y}$) дает значения, близкие к статистическим данным. Качество модели, исходя из относительных отклонений по каждому наблюдению, признается хорошим, т.к. средняя ошибка аппроксимации составляет 2,2% .

Коэффициент множественной корреляции $R_{yx_1x_2} = 0{,}9247$ указывает на весьма сильную связь всего набора факторов с результатом.

С помощью F-критерия Фишера подтверждается статистическая значимость всего уравнения и показателя тесноты связи $R_{yx_1x_2}$.

По данным Всемирной организации здравоохранения подтверждается прямая зависимость между общими расходами на здравоохранение и средней (ожидаемой) продолжительностью жизни.

Библиографический список

1. Общественное здоровье и здравоохранение: учебник / О.П. Щепин, В.А. Медик. – 2011. – 592 с.

2. Абдюшева С.Р., Арсланова Р.Р. Математические модели в страховании жизни и здоровья // Математические методы и модели в исследовании государственных и корпоративных финансов и финансовых рынков. Сборник материалов Всероссийской молодежной научно-практической конференции.– Уфа, АЭТЕРНА, 2015 г.– Часть I – С. 107-109.

3. Габдульманова Л.И., Абдюшева С.Р. Применение математических методов для анализа заболеваемости населения // Математические методы и модели в исследовании государственных и корпоративных финансов и финансовых рынков. Сборник мат-ов Всерос. молодежной науч.-практ. конф.– Уфа: АЭТЕРНА, 2015.– Часть I. – С. 178-180.

Сведения об авторах

Арсланова Ралина Рафиковна, магистрант 2-го года факультета математики и информационных технологий Башкирского государственного университета. E-mail: ralina.arslanova@mail.ru

Абдюшева Светлана Рашитовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования Башкирского государственного университета. E-mail: asr_light@mail.ru

УДК 532.546

Ахметова О.В., Галиев Ф.Ф.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ ЮЖНО-ЮГАНСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ ПРИ ЗАКАЧКЕ ВОДЫ

В работе представлены расчеты возмущения давления на основе «в среднем точного» асимптотического решения задачи сопряжения о поле давления в трехслойном анизотропном пласте.

Ключевые слова: поле давления, нефтесодержащий пласт, анизотропная среда, асимптотические решения.

Akhmetova O.V., Galiev F.F.

NUMERICAL INVESTIGATION OF PRESSURE FIELD IN SOUTH-YUGAN DEPOSIT FACILITY AT WATER PUMPING

The paper presents calculations of pressure perturbations based on the "on the average exact" asymptotic solution of the conjugation problem on the pressure field in a three-layer anisotropic layer.

Key words: pressure field, oil reservoir, anisotropic medium, asymptotic solutions.

Для построения модели пласта необходим большой спектр информации о нем, а возможности ее получения информации ограничены [3]. Основной целью расчетов является не точное определение всех характеристик процесса, а расширение сведений о закономерностях формирования поля давления, которые необходимы при разработке месторождения. Исследование фильтрационных процессов приводит к необходимости учета неоднородности и анизотропии пласта, зависимости от пространственных координат проницаемости и пьезопроводности, что усложняет решение задач.

В работах [1, 2] рассматривается асимптотический метод решения задачи сопряжения о поле давления при закачке флюида в режиме постоянной депрессии в трехслойной системе, содержащей уравнения пьезопроводности, учитывающие ортотропию пластов. На границах раздела сред заданы условия равенства давлений и потоков.

Формулы для нулевого асимптотического приближения найдены в работе [1].

© Ахметова О.В., Галиев Ф.Ф., 2017

$$P^{(0)} = \frac{P_0}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{M}\,x}{2\sqrt{\xi}}\right) d\xi,$$

$$P_1^{(0)} = \frac{P_0}{\sqrt{\pi t}} \int_{z-1}^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{M}\,x}{2\sqrt{\xi - z + 1}}\right) d\xi,$$

$$P_2^{(0)} = \frac{P_0}{\sqrt{\pi t}} \int_{|z+1|\chi_2}^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{M}\,x}{2\sqrt{\xi - |z+1|\chi_2}}\right) d\xi.$$

Выражения для первого коэффициента асимптотического разложения определены в [2]

$$P^{(1)} = \left[\left(\frac{1}{6} - \frac{z^2}{2}\right)\left(k_1 + k_2\sqrt{\chi_2}\right) - z\left(k_1 - k_2\sqrt{\chi_2}\right)\right] \times$$

$$\times \frac{P_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \psi\left(\sqrt{M}\,x, \tau\right) d\tau +$$

$$+ \left[\left(k_1 - k_2\sqrt{\chi_2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(k_1 + k_2\sqrt{\chi_2}\right)^2\right] \times$$

$$\times \frac{P_0}{8\mathrm{X}\pi M\sqrt{t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \psi\left(\sqrt{M}\,x, \tau\right)\left(\frac{Mx^2}{2\tau} - 1\right) d\tau,$$

$$P_1^{(1)} = -\left[\frac{1}{3}\left(k_1 + k_2\sqrt{\chi_2}\right) + \left(k_1 - k_2\sqrt{\chi_2}\right)\right] \times$$

$$\times \frac{P_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \psi\left(\sqrt{M}\,x, \tau - z + 1\right) \Phi(\tau - z + 1) d\tau +$$

$$+ \left[\left(k_1 - k_2\sqrt{\chi_2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(k_1 + k_2\sqrt{\chi_2}\right)^2\right] \frac{P_0}{8\mathrm{X}\pi M\sqrt{t}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) \psi\left(\sqrt{M}\,x, \tau - z + 1\right)\left(\frac{Mx^2}{2(\tau - z + 1)} - 1\right) \Phi(\tau - z + 1) d\tau,$$

$$P_2^{(1)} = -\left[\frac{1}{3}\left(k_1 + k_2\sqrt{\chi_2}\right) - \left(k_1 - k_2\sqrt{\chi_2}\right)\right]\frac{P_0}{2\sqrt{\pi t}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right)\psi\left(\sqrt{M}\,x, \tau - \sqrt{\chi_2}\,|z+1|\right)\Phi\left(\tau - \sqrt{\chi_2}\,|z+1|\right)d\tau +$$

$$+\left[\left(k_1 - k_2\sqrt{\chi_2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(k_1 + k_2\sqrt{\chi_2}\right)^2\right]\frac{P_0}{8X\pi M\sqrt{t}} \times$$

$$\times \int_{\sqrt{\chi_2}|z+1|}^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right)\psi\left(\sqrt{M}\,x, \tau - \sqrt{\chi_2}\,|z+1|\right)\left(\frac{Mx^2}{2\left(\tau - \sqrt{\chi_2}\,|z+1|\right)} - 1\right)d\tau.$$

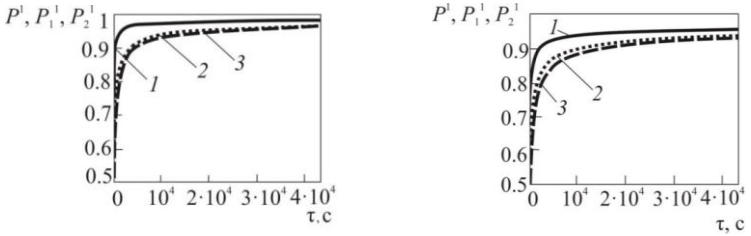
Параметры, использованные в расчетах, представлены в таблице 1.

Таблица 1

Расчетные параметры

	Ю. Юганское месторождение			
	БС10-1		БС11-1а	
	k (м^2)	χ (м^2/с)	k (м^2)	χ (м^2/с)
Надстилающий	$3.158*10^{-14}$	0.128	$3.158*10^{-14}$	0.128
Центральный	$9.74*10^{-13}$	1.898	$1.194*10^{-13}$	0.335
Подстилающий	$9.87*10^{-15}$	0.041	$9.869*10^{-15}$	0.034

На рис. 1 представлены графики динамики возмущения давления для $БС_{10\text{-}1}$ (*а*) и $БС_{11\text{-}1}$ (*б*). Расчетные параметры, не вошедшие в таблицу: $x_d = 1$ м, $h = 1$ м, для кривой *1* – $z_d = 0.2$ м, *2*– $z_d = 2$ м, *3* – $z_d = -2$ м. В представленных ниже графиках возмущение давления измеряется в долях от P_0.

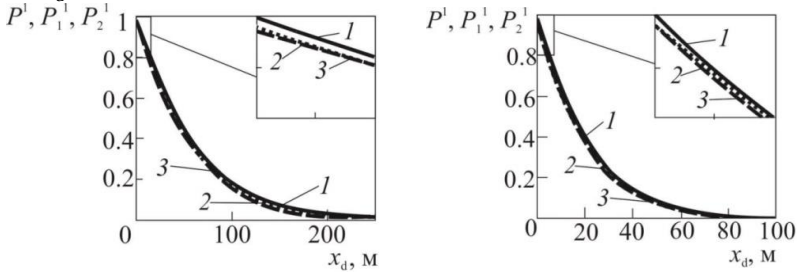


а *б*

Рис.1. Динамика возмущения давления для БС10-1 (а) и БС11-1 (б)

На графиках возмущения давления от времени наблюдается быстрый рост кривых при значении τ от 0 до $5 \cdot 10^3$ с и стабилизация процесса от 10^4 с. Выяснено, что более высокие значения изменения давления в среднем пропластке соответствуют среде с большими значениями проницаемости и пьезопроводности. Так же из анализа графиков эволюции возмущения давления следует, что чем меньше проницаемость пластов, тем позже происходит стабилизация возмущения давления, а с увеличением проницаемости пласта увеличивается и амплитуда возмущения давления.

На рис. 2 иллюстрируется затухание возмущений давления при удалении от скважины для разных расстояний от плоскости z_d=0, так же для $БС_{10\text{-}1}$ (*а*) и $БС_{11\text{-}1}$ (*б*). Расчетные параметры, не вошедшие в таблицу: h = 1 м, τ = 43200 с, кривая *1* – z_d = 0.2 м, *2* – z_d = 2 м, *3* – z_d = –2 м.

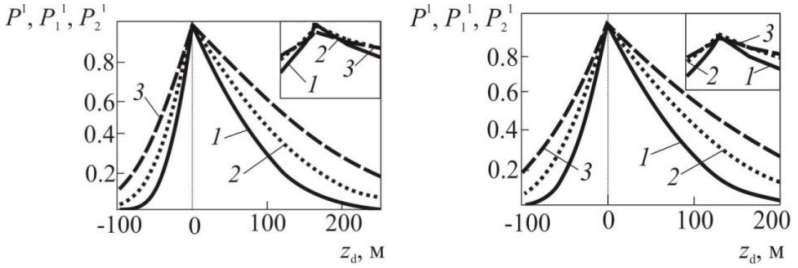


а *б*

Рис. 2. Затухание возмущений давления при удалении от скважины для $БС_{10\text{-}1}$ (а) и $БС_{11\text{-}1}$ (б)

Из графиков зависимости возмущения от горизонтальной координаты видно, что затухание в одном пласте для всех пород происходит на одном и том же расстоянии. Отсюда следует, что затухание возмущения давления зависит от проницаемости центрального пласта, т.е. чем больше проницаемость центрального пласта, тем больше глубина проникновения возмущения. Так же из графиков следует, что амплитуда возмущения больше зависит от пьезопроводности, что соответствует определению, пьезопроводность показывает скорость движения изобарных поверхностей.

На рис. 3 представлены зависимости возмущения давления от z_d (*а* – $БС_{10\text{-}1}$, *б* – $БС_{11\text{-}1а}$). Расчетные параметры: x_d = 1 м, h = 1 м, кривая *1* – τ = 43200 с, *2*– τ = 86400 с, *3* – τ = 172800 с, графики на врезках выполнены в пределах z_d от –3 до 3, и P – в пределах от 0.9 до 1.



а *б*

Рис. 3. Зависимости возмущения давления при изменении вертикальной координаты (а - $БС_{10\text{-}1}$, б - $БС_{11\text{-}1а}$)

Из графических зависимостей возмущения давления по вертикальной координате видно, что различие наклона левых и правых кривых, и кривой соответствующей центральному пласту зависит от характеристик подстилающего и настилающего пластов, главным образом от проницаемости окружающей породы. Максимум амплитуды возмущения давления смещается в сторону с меньшей проницаемостью.

Итак, расчеты, осуществленные по формулам из работ [1, 2], позволяют определить влияние фильтрационных характеристик залежи на особенности формирования поля давления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проектов № 16-08-00548 А, № 16-08-00728 А.

Библиографический список

1. Ахметова О.В., Губайдуллин М.Р., Филиппов А.И. Асимптотически осредненное решение задачи о поле давления в слоисто-неоднородной пористой среде // Электронный научный журнал нефтегазовое дело. 2015. – С. 693–715.

2. Ахметова О.В., Губайдуллин М.Р., Ковальский А.А., Филиппов А.И. Первое асимптотическое приближение задачи о поле давления в неоднородной ортотропной пористой среде // Известия Уфимского научного центра РАН. 2016. – С. 5–12.

3. Кулешков И.В., Колбиков В.С., Басниев К.С. Классификация нефтегазовых эксплуатационных объектов с оценкой степени сложности выработки запасов углеводородов // Технологии нефти и газа. 2010. – № 2 (67). – С. 29–38.

Сведения об авторах

Ахметова Оксана Валентиновна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ.

E-mail: ahoksana@yandex.ru

Галиев Фанис Фанилович, магистрант СФ БашГУ.

E-mail: fanis.galiev@mail.ru

УДК 519.6:544.33:544.182.34

Ахметьянова А.И., Исмагилова А.С., Хурсан С.Л.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ГОМОДЕСМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ НА ПРИМЕРЕ ЦИКЛОПЕНТЕНА

В настоящей работе приведена теоретико-графовая интерпретация циклических химических соединений, описан алгоритм конструирования базиса гомодесмических реакций, который позволяет реализовать гомодесмический подход для расчета стандартной энтальпии образования. Для наглядности алгоритма приведен пример выписывания базиса гомодесмических реакций для молекулы циклопентена.

Ключевые слова: базис гомодесмических реакций, молекулярный граф, энтальпия образования, термохимическая группа.

Ahmetyanova A. I., Ismagilova A.S., Khursan S.L.

CONSTRUCTION OF HOMODESMIC REACTIONS ON THE EXAMPLE OF CYCLOPENTONE

Abstract: This paper presents a graphical interpretation of cyclic chemical compounds, describes the algorithm for constructing a basis for homodesmic reactions, which makes it possible to realize a homodesmic approach for calculating the standard enthalpy of formation. For clarity of the algorithm, an example is given of writing out the basis of homodesmic reactions for a cyclopentene molecule.

Key words: homodesmic reaction basis, molecular graph, formation enthalpy, thermochemical group

Молекулярная энергетика дает важную информацию для обоснованной разработки технологических процессов получения органиче-

© Ахметьянова А.И., Исмагилова А.С., Хурсан С.Л., 2017

ских продуктов. Информация об энергосодержании химических соединений, как правило, неполная и зачастую неточная. Для решения этой проблемы актуальны теоретические методы оценки энтальпий образования. Но для большинства химических соединений композитные методы расчета требуют больших затрат компьютерных и временных ресурсов. Один из наиболее рациональных способов – использование концепции изодесмичности. Анализ методов определения термохимических характеристик химических соединений показал, что наиболее надежным является метод сравнительного расчета, основанный на использовании гомодесмических реакций (ГДР) [1]-[3].

Настоящая работа является продолжением исследований, начатых авторами в [3]-[4]. Целью является описание базиса ГДР для молекулы циклопентена, который позволяет реализовать гомодесмический подход для расчета стандартной энтальпии образования.

Алгоритм конструирования базиса ГДР для циклического соединения включает в себя следующие основные этапы [4]:

1. Представить всевозможные варианты «развернутой» молекулы, которая получена из исходной «разрывом» циклической связи. Выявить все возможные комбинации внутренних групп, образующих химическое соединение.

2. Для каждого слагаемого подобрать концевые группы из тех, что присутствуют в исходном химическом соединении. Сформировать правые части ГДР.

Если в составе соединения нет концевых или нет подходящих среди имеющихся, сконструировать «новую», присоединением валентно-связанных атомов.

3. Для определения реагента (реагентов) исходного химического соединения учесть групповой состав продуктов правой части ГДР. Реагенты составляются из концевых групп, входящих в продукты.

4. Проставить стехиометрические коэффициенты в ГДР согласно групповому балансу – сохранение числа групп (внутренних и концевых) каждого типа.

Проиллюстрируем работу алгоритма на примере конструирования базиса ГДР для молекулы циклопентена. На рис.1 приведен молекулярный граф циклопентена. Строение соединения представляется в виде комбинации внутренних термохимических – B_1, B_2, B_3. В молекуле циклопентена присутствуют четыре типа химических связей: C–C, C–H, (C=C)–C, (C=C)–H.

Кратные ребра между вершинами-атомами С и С указывает на двойную связь. По терминологии Бенсона, атомы, соединенные друг с другом кратными связями входят в состав термохимических групп (как внутренних, так и концевых) в виде одного «сложного» атома.

Для записи реагентов и продуктов ГДР также были использованы обозначения концевых групп $К_1$, $К_2$, $К_3$, представленные на рис.1.

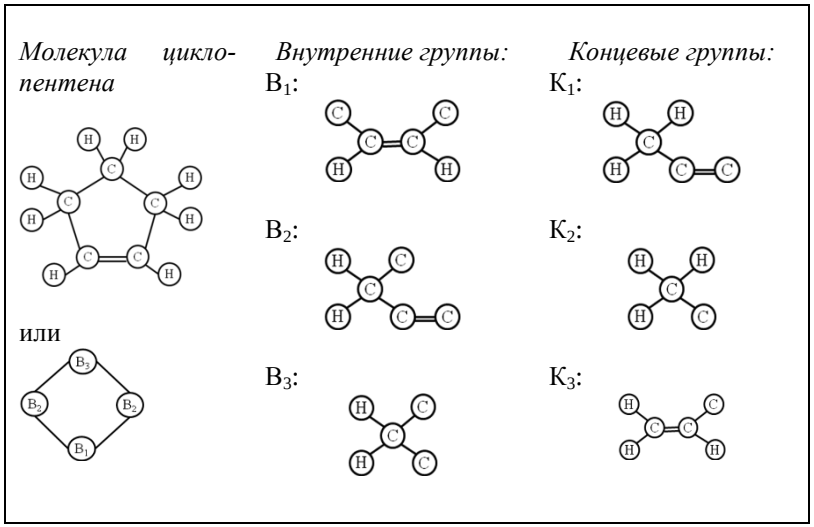
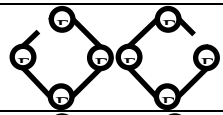
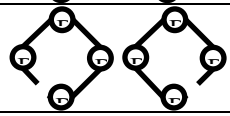
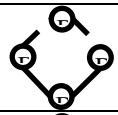
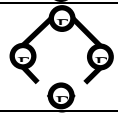
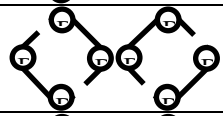
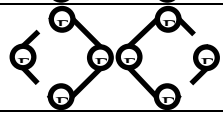
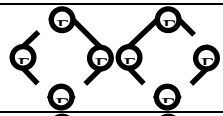
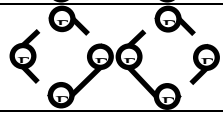
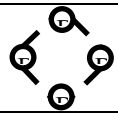


Рис.1. Молекулярный граф циклопентена и его групповой состав

Согласно алгоритму, для разрушения цикла минимальное число разрывов равно 1, а максимальное – 4 (по количеству связей между группами), т.е. для циклопентана существует девять базисных ГДР. При анализе возможных комбинаций учитывали, что все связи $В_1$–$В_2$, $В_2$–$В_3$ одинаковы, что уменьшает число вариантов разрыва. В таблице 1 представлены все возможные варианты разрыва связей между группами. Места разрыва показаны пунктирной линией, сохранившиеся связи – сплошной.

Таблица 1

Все возможные разрывы связей между группами в молекулярном графе циклопентена

Разрыв 1 связи		
1		1) + $К_2К_2 \rightarrow К_2В_3В_2В_1В_2К_2$
2		2) + $К_1К_3 \rightarrow К_1В_1В_2В_3В_2К_3$
Разрыв 2 связей		
1		**1)** + $2К_2К_2 \rightarrow К_2В_2В_1В_2К_2 + К_2В_3К_2$
2		**2)** + $2К_1К_3 \rightarrow К_3В_2В_3В_2К_3 + К_1В_1К_1$
3		**3)** $+К_1К_3 + К_2К_2 \rightarrow К_2В_2В_1К_1 +$ $+К_2В_3В_2К_3$
4		**4)** $+К_1К_3 + К_2К_2 \rightarrow К_2В_3В_2В_1К_1 +$ $+К_2В_2К_3$
Разрыв 3 связей		
1		**1)** + $2К_1К_3 + К_2К_2 \rightarrow К_2В_3В_2К_3 +$ $К_1В_1К_1 + К_2В_2К_3$
2		**2)** + $К_1К_3 + 2К_2К_2 \rightarrow К_2В_2В_1К_1 +$ $К_2В_3К_2 + К_2В_2К_3$
Разрыв 4 связей		
1		**1)** $+ 2К_1К_3 + 2К_2К_2 \rightarrow К_1В_1К_1 +$ $К_2В_3К_2 + 2К_2В_2К_3$

В настоящее время авторы работают над разработкой программного комплекса для определения базиса ГДР циклических органических соединений и расчета энтальпий образования, имеются предварительные результаты.

Библиографический список

1. Бенсон С.У. Термохимическая кинетика.– М.: Мир, 1971.– 308 с.

2. Хурсан С.Л. Сопоставительный анализ теоретических методов определения термохимических характеристик органических соединений // Вестник Башкирского университета.– Т.19.– № 2.– 2014.– С. 395-401.

3. Хурсан С.Л., Исмагилова А.С., Ахмеров А.А., Спивак С.И. Конструирование гомодесмических реакций для расчета энтальпий образования органических соединений // Журнал физической химии.– Т. 90.– № 4.– 2016.– С. 569-575.

4. Исмагилова А.С., Хурсан С.Л., Спивак С.И. Теоретико-графовый алгоритм определения базиса гомодесмических реакций для циклических химических соединений // Материалы V Всероссийской научно-практической конференции «Математическое моделирование процессов и систем». Часть I. – Стерлитамак: РИЦ БашГУ, 2016.– С. 142-147.

Сведения об авторах

Ахметьянова Альбина Ильшатовна, студент 3 г.о. факультета математики и информационных технологий БашГУ. E-mail: ai-albina@mail.ru

Исмагилова Альбина Сабирьяновна, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры математического моделирования БашГУ. E-mail: IsmagilovaAS@rambler.ru

Хурсан Сергей Леонидович, д.х.н., профессор, зав. лабораторией химической физики ИХ УНЦ РАН. E-mail: khursansl@gmail.com

УДК 517.984

Ахтямов А.М.

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЖОНА ЛОККЕРА

Для дифференциальных уравнений четных порядков известны спектральные задачи с краевыми условиями, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Причем, эти задачи не содержат спектральный параметр в краевых условиях. Джоном Локкером поставлена следующая проблема: существуют ли подобные задачи для дифференциальных уравнений нечетного порядка? В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос. Для дифференциального уравнения любого нечетного порядка найдены примеры соответствующих спектральных задач. Примеры найдены с помощью авторских методов идентификации краевых условий спектральных задач по их спектру.

Ключевые слова: спектральные задачи, обыкновенные дифференциальные уравнения нечетного порядка, спектр, собственные значения, характеристический определитель, вырожденные краевые условия.

Akhtyamov A.M.

TO THE SOLUTION OF A PROBLEM OF JOHN LOCKER

For differential equations of even order, we know spectral problems with boundary conditions whose spectrum fills the entire complex plane. Moreover, these problems do not contain a spectral parameter in the boundary conditions. John Locker posed the following problem: are there similar problems for odd-order differential equations? In this paper we give a positive answer to this question. Examples of the corresponding spectral problems are found for a differential equation of any odd order. Examples are found using author's methods for identifying boundary conditions of spectral problems from their spectrum.

Keywords: spectral problems, ordinary differential equations of odd order, spectrum, eigenvalues, characteristic determinant, degenerate boundary conditions.

В [1] показано, что если коэффициенты обыкновенного дифференциального уравнения непрерывны на [0,1], то для спектра соответствующей краевой задачи имеются только следующие две возможности: 1) существует не более счетного числа собственных

© Ахтямов А.М., 2017

значений, не имеющих предельной точки в $\mathbb{C}$; 2) каждое значение $\lambda \in \mathbb{C}$ является собственным значением.

Прямые и обратные задачи для случая 1) достаточно хорошо изучены (см., например, [2, 3, 4]). Вырожденный случай 2) изучен мало (Краевые условия называются вырожденными, если характеристический определитель соответствующей спектральной задачи тождественно равен костанте [5]). Хорошо известен, пожалуй, только пример дифференциального оператора любого четного порядка, для которого спектр заполняет всю комплексную плоскость [6] (see also [7, 8]). Краевые условия в этом примере имеют следующий вид:

$$U_j(y) = y^{(j-1)}(0) + (-1)^{j-1} y^{(j-1)}(1) = 0, \qquad j = 1,2,3,4.$$

В [7,8] Джон Локкер (John Locker) сформулировал несколько нерешенных проблем спектрального анализа двухточечных краевых задач. Одна из них представляет собой следующий вопрос: может ли быть найдена спектральная задача с дифференциальным уравнением

$$i^{-n} y^{(n)}(x) = \lambda y(x), \qquad x \in [0,1] \tag{1}$$

нечетного порядка n, краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{jk} y^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{n} \alpha_{jk+n} y^{(k)}(1), \qquad j = 1,\ldots,n \tag{2}$$

и спектром, заполняющим всю комплексную плоскость?

В работе дан положительный ответ на этот вопрос. Для дифференциального оператора любого нечетного порядка n найдены две спектральные задачи (1)-(2), спектр которых полностью заполняет всю комплексную плоскость.

Для дифференциального уравнения (1) порядка $n = 3$

$$-iy'''(x) = \lambda y(x), \qquad x \in [0,1]$$

краевые условия (2) имеют следующий вид:

$$y(0) + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} y(1) = 0, \quad y'(0) - y'(1) = 0, \quad y''(0) + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} y''(1) = 0$$

или

$$y(0) + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} y(1) = 0, \quad y'(0) - y'(1) = 0, \quad y''(0) + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} y''(1) = 0.$$

Эти краевые условия были найдены следующим образом. Для спектральной задачи (1), (2) был построен характеристический определитель. Далее характеристический определитель был приравнен к нулю, после чего, используя линейную зависимость и независимость соответствующих функций от s, были получены уравнения для миноров матрицы краевых условий (2). К этим уравнениям были добавлены так называемые соотношения Плюккера, основанные на том, что не каждое число может быть минором матрицы. Из полученной системы уравнений были найдены миноры матрицы краевых условий. Некоторые из миноров обратились в нуль, а для других были найдены зависимости между ними, по которым с помощью методов работы [10] были найдены спектральные задачи (1), (2) с характеристическим определителем, тождественно равным нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Ведущие научные школы РФ (проект НШ-7461.2016.1) и *РФФИ* (проект 15-01-01095_а) и *Минобрнауки РФ в рамках проекта № 5753, выполняемого в качестве базовой части государственного задания.*

Библиографический список

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

2. Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в краевых условиях // Труды семинара им. И.Г. Петровскгого. – 1983. – № 9. – С. 190-229.

3. Sadybekov M.A., Akhymbek M.E. Spectral properties of some non strongly regular boundary value problems for fourth order differential operators, 2nd International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014) // AIP Conf. Proc. – 2014. – Т. 1611. – С. 156-160.

4. Sadovnichii V.A., Sultanaev Ya.T., Akhtyamov A.M. General Inverse Sturm-Liouville Problem with Symmetric Potential // Azerbaijan Journal of Mathematics. – 2015. – Т. 5.– № 2. – С. 96-108.

5. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 332 с.

6. Садовничий В.А., Кангужин Б.Е. О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями // Доклады Академии наук. – 1982. – Т. 267, № 2. – С. 310-313.

7. Locker J. Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two-point differential operators //

https://dspace.library.colostate.edu/bitstream/handle/10217/170086/BKSF_Locker_Eigenvalues-Completeness.pdf?sequence=1 2006.

8. Locker J. Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two-point differential operators // American Mathematical Society. – 2008. – Vol. 195, No. 911.

9. Ахтямов А.М. О спектре дифференциального оператора нечетного порядка // Математические заметки. – 2017. – Т. 101, № 5. – С. 643-646.

10. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.

Сведения об авторе

Ахтямов Азамат Мухтарович, доктор физико-математических наук, профессор БашГУ. E-mail: Akhtyamovam@mail.ru.

УДК 330.4

Ахтямов А.М., Гарипова Л.Х.

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ. ТЕОРЕМЫ, ПРИМЕРЫ И КОНТРПРИМЕРЫ

В работе построены примеры экономических законов в частности парадоксов с помощью математических теорем. Приведены примеры, контрпримеры.

Ключевые слова: парадокс, эффект сноба, товары Гриффена, эффект присоединения к большинству, контрпример.

Akhtyamov A.M, Garipova L.Kh.

ECONOMIC LAWS AS MATHEMATICAL STATEMENTS. THEOREMS, EXAMPLES AND COUNTEREXAMPLES.

In the work examples of economic laws, in particular paradoxes, are constructed using mathematical theorems. Examples are given, counterexamples.

Keywords: paradox, snob effect, Griffen products, the effect of joining the majority, counterexample.

С учётом того, что научное знание непрерывно развивается, возникает потребность в изменении теории, определяющаяся тем, что

© Ахтямов А.М., Гарипова Л.Х., 2017

всё чаще и чаще прогнозы, выполняемые с помощью подобной теории, оказываются не точными, возникают различные парадоксы, когда теория утверждает одно, а на практике происходит совсем другое. Разберем более подробно.

Теорема. Если товар не является товаром (продуктом) первой необходимости, то повышение цены на него вызывает понижение спроса.

Условие при которых терема выполняется: товар не является товаром первой необходимости. Приведем соответствующий пример.

Соотношение цены и количества проданного товара А на рынке

Цена (Price) за единицу товара А в денежном выражении	Спрос (Quantity) – количество проданного товара А

построим кривую спроса, по оси *OX* отложены объемы продаж некоторого товара *X*, по оси *O*. Кривая спроса показывает, что между ценой товара и его количеством устанавливается обратно пропорциональная зависимость

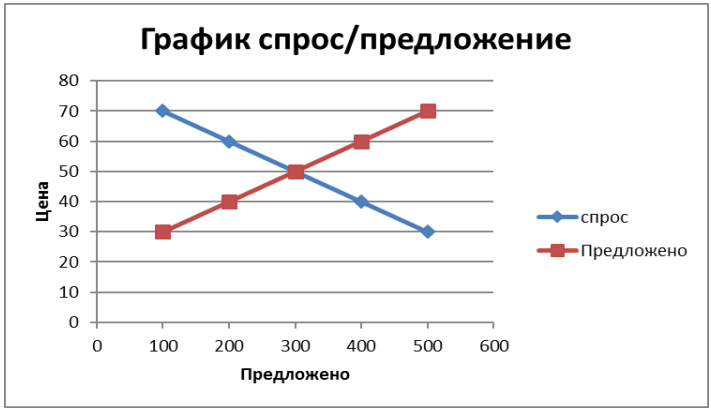


Рис.1. График спроса и предложения на рынке.

Данная теорема не выполняется в случае:

Контрпример 1. Парадокс Гиффена: при повышении цен на определённые виды товара (в основном товары первой необходимости) их потребление повышается за счёт экономии на других товарах.

Условия выполнения парадокса:

Малоценные товары, занимающие в потребительском бюджете значительное место и для которых отсутствует равнозначный товар-заменитель.

Примеры из истории:

Голод в Ирландии 1845–1849. Картофель был основным продуктом питания в Ирландии, из-за неурожая цены на картофель непомерно возросли, его потребление повысилось.

Контрпример 2. Парадокс Веблена – ситуация, когда покупатели воспринимают снижение цены товара как сигнал о снижении его качества или престижности, а повышение цены, делает товар более привлекательным.

Условия выполнения парадокса: товары, свидетельствующие о высоком статусе, предметы роскоши.

Пример из истории:

Произведения современного искусства, с ростом цен на произведения, объёмы их приобретения растет. Так же престижные марки авто, марки одежды дорогих брендов.

Контрпример 3. Эффект сноба отражает противоположно направленное изменение величины спроса на блага одним потребителем, в ответ на изменение величины спроса других потребителей.

Условия выполнения парадокса: объем потребления данного товара зависит от размеров потребления.

Примеры из истории:

Известные бренды часов (при наличии у всех мобильных телефонов), плазменные телевизоры больших форматов (а комнатки стандартные), громоздких и мощных машин (джипов), и это в городах.

Контрпример 4. Эффект присоединения к большинству случай, когда отдельный покупатель предъявляет больший спрос на товар из-за того, что некоторые или все остальные покупатели на рынке также предъявляют больший спрос на этот товар.

Условия выполнения парадокса: товары массового потребления.

Пример из истории:

Эффект присоединения к большинству возникает в голосовании: некоторые люди голосуют за тех кандидатов или партии, у которых больше шансов выиграть (или если о таких шансах у них утверждают средства массовой информации).

Библиографический список

1. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов: Учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

2. Ананидзе М.Г. Товары Гиффена (эффект Гиффена) и их роль в современной экономике // Молодой ученый, 2015. – № 8. – С. 454-456.

3. Волкова Е.Н. К вопросу о современных тенденциях развития потребительского спроса в России // Российское предпринимательство, 2007. – № 5-2 (91). – С. 8-13.

4. Лейбенстайн Х. (1999). Эффект присоединения к большинству, эффект сноба и эффект Веблена в теории покупательского спроса / пер. с англ. И. Попович. В кн.: Вехи экономической мысли / сост. и общ. ред. В.М. Гальперина. Т.1: Теория потребительского поведения и спроса. СПб.– С. 304-325.

Сведения об авторах

Ахтямов Азамат Мухтарович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического моделирования БашГУ. E-mail: akhtyamovam@mail.ru

Гарипова Лилия Халиловна, магистран г. Уфа, БашГУ. E-mail: lilya.garipova02@mail.ru.

УДК 517.984, 54.534, 51.74

Ахтямов А.М., Сафина Г. Ф.

ВЛИЯНИЕ УПРУГИХ ЗАКРЕПЛЕНИЙ ПОЛОЙ ТРУБЫ НА ЧАСТОТЫ ЕЕ АСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Исследовано влияние закреплений полой узкой трубы на значения частот ее асимметричных колебаний. Показано, что увеличение коэффициентов относительной жесткости упругих опор трубы ведет к увеличению частот ее колебаний.

Ключевые слова: частотное уравнение, собственные значения и частоты, упругие закрепления, зависимости частот.

Akhtyamov A.M., Safina G.F.

THE EFFECT OF ELASTIC FIXING OF HOLLOW TUBE AT THE FREQUENCY OF THE ASYMMETRIC VIBRATIONS

The influence of fixing the hollow narrow pipe on the frequencies of its asymmetric oscillations. It is shown that increase of the coefficients of relative stiffness of elastic supports of the pipe increases the frequency of its vibrations.

Key words: frequency equation, eigenvalues and frequencies of the elastic fixing, according to frequencies.

© Ахтямов А.М., Сафина Г. Ф., 2017

Работа, представленная в статье, является продолжением исследований по асимметричным колебаниям полых труб, как круговых цилиндрических оболочек [1] – [3]. Целью работы является исследование влияния коэффициентов относительной жесткости упругих закреплений полой трубы на частоты ее асимметричных колебаний.

Приведем краткие сведения по прямой задаче, необходимые для дальнейшего изложения. Свободные асимметричные колебания полой трубы описываются краевой задачей с дифференциальным уравнением

$$y^{(4)}(x) + 2\nu^2 y''(x) + r^4 y(x) = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями [1]

$$\begin{aligned} &y'(0) = 0, && y'(l) = 0, \\ &y'''(0) + 2\nu^2 y'(0) + B_0 l^{-3} y(0) = 0, && y'''(l) + 2\nu^2 y'(l) + B_l l^{-3} y(l) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Коэффициенты уравнения (1) имеют вид

$$2\nu^2 = \omega^2 \frac{\rho h}{E_1 h_1}, \quad r^4 = \frac{n^4 (n^2+1)^2 D_2}{E_1 h_1 R^6} - \omega^2 \frac{n^2 (n^2+1) \rho h}{E_1 h_1 R^2}$$

и выражаются через следующие параметры трубы: R, h, D – радиус, толщина и цилиндрическая жесткость, E, ρ – модуль упругости и плотность материала, ω – частота свободных колебаний, n – тон колебания, l – длина, B_0 и B_l – коэффициенты относительной жёсткости упругих закреплений трубы соответственно в сечениях $x = 0$ и $x = l$ (индекс «1» имеют величины, характеризующие трубу в осевом направлении, индекс «2» – в кольцевом направлении).

В работе [3] получено частотное уравнение свободных асимметричных колебаний трубы в виде:

$$\begin{aligned} &B_0 B_l \left[\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \sin\alpha \sin\beta - 2\alpha\beta(1 - \cos\alpha \cos\beta) \right] - \\ &\quad - (B_0 + B_l)(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 \beta \sin\alpha \cos\beta - \\ &- \beta^2 \alpha \sin\beta \cos\alpha) - \alpha^2 \beta^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2 \sin\alpha \sin\beta = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\alpha = al$ и $\beta = bl$ – безразмерные параметры, в которых $a^2 = \nu^2 - \sqrt{\nu^4 - r^4}$, $b^2 = \nu^2 + \sqrt{\nu^4 - r^4}$, причем частота $\omega^2 = \frac{(NL^2 + \alpha^4) E_1 h_1}{(L + \alpha^2) \rho h\, l^2}$ колебаний выражается через удлинение L и тонкостенность N трубы [1] как

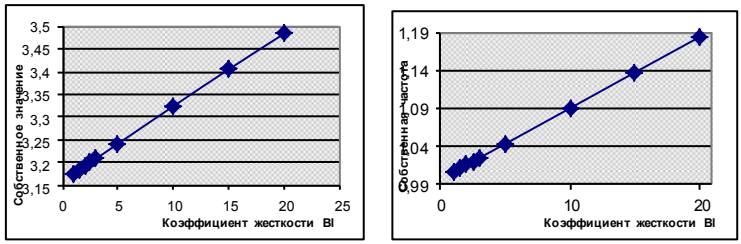
$$L=\left(\frac{l}{R}\right)^2 n^2(n^2+1), \qquad N=\frac{D_2}{E_1h_1R^2}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2. \tag{5}$$

Из уравнения (3) с учетом физических параметров и равенств (5) при известных значениях коэффициентов относительной жесткости B_0 и B_l упругих закреплений трубы можно определять соответствующие частоты ее асимметричных колебаний.

Рассмотрим теперь влияние коэффициентов относительной жесткости упругих закреплений полой трубы на значения собственных частот ее асимметричных колебаний. Пусть физические параметры трубы таковы, что $\frac{E_1h_1}{\rho hl^2}=1$, $L=10^2$, $N=10^{-3}$, при этом имеем связь между параметрами частотного уравнения (3) в виде: $\beta^2=\frac{10-100\alpha^2}{100+\alpha^2}$.

Решение прямой задачи при заданных физических параметрах показывает, что увеличение коэффициентов относительной жесткости B_0 и B_l упругих закреплений трубы ведет к увеличению как собственных значений α_i, так и собственных частот ω_i.

На рис. 1(а) приведен график зависимости собственного значения α_1 от коэффициента относительной жесткости B_l шпангоута, с которой закреплен правый конец трубы (при этом коэффициент относительной жесткости B_0 шпангоута, с которой закреплен левый конец оболочки, фиксирован и равен $B_0=1$).



а) б)

Рис. 1. Зависимость собственного значения α_1 (а), собственной частоты ω_1 (б) от коэффициента жесткости B_l упругой опоры трубы

На рис. 1(б) рассмотрен график зависимости собственной частоты ω_1 от коэффициента относительной жесткости B_l шпангоута, с которой закреплен правый конец трубы, при $B_0 = 1$.

Такие изменения касаются не только первого собственного значения и первой собственной частоты, но и всех частот колебаний трубы. Это подтверждают, например, таблицы 1 и 2, в которых приведены соответственно первые пять собственных значений и собственных частот задачи (1), (2), соответствующие увеличивающимся значениям B_l коэффициента жесткости.

Таблица 1

Зависимость собственных значений α_i от коэффициента жесткости B_l правой опоры при фиксированном коэффициенте B_0 жесткости левой опоры трубы

B_0	B_l	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	1	3,175	6,287	9,426	12,566	15,707
1	3	3,208	6,292	9,427	12,567	15,708
1	5	3,241	6,297	9,429	12,568	15,709
1	10	3,324	6,309	9,433	12,570	15,710

Таблица 2

Зависимость собственных частот ω_i от коэффициента жесткости B_l правой опоры при фиксированном коэффициенте B_0 жесткости левой опоры трубы

B_0	B_l	ω_1 (c^{-1})	ω_2 (c^{-1})	ω_3 (c^{-1})	ω_4 (c^{-1})	ω_5 (c^{-1})
1	1	1,006	3,357	6,469	9,835	13,251
1	3	1,025	3,362	6,471	9,836	13,252
1	5	1,043	3,366	6,473	9,837	13,253
1	10	1,090	3,377	6,477	9,839	13,254

Исследовано также влияние на собственные частоты асимметричных колебаний трубы обоих коэффициентов относительной жесткости ее упругих закреплений. При этом показано, что с увеличением обоих коэффициентов жесткостей частоты колебаний также увеличиваются. Полученные выводы подтверждают, например, таблицы 3 и 4, составленные по решениям прямой задачи (1), (2) при приведенных выше параметрах трубы.

Таблица 3

Зависимость собственных значений α_i от коэффициентов относительной жесткости B_0, B_l упругих опор трубы

B_0	B_l	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	1	3,175	6,287	9,426	12,567	15,708
1	3	3,238	6,297	9,429	12,568	15,709
1	5	3,299	6,306	9,432	12,570	15,709
1	10	3,438	6,330	9,440	12,573	15,711

Таблица 4

Зависимость собственных частот ω_i от коэффициентов относительной жесткости B_0, B_l упругих опор трубы

B_0	B_l	ω_1 (c^{-1})	ω_2 (c^{-1})	ω_3 (c^{-1})	ω_4 (c^{-1})	ω_5 (c^{-1})
1	1	1,006	3,357	6,469	9,835	13,252
1	3	1,042	3,366	6,473	9,837	13,253
1	5	1,076	3,374	6,476	9,838	13,253
1	10	1,157	3,396	6,484	9,842	13,256

Заметим, что подобные зависимости установлены при различных физических параметрах полой трубы.

Проведенные исследования по влиянию на частоты асимметричных колебаний полой трубы жесткостей ее упругих закреплений играют важную роль при исследовании проблемы сохранения безопасных частот колебаний трубы при изменениях ее физических параметров или коэффициентов жесткостей закреплений.

Библиографический список

1. Антоненко Э.В. Свободные колебания и устойчивость оболочек с упругими краевыми ребрами. Прикладная механика.– Т.11.– Вып. 6.– 1975. – С. 44-50.

2. Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф. Диагностирование относительной жесткости упругих краевых ребер цилиндрической оболочки // Техническая акустика.– № 19.– 2004.

3. Сафина Г.Ф. Диагностирование относительной жесткости подкрепленных цилиндрических оболочек по собственным частотам их асимметричных колебаний // Контроль. Диагностика.– 2005.– № 12.– С. 51.

Сведения об авторах

Ахтямов Азамат Мухтарович, доктор физико-математических наук, профессор БашГУ. E-mail:AkhtyamovAM@mail.ru

Сафина Гульнара Фриловна, кандидат физико-математических наук, доцент Нефтекамского филиала БашГУ. E-mail:safinagf@mail.ru

УДК 534.1

Ахтямов А.М., Хуснутдинова Г.А.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДА И ПАРАМЕТРОВ ДЕФЕКТА СТЕРЖНЯ ПО ПЯТИ СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕГО ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Работа посвящена идентификации вида и параметров дефектов стержней по собственным частотам изгибных их колебаний. В качестве видов дефекта рассматриваются трещины, полости, налипание инородных масс. Показано, что один из таких дефектов и его параметры можно определить по пяти собственным частотам изгибных колебаний стержня.

Ключевые слова: собственные значения, условия сопряжения, обратная задача, стержень, дефект, трещина, полость.

Akhtyamov A.M., Khusnutdinova G.A.

DETERMINING THE TYPE AND PARAMETERS OF A BEAM DEFECT BY ITS FIVE NATURAL FREQUENCIES OF FLEXURAL VIBRATIONS

The work is dedicated to the identification of the type and parameters of beam defects by the natural frequencies of flexural vibrations. As the kinds of defect addresses cracks, cavities, sticking of foreign mass, suddenly arising support . It has been shown that one of the four types of defects and its parameters can be determined from the five natural frequencies of the flexural oscillations of the beam.

Key words: eigenvalues, coupling conditions, inverse problems, beams, defect, cracks, cavities.

Задачи идентификации дефектов механических систем (трещин и полостей) исследовались во многих работах (см. обзоры [7], [11]).

© Ахтямов А.М., Хуснутдинова Г.А., 2017

В работах, посвященных идентификации *трещин*, наиболее типичным является подход Болтезара и др. [10], предлагающий моделировать малую раскрытую трещину как вращательную пружину. В современных работах (см., например, [5], [6], [9]) на основе естественных допущений теории упругости и асимптотической теории предложены также другие условия сопряжения, позволяющие оценить не только местоположение, но и параметры повреждения (надреза). При помощи этих условий сопряжения получены новые результаты об идентификации местоположения и параметров надреза в балке по собственным частотам изгибных колебаний.

В работах Ахтямова А.М. и Аюповой А.Р. [2], [3] было предложено моделировать малые *полости* условиями сопряжения для сосредоточенных масс, считая массу отрицательной (недостаток массы). На основе этой модели были решены задачи вычисления местоположения и объема одной и двух полостей в стержне по собственным частотам изгибных колебаний. Численные исследования, проведенные для консольной балки с одной полостью, в точности совпали с результатами работы [8], что подтверждает правильность метода и хорошее согласование с известными результатами.

Во всех описанных выше работах восстанавливаются параметры условий сопряжения известного вида. Настоящая статья посвящена идентификации не только параметров условий сопряжения, но и самого вида условий сопряжения. На практике это означает, что мы можем однозначно идентифицировать не только параметры, но и вид дефекта – трещину, полость, инородную массу и т.п.

По сути, полученные результаты переносят методы, созданные для задач идентификации видов краевых условий [1], [2] на задачи идентификации условий сопряжения.

Спектральная задача для изгибных колебаний стержня с дефектом посередине стержня и свободно опертыми концами имеет следующий вид [8], [11]:

$$y^{(4)} = -\lambda^4 y, \tag{1}$$

$$y^-(0) = 0,\ y^{-\prime}(0) = 0, \tag{2}$$

$$y^+(1) = 0,\ y^{+\prime}(1) = 0, \tag{3}$$

$$y^- = y^+,\ y^{-\prime} = y^{+\prime},\ \ при\ \ x = 1/2, \tag{4}$$

$$y^{-}{}'' = y^{+}{}'' - \frac{C_2}{EJ} y^{\pm'} + \frac{I\omega^2}{EJ} y^{\pm'}, \ldots$$
$$y^{\pm}{}''' = y^{+}{}''' + \left(\frac{C_1}{EJ} - \frac{M\omega^2}{EJ} \right) y^{\pm}, \text{ при } x = 1/2 \qquad (5)$$

Здесь $y = y(x)$ – функция, характеризующая вертикальное смещение стержня при $x \in (0,1)$, $y^{-} = y(x)$ – функция, характеризующая вертикальное смещение стержня при $x \in (0,1/2)$, $y^{+} = y(x)$ – функция, характеризующая вертикальное смещение стержня при $x \in (1/2,1)$, C_1 – коэффициент жесткости пружины, препятствующей вертикальному смещению в точке $x = 1/2$, C_2 – коэффициент жесткости пружины, препятствующей повороту в точке $x = 1/2$, M – масса сосредоточенного инерционного элемента в точке $x = 1/2$ для полости число M отрицательно), M – момент инерции сосредоточенного инерционного элемента в точке $x = 1/2$, λ – спектральный параметр, ω – частотный параметр, связанный со спектральным параметром следующей формулой: $\omega^2 = \frac{EJ\lambda^4}{\rho F}$, где F – площадь поперечного сечения стержня, ρ – плотность стержня, E – модуль упругости Юнга, J – момент инерции.

Обратная задача. *По собственным значениям λ_k задачи (1)-(5) найти вид условий сопряжения (4) и (5), а также их параметры:* C_1, C_2, M, I.

Решение этой обратной задачи основано на том, частотное уравнение получают с помощью краевых условий (2), (3) и условий сопряжения (4), (5). Подстановка в краевые условия (2), (3) и условия сопряжения (4), (5) общих решений:

$$y^{-} = C_1^{-} y_1 + C_2^{-} y_2 + C_3^{-} y_3 + C_4^{-} y_4$$
$$y^{+} = C_1^{+} y_1 + C_2^{+} y_2 + C_3^{+} y_3 + C_4^{+} y_4,$$

где

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(sh\lambda x + \cos\lambda x\right)$$

$$y_2 = \frac{1}{2\lambda}\left(sh\lambda x + \sin\lambda x\right)$$

$$y_3 = \frac{1}{2\lambda^2}\left(ch\lambda x - \cos\lambda x\right)$$

$$y_4 = \frac{1}{2\lambda^3}\left(sh\lambda x - \sin\lambda x\right),$$

приводит к однородной системе уравнений относительно постоянных, входящих в эти решения. Условия существования ненулевого решения для постоянных

$$C_1^-, C_2^-, C_3^-, C_4^-, C_1^+, C_2^+, C_3^+, C_4^+$$

дает уравнение частот:

$$\Delta(\lambda) = 0 \qquad (6)$$

Если известны пять собственных значений λ_k (k=1,2,3,4,5) задачи (1)–(5), то подставив их в (6) вместо λ, получим систему пяти нелинейных алгебраических уравнений от четырех неизвестных C_1, C_2, M, I. Эта система имеет единственное решение.

Пример. Пусть первые пять собственных значений задачи таковы: $\lambda_1 = 4{,}730041,\ \lambda_2 = 7{,}917797,\ \lambda_3 = 10{,}99561,\ \lambda_4 = 14{,}17175,\ \lambda_5 = 17{,}27876.$

Подставив их в (6), получим систему пяти уравнений, которая имеет единственное решение: $C_1 = 1, C_2 = 0, M = 0, I = 0.$

Библиографический список

1. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.

2. Ахтямов А.М., Ахтямова А.А. Об однозначности идентификации сосредоточенного инерционного элемента на одном из концов стержня // Вестник Башкирского университета, 2013. – Т. 18, № 1. – С. 7-10.

3. Ахтямов А.М., Аюпова А.Р. Диагностирование полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия, 2010. – Т. 46.– № 5. – С. 29-35.

4. Ахтямов А.М., Аюпова А.Р. О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журнал Средневолжского математического общества. – 2010. – Т. 12.– № 3. – С. 37-42.

5. Ахтямов А.М., Ильгамов М.А. Модель изгиба балки с надрезом: прямая и обратная задачи // Прикладная механика и техническая физика, 2013. – Т. 54.– № 1. – С. 152-162.

6. Ватульян А.О., Осипов А.В. Поперечные колебания балки с локализованными неоднородностями // Вестник ДГТУ, 2012. – № 8 (69). – С. 34-40.

7. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Обратные задачи теории трещин в твердых телах // Известия вузов Сев.-Кавк. рег.: Спецвыпуск «Математика и механика сплошной среды», 2004. – С. 74-80.

8. Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний // ПМТФ, 2008. – Т. 49, № 6. – С. 152-158.

9. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия, 2009. – № 6. – С. 83-89.

10. Boltezar M., Strancar B. and Kuhelj A. Identification of transerve crack locations in flexural vibrations of free-free beams // Journal of sound and vibration, 1998. – Vol. 211. – P. 729-734.

11. Gladwell G.M.L. Inverse Problems in Vibration. 2nd ed. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. (Русский перевод: Гладвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008).

Сведения об авторах

Ахтямов Азамат Мухтарович, доктор физико-математических наук, профессор БашГУ. E-mail: Akhtyamovam@mail.ru.

Хуснутдинова Гульнара Адиповна, студент Башкирского государственного университета. E-mail: gulnara.husnutdinova2013 @yandex.ru.

УДК 338.27

Баранова М.А., Галиаскарова Г.Р.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КУРСА ВАЛЮТЫ

В работе рассматривается метод прогнозирования валютного курса EUR/USD, основанный на использовании многослойной нейронной сети. Использование данного метода реализовано в программной среде приложения Deductor Studio.

Ключевые слова. Нейронная сеть, прогнозирование, котировка, валюта.

Baranova M.A., Galiaskarova G.R.

APPLICATION OF NEURAL NETWORKS FOR FORECASTING OF EXCHANGE RATE

In work the method of forecasting of an exchange rate EUR/USD based on use of multilayered neural network is considered. Use of this method is realized in the program environment of the Deductor Studio appendix.

Keywords. Neural network, forecasting, quotation, currency.

На сегодняшний день для российского бизнеса весьма актуальна проблема выбора методов и инструментов экономического прогнозирования. Прогнозирование необходимо во всех сферах управления и на любых уровнях деятельности.

Несмотря на определённое количество существующих методов прогнозирования, аналитический инструментарий и различные программные продукты, немногие из них способны предоставить исследователю адекватное решение проблемы [1].

В последнее время, у финансовых аналитиков большой интерес вызывают так называемые искусственные нейронные сети – это математические модели, а также их программные или аппаратные реализации, построенные по принципу организации и функционирования биологических нейронных сетей – сетей нервных клеток живого организма [2].

Адаптируемые и обучаемые, нейронные сети представляют собой распараллеленные системы, способные к обучению путем анализа положительных и отрицательных воздействий. Элементарным преобразователем в данных сетях является искусственный нейрон или

© Баранова М.А., Галиаскарова Г.Р., 2017

просто нейрон, названный так по аналогии с биологическим прототипом [3]. На сегодняшний день существует множество примеров, демонстрирующих впечатляющие возможности искусственных нейронных сетей. Большинство из них используют сеть обратного распространения ошибки, которая является наиболее успешной из современных алгоритмов.

На основе нейронных сетей проведем прогнозирование валютного курса EURUSD методом обратного распространения ошибки. Для этого воспользуемся программным обеспечением Deductor Studio, которое включает в себя инструмент "Прогнозирование". При построении модели прогноза необходимо учитывать множество факторов (зависимость результата от данных на день, два, три, четыре назад и т.д.).

В качестве входных параметров модели будем использовать данные котировок EURUSD в период с 1.10.2016 по 31.03.2017. Данные взяты с сайта http://www.finam.ru/. Основываясь на исходных данных, проведем прогноз котировок EURUSD на неделю вперед. В таблице 1 частично представлены используемые входные данные за исследуемый период.

Таблица 1

Исходные данные котировок EURUSD с 1.10.2016 по 31.03.2017

Дата	Валютная котировка
1.10.16	1.1240300
2.10.16	1.1227000
3.10.16	1.1210400
4.10.16	1.1201400
5.10.16	1.1204400
...	...
26.03.17	1.0836200
27.03.17	1.0863200
28.03.17	1.0810300
29.03.17	1.0764000
30.03.17	1.0673700
31.03.17	1.0651500

Для более лучшей наглядности, представим изменения курса валюты на графике (рисунок 1).

Рис. 1. График изменения отношения евро к доллару

После обработки исходных данных в программе Deductor Studio, была построена нейронная сеть, обучающаяся на основе метода обратного распространения ошибки.

В ходе построения нейронной сети, исходное множество было разбито случайным образом на два подмножества, обучающееся и тестовое, где обучающее множество составило 85% от исходного, а тестовое множество – 15% от сходного. Активационной функция – сигмоида В качестве параметров обучения выбрана скорость обучения – 0.1, и момент обучения – 0.9. В качестве остановки обучения нейронной сети использовалось условие распознания примера (если ошибка меньше 0.1) по достижению эпохи 10000 [1].

После построения нейронной сети, были получены прогнозные значения котировок EURUSD в период с 01.04.17 по 07.04.17. Сравним полученные значения, представленные в таблице 2.

Таблица 2

Оценка прогнозных значений EURUSD с 01.04.17 по 07.04.17

Дата	Прогнозное значение котировки EURUSD	Реальное значение котировки EURUSD
01.04.17	1.0660200	1.0663000
02.04.17	1.0669100	1.0660500
03.04.17	1.0667800	1.0668900
04.04.17	1.0655000	1.0672900
05.04.17	1.0659900	1.0662100
06.04.17	1.0645000	1.0643600
07.04.17	1.0602350	1.0589500

Проанализировав полученные результаты, можно сделать вывод, что что полученные прогнозные значения котировок EURUSD весьма

приближены к их реальным значениям. Стоит отметить что максимальные расхождения реальных значений EURUSD от прогнозных значений, заметны лишь за 04.04.17 и 07.04.17.

Библиографический список

1. Баранова М.А., Галиаскарова Г.Р. Прогнозирование курса валюты на основе нейронных сетей // Новоинфо, 2017. – № 59. – С. 244-247.
2. Барский. А. Б. Нейронные сети: распознавание, управление, принятие решений.– М.: Финансы и статистика, 2004. – 175 с.
3. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс, 2-е изд.: пер. с англ.– М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.

Сведения об авторах

1. Баранова Мария Андреевна, магистр СФ БашГУ. E-mail: voronovama94@mail.ru
2. Галиаскарова Гузелия Рафкатовна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: gguselia@mail.ru

УДК 517.5

Башмаков Р.А., Лобова Ю.Ю., Храмов А.Е.

ДИСКРЕТНО-ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В работе вводятся дискретно-гармонические функции и рассматриваются некоторые их свойства.

Ключевые слова: дискретно-гармонические функции, течение жидкости, принцип максимума.

Bashmakov R.A., Lobova Y.Y., Khramov A.E.

DISCRETE-HARMONIC FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS

In the paper introduces a discrete-harmonic functions and discuss some their properties.

Key words: discrete-harmonic function, fluid flow, maximum principle.

При моделировании задачи в движении потоков жидкости в однородном пласте при зависимости лишь от двух координат

© Башмаков Р.А., Лобова Ю.Ю., Храмов А.Е., 2017

$x, y \in \mathrm{R}^2$ мы разбили всю плоскость на квадраты со стороной 1. Каждой клетке на плоскости соответствуют две целочисленные координаты (m,n). Такую плоскость будем называть дискретной. Элементарным отрезком будем называть множество точек вида $\{(m,n)$, $(m+1,n)$, $(m+2,n)$, … , $(m+p,n)\}$ или $\{(m,n)$, $(m,n+1)$, $(m,n+2)$, … , $(m,n+p)\}$, где $m,n,p \in Z$, $p \geq 0$.

Два элементарных отрезка, имеющие ровно одну общую точку соприкосновения дают простейшую дискретную кривую. Предположим, что в некоторых фиксированных точках плоскости и на некоторых заданных дискретных кривых поддерживается заданное давление. Система стремится перейти в равновесное состояние, когда в каждой точке (m,n) дискретной плоскости, не попадающей на заданные кривые и точки, устанавливается давление, равное среднему арифметическому давлении в четырёх соседних клетках, имеющих общую сторону т.е.

$$P(m,n) = \frac{P(m-1,n) + P(m+1,n) + P(m,n-1) + P(m,n+1)}{4} \qquad (1)$$

Таким образом, возникает задача об изучении функций, определённых в дискретной области D, ограниченной одной из несколькими дискретными кривыми, удовлетворяющими в области соотношению (1).

Нами показано, что соотношение (1) для дискретной функции $P(m,n)$ есть аналог уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u$.

Действительно, при нахождении вторых частных производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ приближёнными методами получают выражения $\frac{u(x+h,y) + u(x-h,y) - 2u(x,y)}{h^2}$, $\frac{u(x,y+h) + u(x,y-h) - 2u(x,y)}{h^2}$ соответственно. В нашем случае $h = 1$ и для аналога уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ получим

$$P(m-1,n) + P(m+1,n) + P(m,n-1) + P(m,n+1) = 0 \qquad (2)$$

– дискретный аналог уравнения Лапласа.

Выражения (1) и (2) есть одно и то же. Таким образом, мы приходим к понятию дискретно-гармонических функций.

Для дискретно-гармонических функций нами доказывается принцип максимума:

Теорема 1. *Дискретно-гармоническая функция, принимающая наибольшее значение во внутренней точке области есть величина постоянная.*

Из этого следует, что если на границе области значение двух дискретно-гармонических функций совпадают, то эти функции тождественно равны в области.

Пусть далее для простоты внутренность области D представляет из себя прямоугольник $\{(m,n),\ 1\le m\le M,\ 1\le n\le N,\ m,n\in Z\}$, граница этой области состоит из $2M+2N$ точек: элементарных отрезков $\{(m,0):1\le m\le M\}$, $\{(m,n+1):1\le m\le M\}$, $\{(0,n):1\le n\le N\}$, $\{(m+1,n):1\le n\le N\}$.

Нами доказывается:

Теорема 2. *Множество всех дискретно-гармонических функций на прямоугольнике D образуют векторное пространство размерности* $2(M+N)$.

Таким образом, если мы знаем базисные решения, то любое другое решение есть их линейная комбинация. В качестве базисных решений удобно брать решения, которые принимают значение 1 в одной гармонической точке.

Библиографический список

1. Capoulade J. Sur quelques propri´et´es des fonctions harmoniques et des fonctions pr´eharmoniques // Mathematica (Cluj). – 1932. – Vol. 6. – P. 146–151.

2. Heilbronn H. On discrete harmonic functions // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1949. – № 45. – P. 194-206.

Сведения об авторах

Башмаков Рустэм Абдрауфович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа БашГУ в г. Уфа. Email: bashmakov_rustem@mail.ru

Лобова Юлия Юрьевна, студентка БашГУ. E-mail: lobova.1997@mail.ru

Храмов Алексей Евгеньевич, БашГУ. E-mail: 89875952934@ya.ru

УДК 517.5

Башмаков Р.А., Махота А.А., Динисламова Г.И.

ПРОБЛЕМА ПОМПЕЙЮ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе элементарно доказывается, что круг не обладает свойством Помпейю, устанавливаются связи между свойствами характеристической функции множества E и вопросом, обладает ли это множество свойством Помпейю.

Ключевые слова: свойство Помпейю, функция Бесселя, радиальная функция, преобразование Фурье.

Bashmakov R.A., Makhota A.A., Dinislamova G.I.

THE POMPEIU PROBLEM AND INTEGRAL TRANSFORMATIONS OF RADIAL FUNCTIONS

In the paper it is elementary to prove that the circle does not possess the Pompeiu property, relations between the properties of the characteristic function of the set E and the question, whether this set has the Pompeiu property.

Key words: Pompeiu property, Bessel function, radial function, Fourier transform.

Пусть G – группа «жестких» движений в плоскости R^2 (т.е. композиций поворота и параллельного переноса).

Говорят, что относительно компактное измеримое на плоскости множество $E \subseteq R^2$ обладает свойством Помпейю, если для любой непрерывной комплекснозначной функции $f : R^2 \to C$

$$\int_{gE} f(x)dx = 0 \qquad (1)$$

для всех $g \in G$ влечет, что $f \equiv 0$, здесь интеграл берется по мере Лебега на плоскости.

Еще в 1929 году румынский математик Димитрие Помпейю (D. Pompeiu) (см. [1], [2]) доказал, что круг $\{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le r^2\}$ не обладает свойством Помпейю.

© Башмаков Р.А., Махота А.А., Динисламова Г.И., 2017

Можно показать, что для функции $\cos ax_1$, при определенных a, будет выполняться (1).

Доказательство проводится сведением к функции Бесселя. Мы в своей работе приводим элементарное доказательство этого факта, не использующее свойств функций Бесселя.

Утверждение. Круг $B = \{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$ не обладает свойством Помпейю.

В данном случае повороты не имеют значения, и мы можем ограничиться только параллельными переносами плоскости. Пусть $t = (t_1, t_2) \in R^2, B + t -$ параллельный перенос круга на вектор t.

Пусть $f(x_1, x_2) = \cos ax_1, a \in R$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{B+t} \cos ax_1 dx = \int_B \cos a(x_1 - t_1)dx = \cos at_1 \int_B \cos ax_1 dx.$$

Пусть функция $\psi(a) = \int_B \cos ax_1 dx$, задача свелась к вопросу существования нулей функции $\psi(a)$. Это делается оценками функции $\psi(a)$: при различных a и нахождением тех значений, при которых $\psi(a)$ положительно и при которых отрицательно. Последнее не представляет труда: $\psi(\frac{3\pi}{2}) < 0, \psi(a) > 0$. Утверждение доказано.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|w\|=1} e^{-i\lambda(x,w)} dw, x \in R^2.$$

Здесь $w = (w_1, w_2), x = (x_1, x_2), (x, w) = x_1 w_1 + x_2 w_2, \|w\| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$.
Интегрирование ведется по единичной окружности.

Заметим, что эта функция при любом фиксированном $\lambda \in C$ является радиальной, т.е. если $\|x\| = \|x'\|$, то $\Phi_\lambda(x) = \Phi_\lambda(x')$.

На множестве радиальных непрерывных бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем $C_c^\infty(R^2)_{rad}$ определим интегральное преобразование

$$\Psi f(\lambda) = \int_{R^2} e^{-i(z,x)} f(x)dx, z = (z_1, z_2) \in C \qquad (2)$$

Действительно, $\Psi f(\lambda) = \hat{f}(\lambda,0), \lambda \in C$, $f \in C_c^\infty(R^2)_{rad}$.

Пусть $\hat{I}_E(z_1, z_2) = \int_E e^{-i(t_1 z_1 + t_2 z_2)} dt, (z_1, z_2) \in C$ – преобразование Фурье характеристической функции множества E.

В работе устанавливаются связи между свойствами функции $\hat{I}_E(z_1, z_2)$ и вопросом, обладает ли множество E свойством Помпейю. Связь устанавливается через описание сопряженных пространств к пространствам радиальных функций через интегральное преобразование (2).

Библиографический список

1. Pompeiu D. Sur une propriètè des fonctions continues dèpendent de plusieurs variables // Bull. Sei. Math. – 1929. – Vol. 2, No. 53. – P. 328-332.

2. Brown L., Schreiber B., Taylor B.A. Spectral synthesis and the Pompeiu problem // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. – 1973. – Vol. 23, No. 3. P. 125-154.

Сведения об авторах

Башмаков Рустэм Абдрауфович, кандидат физико-математических наук, доцент БашГУ. E-mail: bashmakov_rustem@mail.ru.

Махота Алла Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент БашГУ. E-mail: allarum@mail.ru.

Динисламова Гульназ Ильвировна, магистрант БашГУ. E-mail: gulnaz228@yandex.ru.

УДК 517.5

Башмаков Р.А., Махота А.А., Ибрагимова А.А.

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ В ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

В работе рассматривается редукция задачи о полноте систем экспонент в выпуклой области к соответствующей задаче в круге. В качестве примера рассмотрен случай выпуклой области в виде эллипса.

© Башмаков Р.А., Махота А.А., Ибрагимова А.А., 2017

Ключевые слова: полнота систем экспонент, выпуклая область, целые функции, преобразование Фурье-Лапласа.

Bashmakov R.A., Makhota A.A., Ibragimova A.A.

ON THE COMPLETENESS OF SYSTEMS OF EXPONENTIALS IN A CONVEX DOMAIN

In this paper we consider the reduction of the problem of the completeness of systems of exponentials in a convex domain to the corresponding problem in the disk. As an example, we consider the case of a convex domain in the form of an ellipse.

Key words: completeness of exponential systems, convex region, entire functions, Fourier-Laplace transform.

Пусть D – ограниченная выпуклая область комплексной плоскости, $H(D)$ – пространство аналитических в D функций с топологией равномерной сходимости на компактах. С каждым множеством комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}$, в которые числа λ_k могут входить с некоторой кратностью $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k = 1,2,\dots$, связывается система экспоненциальных мономов

$$\exp\Lambda = \left\{\lambda^j e^{\lambda_k \lambda}, k = 1,2,\dots, j = 0,\dots,n_k\right\}.$$

Кратность $n_k = 0$ означает, что число λ_k входит в Λ ровно один раз. Задача о полноте такой системы в пространстве $H(D)$ является классической задачей и была объектом исследований многих авторов. В работе показано, что если граница области D достаточно гладкая, то задача о полноте системы $\exp\Lambda$ в пространстве $H(D)$ эквивалентна задаче о полноте некоторой системы $\exp\Lambda'$ в пространстве $H(K)$, где K – круг, радиус которого зависит от свойств области D.

Для любого линейного непрерывного функционала S на пространстве $H(D)$ через $\hat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z})$ обозначим преобразование Фурье-Лапласа этого функционала. Как известно, отображение $L: S \to \hat{S}$ устанавливает взаимно однозначные соответствие между сопряженным пространством $H^*(D)$ и пространством целых функций F, удовлетворяющих для некоторого $\varepsilon = \varepsilon(F) > 0$ оценке

$$\left|F(re^{i\varphi})\right| \le C \cdot e^{(h(\varphi)-\varepsilon)r}, re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

Здесь

$$h(\varphi) = \max_{z \in D} \mathrm{Re}(e^{i\varphi} z)$$

– опорная функция области D. Известно, что $\hat{S}^{(k)}(\lambda) = S(z^k\, e^{\lambda z})$. Таким образом, по теореме Банаха о полноте систем, $\exp\Lambda$ не полна в пространстве $H(D)$ тогда и только тогда, когда найдется целая функция, которая при некотором $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию (1) и имеет нули кратности n_kв точках λ_k, $k = 1,2,\ldots$

В работе мы рассматриваем области с дважды непрерывно дифференцируемой опорной функцией. Положим

$$M = \max_{\varphi\in[0;2\pi]}\left(h''(\varphi) + h(\varphi)\right) \qquad (2)$$

Из геометрической интерпретации опорных функций следует, что M – это максимальный радиус кривизны в точках границы области D [1].

Суммой $\Lambda' + \Lambda''$ двух наборов $\Lambda' = \{(\lambda'_k, n_k)\}$ и $\Lambda'' = \{(\lambda''_k, m_k)\}$ будем называть объединение множеств λ'_k, λ''_k, $k = 1,2,\ldots$, с кратностью n_k или m_k, если точка попадает только один раз из наборов, и с суммарной кратностью, если какая-то точка попадает в оба множества.

Если число M определено по формуле (2), то функция

$$u(re^{i\varphi}) = Mr - h(\varphi)r \qquad (3)$$

субгармонична на всей плоскости.

В дальнейшем через L будем обозначать какую-нибудь фиксированную целую функцию, удовлетворяющую условиям теоремы Юлмухаметова Р.С. с функцией u, определенной в (3) (при $\rho = 1$). Через Λ_0 обозначим множество нулей функции L с учетом кратности.

Теорема. *Система экспонент* $\exp\Lambda$ *не полна в пространстве* $H(D)$ *тогда и только тогда, когда система* $\exp(\Lambda + \Lambda_0)$ *не полна в пространстве* $H(K_M)$*, где* K_M *– круг радиуса* M *с центром в нуле.*

Рассмотрим в качестве выпуклой области D эллипс (рис. 1)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

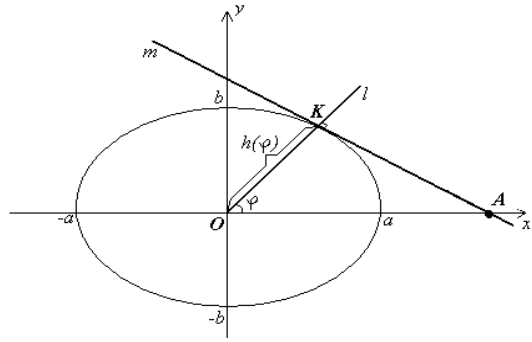


Рис. 1. Эллипс

Опорная функция в этом случае имеет вид:

$$h(\varphi) = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

А максимальный радиус кривизны в точках на границе области D равен $M = {a^2}/{b}$.

Библиографический список

1. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

2. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 535 с.

3. Леонтьев А.Ф. Последовательность полиномов из экспонент. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

4. Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 175 с.

5. Напалков В.В., Румянцева А.А., Юлмухаметов Р.С. Полнота систем экспонент в весовых пространствах на вещественной оси // ДАН, 2009. – Т. 429.– № 2. – С. 155–158.

Сведения об авторах

Башмаков Рустэм Абдрауфович, кандидат физико-математических наук, доцент БашГУ. E-mail: bashmakov_rustem@mail.ru.

Махота Алла Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент БашГУ. E-mail: allarum@mail.ru.

Ибрагимова Азалия Азаматовна, магистрант БашГУ. E-mail: Azalka17@mail.ru.

УДК 517.5

Башмаков Р.А., Махота А.А., Исламалова Н.А.

О ФУНКЦИЯХ ТИПА СИНУСА И ПОЛНОТЕ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ

В работе рассматривается гильбертово пространство функций на вещественной оси, суммируемых с квадратом с весом, определяемым некоторой выпуклой функцией. Дается определение функции типа синуса. Получен критерий полноты системы экспонент, построенной по нулям целой функции типа синуса в указанном пространстве.

Ключевые слова: *выпуклые функции, функции типа синуса, полнота, преобразование Лапласа.*

Bashmakov R.A., Makhota A.A., Islamalova N.A.

ABOUT FUNCTIONS OF TYPE OF SINUS AND COMPLETE SYSTEMS EXPONENT

In this paper we consider the Hilbert space of functions on the real axis that are square summable with weight defined by some convex function. The definition of a function of the sine type is given. A criterion is obtained for the completeness of a system of exponentials constructed from the zeros of an entire function of the sine type in this space.

Keywords: convex functions, sine type functions, completeness, Laplace transform.

Введем характеристику $\tau(u, z, p)$ для выпуклых функций. Пусть z – фиксированная точка на плоскости. Для любого положительного числа $r > 0$ через $B(z,r)$ обозначим круг $\{w : |w - z| < r\}$ и для непрерывной в $B(z,r)$ функции f положим

$$\|f\|_r = \max_{w \in \overline{B}(z,r)} |f(w)|.$$

Пусть $d(f,z,r)$ – расстояние от функции f до подпространства гармонических в $B(z,r)$ функций:

$$d(f,z,r) = \inf\{\|f - H\|_r\}, \quad H - \text{гармонична в } B(z,r).$$

© Башмаков Р.А., Махота А.А., Исламалова Н.А., 2017

Если $u(x)$ – выпуклая функция на интервале I вещественной оси, то функция $u(w) = u(\operatorname{Re} w)$ является непрерывной функцией в вертикальной полосе $I + iR$ на плоскости. Для положительного числа p положим

$$\tau(u, z, p) = \sup\{r : d(u, z, p) \le p\}.$$

Ясно, что $\tau(u, z, p)$ зависит только от $\operatorname{Re} z$. Кроме того, поскольку функцию u при необходимости мы доопределяем, полагая равной $+\infty$ вне интервала I, то $\tau(u, z, p)$ не может превосходить расстояния от y до границы интервала определения функции u.

Определение. *Пусть u непрерывная субгармоническая функция в полосе $I + iR$. Функцией типа синуса для функции u будем называть голоморфную в полосе $I + iR$. функцию L, удовлетворяющую условиям:*

1. все нули z_n, $(n = 1,2,3\ldots)$ функции L простые и при некотором $\varepsilon > 0$ круги $B(z_n, \varepsilon\tau(u, z_n,1)), (n = 1,2,3\ldots)$попарно не пересекаются;

2. при любом $\varepsilon > 0$ вне множества кругов $B(z_n, \varepsilon\tau(u, z_n,1)), (n = 1,2,3\ldots)$ выполняется соотношение

$$\left|\ln|L(z)| - u(z)\right| \le A(\varepsilon).$$

Класс всех функций типа синуса для функции u будем обозначать через $S(u)$.

Лемма 1. *Если $L \in S(u)$, то*

1. для всех комплексных значений z выполняется оценка

$$|L(z)| \le Ce^{u(z)};$$

2. если z_n – нули функции L и круги $B_n = B(u, z_n, \varepsilon\tau(u, z_n,1))$ не пересекаются, то в круге B_n выполняется оценка

$$\left|\frac{L(z)}{z - z_n}\right| \ge \frac{C(\varepsilon)}{\tau(u, z_n,1)} e^{u(z)},$$

где константа $C(\varepsilon)$ не зависит от n.

Если z_n *– нули функции* L*, то для любого* n *и при всех* z *выполняются соотношения*

$$\left|\frac{L(z)}{z-z_n}\right| \geq \frac{C(\varepsilon)}{\tau(u, z_n, 1) + (z-z_n)} e^{u(z)},$$

$C_1(\varepsilon), C_2(\varepsilon)$ *не зависят от* n.

Пусть Λ – некоторое множество точек на плоскости. Систему экспонент $e^{\lambda z}, \lambda \in \Lambda$ будем обозначать через $E(\Lambda)$. Для голоморфной функции L через Λ_L обозначим множество нулей функции L (без учета кратностей).

Мы будем рассматривать вопросы полноты и минимальности в пространствах $L^2(I, exph)$ систем экспонент $E(\Lambda_L)$. Здесь L – функция типа синуса для некоторой выпуклой функции u. Будем считать интервал I ограниченным.

Лемма 2. *Пусть* h *– выпуклая функция на ограниченном интервале* $I = (a,b)$*, далее* $\tilde{h}(x) = \sup_{t \in I}(xt - h(t))$ *функция сопряженная по Юнгу с функцией* h*. Тогда*

1. функция $\tilde{h}(x)$ *определена при всех вещественных значениях* x *и*

$$\left|\tilde{h}(x_1) - \tilde{h}(x_2)\right| \leq \max_{t \in [a,b]} |t| \left|x_2 - x_1\right|, \forall x_1, x_2$$

$$\int_R d\tilde{h}'(x) \leq b - a,$$

где $(')$ *- означает производная;*

2. имеют место равенства $\lim_{x \to -\infty} \frac{\tilde{h}(x)}{|x|} = -a, \lim_{x \to +\infty} \frac{\tilde{h}(x)}{|x|} = b.$

Теорема 1. *Пусть* h *– выпуклая функция на ограниченном интервале* I *вещественной оси,* $K(x) = \int_I e^{2xt - 2h(t)} dt$ *– выпуклая функция на* R*. Пусть* $L \in S(u)$*. Система экспонент* $E(\Lambda_L)$*. полна в про-*

странстве $L^2(I, \exp h)$ *тогда и только тогда, когда не существует нелинейной выпуклой функции* $v(x)$ *вещественной переменной* x, *которая удовлетворяет условию* $v(x) + u(x) \le h(x)$, *при всех вещественных значениях* x.

Лемма 3. *Пусть* $v(x)$ *– некоторая выпуклая функция на всей вещественной оси. Тогда существуют конечные или равные* $+\infty$ *пределы*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{v(x)}{|x|},$$

причем, сумма этих пределов неотрицательна. Более того, если функция $v(x)$ *нелинейна, то сумма этих пределов положительна.*

Теорема 2. *Пусть* h *– выпуклая функция на ограниченном интервале* $I = (a, b)$, u *– выпуклая функция на вещественной оси. Пусть далее* $L \in S(u)$. *Система экспонент* $E(\Lambda_L)$ *полна в пространстве* $L^2(I, \exp h)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{u(x)}{|x|} + \lim_{x \to +\infty} \frac{v(x)}{|x|} \ge b - a.$$

Библиографический список

1. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. Обобщение теоремы Пэли-Винера на весовые пространства // Математические заметки. – 1990. – Т. 48.– № 5. – С. 83-87.

2. Башмаков Р.А., Путинцева А.А., Юлмухаметов Р.С. Целые функции типа синуса и их применение // Алгебра и анализ. – 2010. – Т. 22.– № 5. – С. 49-68.

3. Башмаков Р.А., Махота А.А., Трунов К.В. Об условиях отсутствия безусловных базисов из экспонент // Уфимский математический журнал. – 2015. – Т. 7.– № 2. – С. 19–34.

4. Башмаков Р.А., Махота А.А., Юлмухаметов Р.С. О полноте систем экспонент по нулям функций типа синуса // Вестник Башкирского университета. – 2016. – № 21.– № 4.– С. 864–871.

Сведения об авторах

Башмаков Рустэм Абдрауфович, кандидат физико-математических наук, доцент БашГУ. E-mail: bashmakov_rustem@mail.ru.

Махота Алла Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент БашГУ. E-mail: allarum@mail.ru.

Исламалова Наталья Александровна, магистрант БашГУ. E-mail:isaeva.natalya2014@yandex.ru.

УДК 519. 856

Беляева М.Б.

АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ ПРЕДПРИЯТИЙ НА ОСНОВЕ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

В работе продемонстрирован комплексный подход к разработке теоретических и практических рекомендаций, направленных на повышение эффективности управления денежными потоками организаций с использованием имитационной модели с запаздыванием и оптимизации чистого денежного потока на основе модифицированной модели Миллера-Орра.

Ключевые слова: имитационное моделирование, AnyLogic, денежные потоки, экономические процессы.

Belyaeva M.B

ANALYSIS AND FORECASTING OF FINANCIAL FLOWS OF ENTERPRISES ON THE BASIS OF IMITATION MODELS

In this paper, a comprehensive approach to the development of theoretical and practical recommendations aimed at improving the efficiency of cash management of organizations using a delayed simulation model and optimizing the net cash flow based on the modified Miller-Orr model.

Keywords: Imitation modeling, AnyLogic, cash flow, economic processes.

Один из аспектов успешного существования фирмы на рынке – это рациональное управление денежными потоками. Любой сбой в осуществлении денежных платежей отрицательно сказывается на формировании производственных запасов сырья и материалов, уровне

© Беляева М.Б., 2017

производительности труда, реализации готовой продукции и т.д. Все это ведет не только к снижению управляемости, но и создает условия неопределенности для принятия управленческих решений, повышает уровень предпринимательского риска, и, соответственно, оказывает отрицательное влияние на финансовую устойчивость организации, ее платежеспособность и рентабельность.

В производственном секторе анализ и планирование денежных потоков затруднено по причине влияния случайных факторов. В таких условиях достаточно эффективным инструментарием является имитационное моделирование.

В общем случае, для сложных проблем, где время и динамика важны, имитационное моделирование представляет собой более мощное средство анализа.

Имитационное моделирование является экспериментальной и прикладной методологией, имеющей целью:

– описать поведение системы;

– построить теории и гипотезы, которые могут объяснить наблюдаемое поведение;

– использовать эти теории для предсказания будущего поведения и оценки (в рамках ограничений, накладываемых некоторым критерием или совокупностью критериев) различных стратегий, обеспечивающих функционирование данной системы» [1].

С точки зрения компьютерной реализации имитационное моделирование – это комплексный метод исследования сложных систем на ЭВМ, включающий построение концептуальных, математических и программных моделей, выполнение широкого спектра целенаправленных имитационных экспериментов, обработку и интерпретацию результатов этих экспериментов.

Имитационное моделирование находит применение в моделировании производственных систем и логистических процессов, маркетинге, моделировании бизнес-процессов, экономических реформ, региональных процессов, социологии и политологии, моделировании транспортных, информационных и телекоммуникационных систем, наконец, глобальном моделировании мировых процессов.

Метод имитационного моделирования позволяет решать задачи исключительной сложности, обеспечивает имитацию любых сложных и многообразных процессов, с большим количеством элементов, отдельные функциональные зависимости в таких моделях могут описываться весьма громоздкими математическими соотношениями [2].

Поэтому имитационное моделирование эффективно используется в задачах исследования систем со сложной структурой с целью решения конкретных проблем.

Концептуальная модель, показывающая движение основных денежных потоков представлена на рис. 1 [3].

Рис. 1. Концептуальная схема модели денежных потоков.

Расчет денежных потоков в модели проводится по формулам:

Таблица 1

Денежные потоки

№	Обозначение	Формула
1	Чистый денежный поток по операционной деятельности в период времени t	
	CHDP(t)	$CHDP(t) = PDP(t) - ODP(t)$
2	Величина положительных денежных потоков в период t	
	PDP(t)	$PDP(t) = (1 - KI(t)) \times VR(t) + (1 - KI(t) - KI(t+1)) \times VR(t+1) + +(1 - KI(t) - KI(t+1) - KI(t+2)) \times VR(t+2),$
3	Величина отрицательного денежного потока в период t	
	ODP(t)	$ODP(t) = KIKZ(t) \cdot AR(t) + KIKZ(t+1) \cdot AR(t+1) + RP + PZ$

Изменение суммы поступлений или расходования денежных средств выражено следующими коэффициентами (табл.2):

Таблица 2

Коэффициенты

№	Обозначение	Формула
1.	Коэффициент инкассации дебиторской задолженности в текущем периоде	
	KI (t)	$KI(t) = DDZ(t) / PDP(t)$
2.	Коэффициент инкассации кредиторской задолженности в текущем периоде	
	KIKZ(t)	$KIKZ(t) = DKZ(t) / ODP(t)$

Таблица 3

Переменные

№	Показатель	Обозначение
1.	Коэффициент инкассации дебиторской задолженности с запаздыванием на 1 период	*KI (t+1)*
	Коэффициент инкассации дебиторской задолженности с запаздыванием на 2 периода	*KI (t+2)*
	Выручка текущего периода	*VR*
	Выручка с запаздыванием на 1 период	*VR(t+1)*
	Выручка с запаздыванием на 2 периода	*VR(t+2)*
	Коэффициент инкассации кредиторской задолженности с запаздыванием на 1 период	*KIKZ(t+1)*
	Административные расходы на организацию продаж в текущем периоде	*AR*
	Административные расходы на организацию продаж с запаздыванием на 1 период	*AR(t+1)*
	Расходы на приобретение материалов и конструкций	*RP*
	Постоянные затраты текущего периода	*PZ*
	Изменение дебиторской задолженности в текущем периоде	*DDZ(t)*
	Изменение кредиторской задолженности в текущем периоде	*DKZ(t)*

Изменение дебиторской и кредиторской задолженности задается нормальным распределением $N(\mu,\sigma)$. На рис. 2 представлена имитационная модель, созданная при помощи основных объектов системно-динамического моделирования.

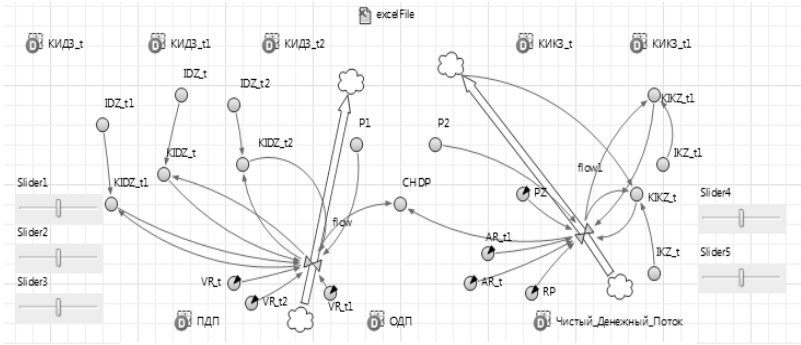


Рис. 2. Имитационная модель денежных потоков.

Таблица 4

Дополнительные элементы имитационной модели

№	Элемент	Обозначение
1	flow	Поток системы, в которой происходит вычисление положительного денежного потока
2	flow1	Поток системы, в которой происходит вычисление отрицательного денежного потока
3	VR_t	Фиксированный параметр модели, представляющий собой выручку текущего периода
4	VR_t1	Фиксированный параметр модели, представляющий собой выручку с запаздыванием на 1 период
5	VR_t2	Фиксированный параметр модели, представляющий собой выручку с запаздыванием на 2 периода
6	PZ	Постоянные затраты
7	RP	Расходы на продажу
8	AR_t	Административные расходы на организацию продаж в текущем периоде
9	AR_t1	Административные расходы на организацию продаж с запаздыванием на 1 период
10	p1	Параметр, в котором хранится начальное значение для положительного денежного потока
11	p2	Параметр, в котором хранится начальное значение для отрицательного денежного потока

Вспомогательные переменные		
12	IDZ_t	Изменение дебиторской задолженности в текущем периоде
13	IDZ_t1	Изменение дебиторской задолженности с запаздыванием на 1 период
14	IDZ_t2	Изменение дебиторской задолженности с запаздыванием на 2 периода
15	KIDZ_t	Коэффициент изменения дебиторской задолженности в текущем периоде
16	KIDZ_t1	Коэффициент изменения дебиторской задолженности с запаздыванием на 1 период
17	KIDZ_t2	Коэффициент изменения дебиторской задолженности с запаздыванием на 2 периода
18	IKZ_t	Изменение кредиторской задолженности в текущем периоде
19	IKZ_t1	Изменение кредиторской задолженности с запаздыванием на 1 период
20	KIKZ_t	Коэффициент изменения кредиторской задолженности текущего периода
21	KIKZ_t1	Коэффициент изменения кредиторской задолженности с запаздыванием на 1 период
22	IDZ_t, IDZ_t1, IDZ_t2, IKZ_t, IKZ_t1	Параметры, являющиеся нормально распределенными случайными величинами
23	Slider	Позволяет управлять параметрами, изменяя закон распределения в процессе выполнения модели

Построенная имитационная модель была апробирована на фактических показателях финансовой отчетности предприятия «XXX» г. Стерлитамака за период 2014–2016 гг. (табл. 5).

Таблица 5

Основные показатели экономической деятельности предприятия

Показатели (тыс. руб.)	2014	2015	2016	Абсолютное изменение, тыс. руб. (+,-)		Изменение, % (темп роста)	
				2015 г. к 2014 г.	2016 г. к 2015 г.	2015 г. к 2014 г.	2016 г. к 2015 г.
Выручка	2432355	2136023	3221385	-296332	1085362	87,8	150,8
Себестоимость продаж	1722859	1663115	2093835	-59744	430720	96,5	125,9
Валовая прибыль	709496	472908	1127550	-236588	654642	66,7	238,4
Прибыль от продаж	159600	26428	427225	-133172	400797	16,6	1616,6
Комм. расходы	390870	301961	500654	-88909	198693	77,3	165,8
Управ. расходы	159026	144519	199671	-14507	55152	90,9	138,2
% к получению	8840	1301	1497	-7539	196	14,7	115,1
% к уплате	285708	181969	82120	-103739	-99849	63,7	45,1
Прочие доходы	193364	188119	128670	-5245	-59449	97,3	68,4
Прочие расходы	695888	187580	242941	-508308	55361	26,9	129,5
Чистая прибыль	-652376	-109766	162701	-542610	272467	16,8	148,2

Результаты работы предприятия демонстрируют, что общество продолжает динамично развиваться и основные показатели за 2016 год намного превышают аналогичные показатели за 2014-2015 годы.

Проанализировав показатели ликвидности, платежеспособности, финансовой независимости и устойчивости, становится очевидным, что все коэффициенты ликвидности, коэффициент покрытия текущих обязательств меньше нормативных значений, то есть предприятие не может обеспечить текущие обязательства оборотными активами. Коэффициент финансовой устойчивости также не достигает нормативного значения, следовательно, предприятие не является финансово устойчивым предприятием.

По итогам анализа денежных средств за 2016 г. общий остаток денежных потоков по всем видам деятельности равен -89927 тысяч рублей, то есть чистый денежный поток является отрицательной величиной, что приводит к нехватке свободных денежных средств.

По результатам расчетов дебиторской и кредиторской задолженности было выявлено, что доля дебиторской задолженности не велика. В то время как доля кредиторской задолженности имеет большие значения: в 2015году – 129,93 % и в 2016 – 81%. Однако в 2016 году по сравнению с 2015 годом имеется тенденция к снижению кредиторской задолженности, что является положительным моментом для предприятия.

На рис. 3 представлена линия тренда, по которой будет построена модель выручки.

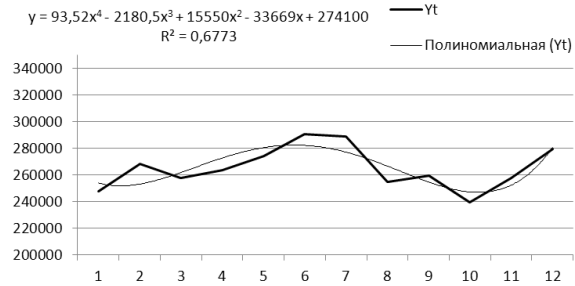


Рис. 3. Построение тренда

Результат проверки полученной модели на адекватность показывает, что модель выручки является адекватной и на основании этой модели можно строить прогноз. Прогнозные значения выручки на 2 периода представлены в табл. 6.

Таблица 6

Прогноз выручки

T	точечный прогноз	доверительный интервал	
		нижняя граница	верхняя граница
17	344819,22	344113,12	345525,31
18	459906,32	459175,59	460637,05

Прогноз выручки показывает, что в следующие два периода ожидается увеличение объема прибыли.

На рис. 4 представлена линия тренда, по которой будет построена модель административных расходов.

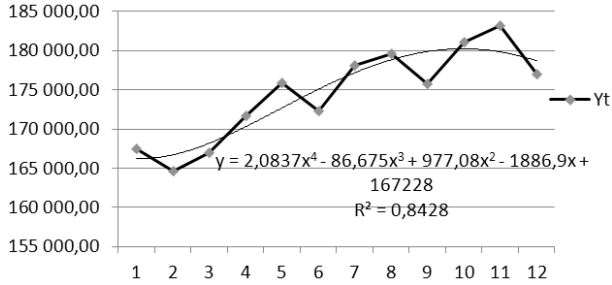


Рис. 4. Построение тренда.

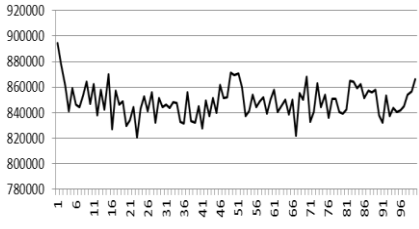
Результат проверки полученной модели на адекватность показывает, что модель административных расходов по всем критериям является адекватной и на основании этой модели можно строить прогноз. Прогнозные значения на 2 периода представлены в табл. 7.

Таблица 7

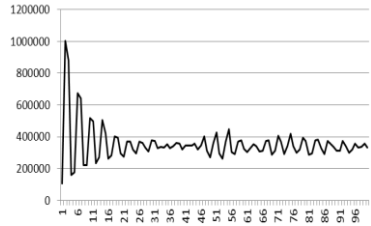
Прогноз административных расходов

t	точечный прогноз	доверительный интервал	
		нижняя граница	верхняя граница
17	176912,40	176727,23	177097,56
18	174530,29	174338,67	174721,92

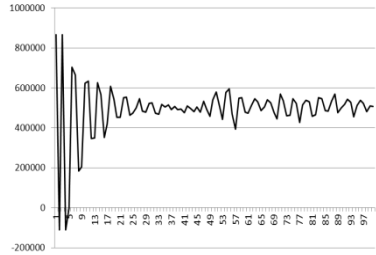
На рис. 5 представлены графики положительного, отрицательного и чистого денежного потока соответственно.



а



б



в)

Рис. 5. Денежные потоки: а – положительный, б – отрицательный, в – чистый.

Результаты имитационного эксперимента представлены в табл. 8.

Таблица 8

Статистика результатов имитационного моделирования

Статистические показатели	KIDZ (t)	KIDZ (t+1)	KIDZ (t+2)	KIKZ (t)	KIKZ (t+1)	ПДП	ОДП	Чистый денежный поток
Среднее значение	0,069	0,151	0,081	0,533	1,151	849386,5	353545,6	489747,3
Стандартное отклонение	0,007	0,008	0,016	0,023	0,451	17216,45	106499,2	132439,4
Коэффициент вариации	0,104	0,058	0,196	0,437	0,392	0,020	0,301	0,270
Минимум	0,035	0,069	0,044	0,091	0,169	821022,0	109178,6	-48544,6
Максимум	0,082	0,156	0,112	1,867	3,656	978869,1	951030,4	867205,6

В результате, проанализировав данные, можно сделать вывод:

– для предприятия в текущем периоде в среднем инкассируется 7% от выручки, в то время как платежи кредиторам составляют 53% от расходов.

– в текущем периоде у предприятия наблюдается дефицит денежных средств на сумму 74271,28 тыс. рублей, который может быть покрыт за счет суммы остатка денежных средств на счетах в банке.

– нижний предел остатка денежных средств составляет 10917, 86 тыс. рублей. Значение этого показателя свидетельствует о том, какую степень риска нехватки денежных средств предприятие считает допустимым.

– верхний предел остатка денежных средств может составлять 43349,44 тыс. рублей. В этом случае, достигая максимального объема остатка, предприятие может допустить относительно безрисковое изъятие денежных средств на сумму 21621,05 (43349,44-21728,39) тыс. рублей путем покупки на фондовом рынке легко реализуемых ценных бумаг, или инвестировать эти средства в альтернативные проекты, тем самым, снижая денежное сальдо до величины оптимального рекомендуемого остатка – 21728,39 тыс. рублей.

Таким образом, разработанная в среде AnyLogic имитационная модель позволяет выбрать наиболее рациональные методы управления денежными потоками и создает основу для их оптимизации и определения оптимального остатка денежных средств на счете предприятия.

Библиографический список

1. Емельянов А. А. Имитационное моделирование экономических процессов. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 368 с.

2. Арсланбекова Р.Р., Беляева М.Б. Имитационная модель прогнозирования финансовых потоков предприятия. Вестник ПНИПУ «Электротехника, информационные технологии, системы управления». – Пермь: Перм. нац. иссл. Полит. у-т, 2015. – № 13. – С.114-122.

3. Кеменов А. В. Управление денежными потоками строительных организаций: дис. … канд. э. н. – М.: 2006. – 214 с.

Сведения об авторах

Беляева Марина Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: beljaeva_mb@rambler.ru.

УДК 548; 539.26

Биккулова Н.Н., Акманова Г.Р., Нигматуллина Г.Р., Курбангулов А.Р., Биккулова Л.В.

КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА И ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СУПЕРИОННОГО ПРОВОДНИКА $CU_{1,85}TE$

Настоящая статья посвящена исследованию кристаллической структуры и электрофизических свойств суперионного проводника нестехиометрического состава Cu1,85Te в зависимости от температуры. Расчеты кристаллической структуры выполнены на основе программного обеспечения Fullprof Suite.

Ключевые слова: теллурид меди, электропроводность, термоэдс, суперионная проводимость, структура, кулонометрическое титрование.

Bikkulova N.N., Akmanova G.R., Nigmatullina G.R., Kurbangulov A.R., Bikkulova L.V.

CRISTAL STRUCTURE AND ELECTROPHYSICAL PROPERTIES OF THE SUPERIONIC CONDUCTOR CU1,85TE

The present article is devoted to the investigation of the crystal structure and electrophysical properties of the superionic conductor of the nonstoichiometric composition of Cu1.85Te as a function of temperature. Calculations of the crystal structure are based on the Fullprof Suite software.

Key words: copper telluride, electrical conductivity, thermoelectric power, superionic conductivity, structure, coulometric titration

Теллурид меди нестехиометрического состава $Cu_{1.85}Te$ при комнатной температуре индицируется в гексагональной сингонии с пространственной группой *P3m1* и параметрами решетки *a*=8.38, *c*= 21.73 Å (рис. 1). Данные расчеты кристаллической структуры, выполненные на основе программного обеспечения Fullprof Suite, хорошо согласуются с литературными данными.

На дифрактограммах, снятых при температуре 298–658 К, при повышении температуры наблюдается изменение относительных интегральных интенсивностей и при температуре выше 598 К некоторые линии исчезают, что свидетельствует о структурном фазовом переходе.

© Биккулова Н.Н., Акманова Г.Р., Нигматуллина Г.Р., Курбангулов А.Р., Биккулова Л.В., 2017

Установлено, что фазовый переход при температуре 598 К представляет собой фазовый переход II рода, при котором наблюдается изменение степени упорядоченности атомов в кристаллической структуре по типу «порядок-беспорядок», связанное с увеличением параметров решетки в гексагональной сингонии (рис. 2).

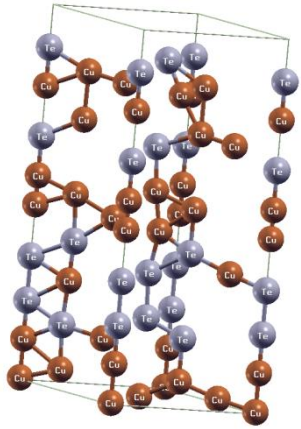


Рис. 1. Кристаллическая структура соединения Cu1.85Te

Методом кулонометрического титрования проведено исследование фазовой диаграммы теллурида меди $Cu_{2-\delta}Te$ в интервале температур от 613 до 673 К для составов с δ=0÷1.00. Для теллуридов меди имеются несколько достаточно узких областей гомогенности, сложно расположенных на диаграмме, переходы между которыми осуществляются через двухфазные области. Об этом свидетельствуют полученные нами экспериментальные кривые титрования в диапазоне температур 613-673 К, представленные на (рис. 3). При температуре 633К обнаружены три однофазные области, соответствующие составам: $Cu_{2-\delta}Te$ (δ=0÷0.11), $Cu_{1.85}Te$ – $Cu_{1.75}Te$, $Cu_{1.5+\delta}Te$ (δ=0.08). При температуре 673К обнаружены однофазные области, соответствующие составам: $Cu_{2-\delta}Te$ (δ=0÷0.07), $Cu_{1.9}Te$ – $Cu_{1.84}Te$, $Cu_{1.78}Te$ – $Cu_{1.57}Te$. При температурах 613, 653, 673К также экспериментально выявлены три области гомогенности, но уже смещенные по составам [7]. В ряде работ приводятся результаты исследования зависимости электрофизических свойств теллурида меди стехиометрического состава Cu_2Te от температуры [1-6]. В связи с тем, что практически не изучено влияние отклонения от стехиометрии на электрофизические

свойства, в данной работе проведены исследования термоэлектрических свойств теллурида меди нестехиометрического состава $Cu_{1.85}Te$ и $Cu_{1.96}Te$: удельной электропроводности и электронной термоэдс стандартным четырехзондовым методом в интервале температур от 300К до 750К (рис. 4, 5).

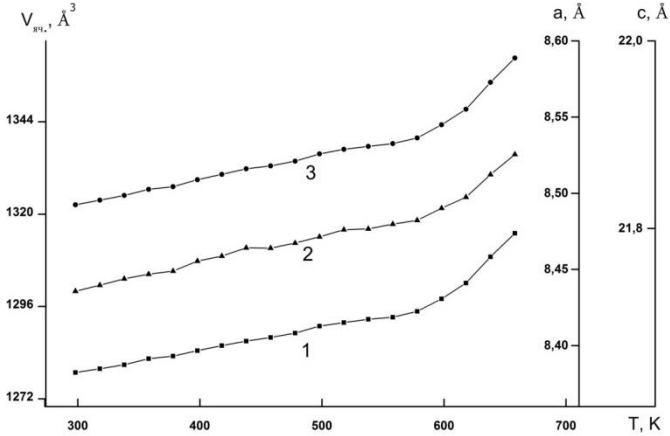


Рис. 2. Зависимость параметров элементарной ячейки a (1), c (2) и объема Vяч (3) от температуры для Cu1,85Te

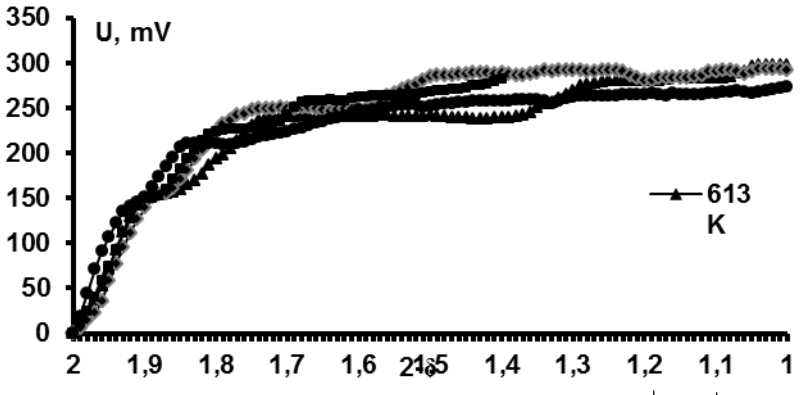


Рис. 3. Зависимость ЭДС электрохимической ячейки $Cu|CuBr|Cu_{2-\delta}Te$ от состава при температурах 613–673К

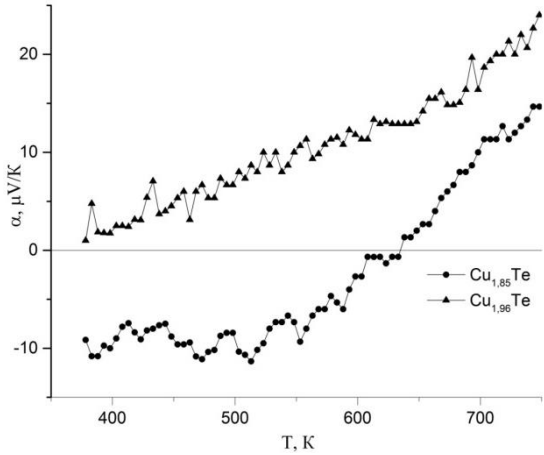


Рис. 4. Температурная зависимость коэффициентов термоэдс для составов $Cu_{1.85}Te$ и $Cu_{1.96}Te$

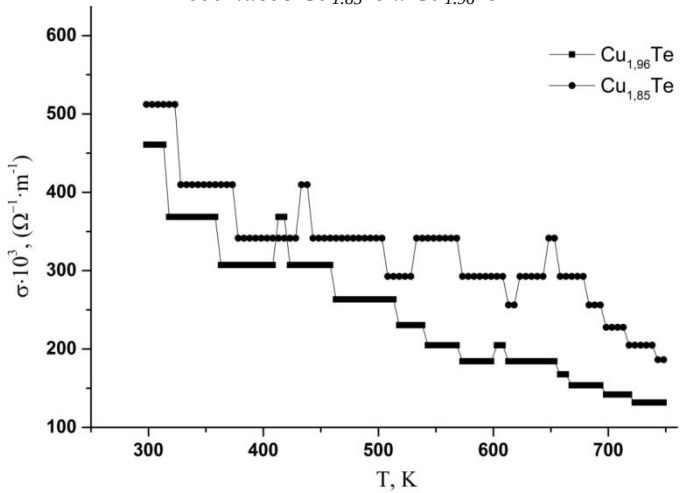


Рис. 5. Температурные зависимости электропроводности для составов $Cu_{1.85}Te$ и $Cu_{1.96}Te$.

Как видно из рисунков, для состава $Cu_{1.96}Te$ коэффициент термоэдс во всем интервале температур имеет положительный знак, который свидетельствует о том, что основными носителями заряда в исследуемом соединении являются дырки. С ростом температуры

удельная электропроводность соединения $Cu_{1.96}Te$ убывает. Эти данные хорошо согласуются с результатами работы [Cu2Te]. Металлический тип проводимости в исследуемом интервале температур, в отличие от полупроводникового характера электропроводности в сульфидах и селенидах меди, можно объяснить заметным ослаблением ионно-ковалентного типа химической связи в теллуридах меди.

В теллуриде меди $Cu_{1.85}Te$ величина коэффициента термоэдс уменьшается, притом наблюдается смена знака при температуре около 620 К с отрицательного на положительный. Можно утверждать, что при этой температуре происходит смена типа носителей заряда с электронного на дырочный. С ростом температуры удельная электропроводность в этом соединении также убывает. Можно утверждать, что с ростом температуры становится более выраженным вклад металлической химической связи в электропроводность. Предполагается, что изменение величины проводимости при отклонении от степени стехиометричности связано с изменением положения уровня Ферми и увеличением концентрации дырок при увеличении вакансий [7].

Библиографический список

1. Wagner J.B., Wagner C. Investigations on Cuprous Sulfide // J. Chem. Phys.– 1957.– V. 26.– № 6.– P. 1602–1605.

2. Горбачев В.В. Полупроводниковые соединения A2IBIV // М.: Металлургия, 1980.– 132 с.

3. Stevels A.L.N., Jellinek F. Recl. Trav. Chim. Pay-Bas. 111, 273 (1971).

4. Сорокин Г.П., Идричан Г.З., Сорокина З.М. // Изв. АН СССР, Неорган. мат., 1979.– Т. 15.– В. 1.– С. 159.

5. Castanet P., Louadi S., Yassin A.J. // Alloys and Compounds. 224, 351 (1995).

6. Yakshibaev R.A., Mukhamadeeva N.N., Almukhametov R.F. // Phys. Stat. Sol. (a)., 1988.– V. 108.– P. 135-141.

7. Ягафарова З.А., Биккулова Н.Н., Нигматуллина Г.Р., Биккулова Л.В. Фазовые соотношения в твердом электролите на основе теллурида меди // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 11 (ч. 5).

Сведения об авторах

Биккулова Нурия Нагимьяновна, профессор, доктор физико-математических наук СФ БашГУ. E-mail: bickulova@mail.ru.

Акманова Гузель Рифкатовна, доцент кафедры общей физики СФ БашГУ.

Нигматуллина Гульназ Рамазановна, магистрант СФ БашГУ.

Курбангулов Азат Рифкатович, инженер кафедры общей и теоретической физики СФ БашГУ.

Биккулова Ляйсан Валиуловна, аспирант СФ БашГУ.

УДК 517.52

Билалов Б.Т.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ СХОДИМОСТЬ, ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ, НЕПРЕРЫВНЫЙ ВАРИАНТ И ПРИЛОЖЕНИЯ К ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ

Работа посвящена статистической сходимости в различных топологических структурах, ее обобщениям и приложениям к рядам Фурье. Она состоит из двух частей. В первой части рассматриваются дискретные варианты статистической сходимости и их разные обобщения, вводятся понятия статистических фундаментальностей, порожденные этими видами сходимостей, и доказываются эквивалентности понятий статистических сходимостей и статистических фундаментальностей. Вторая часть посвящена непрерывным аналогам статистической сходимости. Многие результаты дискретного варианта переносятся к этому случаю. Исходя из этого понятия определяется пространство статистически непрерывных на отрезке функций, изучаются некоторые его свойства. Рассматриваются некоторые приложения к Фурье-Стилтьес преобразованиям.

Ключевые слова: статистическая сходимость, статистическая фундаментальность, преобразование Фурье-Стилтьеса.

Bilalov B.T.

STATISTICAL CONVERGENCE, ITS GENERALIZATIONS, CONTINUOUS VARIANT AND APPLICATIONS TO FOURIER TRANSFORMATIONS

The paper is devoted to statistical convergence in various topological structures, its generalizations and applications to Fourier series. It consists of two parts. In the first part, discrete variants of statistical convergence and their various generalizations are considered, the concepts of statistical fundamentality generated by these kinds of convergences are introduced, and equivalences of the concepts of statistical convergence and statistical fundamentality are proved. The second part is devoted to

© Билалов Б.Т., 2017

continuous analogues of statistical convergence. Many results of the discrete variant are carried over to this case. Using this concept, the space of statistically continuous functions on a segment is determined, some of its properties are studied. Some applications to Fourier-Stieltjes transformations are considered.

Keywords: *statistical convergence, statistical fundamentality, Fourier-Stieltjes transformations.*

Теория тригонометрических рядов Фурье является важным звеном аппроксимации и служит основой для современного гармонического анализа. Во всех этапах развития этой теории одним из ключевых вопросов являлась суммируемость в том или ином смысле рядов Фурье. Это направление хорошо освещено в монографиях известных математиков как А. Зигмунд [1]-[2], Р. Эдварс [3]-[4], Н.К. Бари [5], С. Качмаж, Г. Штейнгауз [6] и др. В теории тригонометрических рядов Фурье еще Харди и Литтлвудом был применен H_q *– метод* суммирования. Относительно этого понятия можно посмотреть монографию А. Зигмунд [2]. Чтобы характеризовать H_q *– суммируемость,* было введено понятие почти сходимости. В последующем это понятие было названо статистической сходимостью. Следует отметить, что термин статистической сходимости впервые был принят в работе H.Fast [7] и H.Steinhaus [8]. Понятие статистической фундаментальности было введено J.A. Fridy [9] относительно последовательностей из действительных чисел. Им доказано, что статистическая сходимость эквивалентна статистической фундаментальности.

Следует отметить, что методы не сходящихся последовательностей давно известны, к ним можно отнести, например, метод Фейера, метод Чезаро, метод Абеля, метод Рисса, и т.п. Эти методы применяются в разных областях математики. Для применимости этих методов очень важно, чтобы рассматриваемое пространство имело линейную структуру. Поэтому изучение сходимостей статистического типа в топологических пространствах, не снабженных линейными операциями, представляет отдельный научный интерес. Разным аспектам этого вопроса в метрических пространствах посвящены работы авторов [10]-[11]. Статистическая сходимость в линейных топологических пространствах рассмотрена в работе [12].

Отметим, что во всех этапах развития теории тригонометрических рядов Фурье одним из ключевых вопросов является суммируе-

мость рядов Фурье в том или ином смысле. Это направление достаточно хорошо освещено в монографиях известных математиков как А. Зигмунд, Р. Эдвардс, Н.К. Бари, С. Качмаж и Г. Штейнгауз и др. Особенно трудной задачей являлась точечная сходимость рядов Фурье. В связи с этим еще в 1913 г. Лузиным поставлена проблема о точечной сходимости рядов Фурье непрерывных функций. В 1926 г. А.Н. Колмогоровым построен пример суммируемой функции, ряд Фурье которой расходится в каждой точке. Проблема Лузина решена лишь в 1965 г. Л.Карлесоном в общем случае, т.е. им доказано, что ряд Фурье L_2 – функции п.в. сходится. Этот результат перенесен на $L_p, 1< p <+\infty$ – функции Hant-Хаптом. Между тем были созданы или же рассмотрены методы суммирования, относительно которых ряды Фурье точечно сходится. В этом направлении очень важным является вопрос о регулярности метода суммируемости. Обширную информацию о регулярных методах суммировании можно получить из монографии C.M.Petersen. Известные методы суммирования как метод Чезаро, метод Рисса, метод Абеля и тому подобные, являются регулярными. В связи с изучением H_q – суммируемости рядов Фурье еще Харди и Литтлвудом было введено понятие почти сходимости (almost convergence) числовой последовательности. В последующем это понятие было названо статистической сходимостью.

Естественно возникает вопрос о существовании непрерывного аналога или же обобщения понятия статистической сходимости. Видимо такая постановка впервые была рассмотрена F.Moricz [13]. Он ввел понятия статистического предела измеримой по Лебегу функции в точке, исходя из меры Лебега. Но следует отметить, что введенное им понятие не является обобщением статистической сходимости последовательностей, так как из него невозможно получить аналогичное понятие для последовательностей. Затем этим же автором было введено понятие μ – сильно суммируемости, порожденное мерой Лебега $\mu(\cdot)$, и изучена связь этого понятия со статистической сходимостью. Рассмотрены некоторые приложения к Фурье преобразованиям.

Непосредственное обобщение на непрерывный случай было сделано в работе B.T. Bilalov, S.R. Sadigova [14]. В ней введено понятие μ – статистического предела на бесконечности измеримой (по Борелю) функции, относительно σ – конечной меры $\mu(\cdot)$. Определяется понятие μ – статистической фундаментальности и свойства стати-

стически сходящихся последовательностей. Аналогичные понятия определены относительно конечной точки. Определяется понятие μ – сильно суммируемости (и в конечной точке тоже), устанавливается ее связь с μ – статистической сходимостью, μ – сильно суммируемость применяется к Фурье-Стилтьеса преобразованиям.

Библиографический список

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.1. // М.: Мир. – 1965. – 616 с.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.2. // М.: Мир. – 1965. – 540 с.
3. Эдвардс Р. Ряды Фурье // М.: Мир. – 1985. – 262 с.
4. Эдвардс Р. Ряды Фурье // М.: Мир. – 1985. – 400 с.
5. Бари Н.К. Тригонометрические ряды // М.: Физматгиз. – 1961. – 672 с.
6. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов // М.: ГИФМЛ. – 1958. – 508 с.
7. Fast H. Sur la convergence statistique // Colloq. Math. – 1951. – 2. – C. 241-244.
8. Steinhaus *H. Sur la convergence* ordinaire et *la convergence* asymptotique // Colloquium Mathematicum. – 1951. – V. 2, №.7. – P. 3–74.
9. Fridy J.A. On statistical convergence // Analysis. – 1985. – V. 5.– № 4. – P. 301-313.
10. Kuchukaslan M., Deger U. On statistical boundedness of metric valued sequences // European Journal of Pure and Applied Mathematics. – V. 5.– № 2. – 2012. – P. 174-186.
11. Kuchukaslan M., Deger U., Dovgoshey O. On statistical convergence of metric valued sequences // arXiv: 1203.2584, [math.FA], 12 Mar. – 2012.
12. Maio G.D., Kocinac L.D.R. Statistical convergence in topology // Topology and its Applications.– 2008. – V. 156. – P. 28–45.
13. Moricz F. Statsitical limits of measurable functions // Analysis– 2004. – V. 24. – P. 1-18.
14. Bilalov B.T., Sadigova S.R. On μ-statistical convergence // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2015. – 143(9). – P. 3869–3878.

Сведения об авторах

Билалов Билал Тельман, член-корреспондент НАН Азербайджана, Институт Математики и Механики НАН Азербайдана, Баку, Азербайджан. E-mail: b_bilalov@mail.ru

УДК 330.42

Бирюков А. Н., Алексеева Н.Г.

ОБОБЩЁННЫЙ КРИТЕРИЙ КАЧЕСТВА НЕЙРОСЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ЗАДАЧ ПО МЕТОДУ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА

Работа посвящена вопросам регуляризации и оценке адекватности нейросетевых моделей финансового контроля, которые характеризуются сложными условиями моделирования (сильное зашумление данных, отягченное дефицитом наблюдений).

Ключевые слова: нейросетевые модели (НСМ), принцип регуляризации А.Н. Тихонова, алгоритм, байесовская регуляризация, оценки качества НСМ.

Biryukov A. N., Alexeeva N. G.

THE GENERALIZED CRITERION OF THE QUALITY OF NEURAL NETWORK MODELS FOR ILL-POSED OPERATOR TASKS BY THE METHOD OF TIKHONOV REGULARIZATION

The work is devoted to the regularization and evaluation of the adequacy of neural network models of financial control, which are characterized by complex modelling conditions (strong noise data, aggravated by the scarcity of observations).

Key words: neural network model (NSM), the principle of regularization A. N. Tikhonov algorithm, Bayesian regularization, evaluation of the quality of NSM.

Предметом исследования в статье является методология налогового и финансового контроля, основанная на построении эконометрических нейросетевых моделей, которые связывают агрегированный выходной показатель экономического объекта Y с рядом «производственных факторов» $\{X_j\}$, объективно формирующих Y. Круг таких

© Бирюков А.Н., Алексеева Н.Г, 2017

задач весьма широк. Частным случаем являются задачи ранжирования экономических объектов при принятии управленческих решений. Так, например, в процедурах налогового контроля на стадии камеральных проверок налогоплательщики ранжируются по уровню ожидаемых доначислений. При распределении субвенций на муниципальном уровне муниципальные учреждения (МУ) ранжируются по агрегированным показателям эффективности их работы в предшествующий период . При решении вопроса о предоставлении банковских кредитов корпоративным заёмщикам, а также при распределении антикризисных кредитов на региональном уровне, заёмщики ранжируются по агрегированным показателям кредитоспособности. Сюда можно также отнести внутренний контроллинг финансового состояния организаций и другие задачи [1].

Для указанного круга задач налогового и финансового контроля основное назначение нейросетевой модели (НСМ) – это восстановление многомерной нелинейной функции[1] $Y(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, характеризующей экономическую закономерность (аналог «производственной функции»), «зашитой» в экспериментальных данных D. Данные D представлены парами (кортежами) $\langle y_i, \vec{x}_i \rangle, i = \overline{1, N}$, где i – номер наблюдения, N – количество наблюдений. В данных панельного типа наблюдения упорядочены как по времени t, так и по номеру экономического объекта, что позволяет восстанавливать динамические закономерности $Y(\vec{X}(t), t)$.

С математической точки зрения задачи восстановления относятся к классу некорректных задач по Адамару [3]. Причинами некорректности могут быть:

1) отсутствие решения в искомом классе решений;

2) неединственность решения; в нейросетевых моделях это связано с «застреванием» алгоритма обучения сети в локальных минимумах;

3) неустойчивость решения по вариации входных данных D.

Есть ещё четвёртая причина, которая на практике вызывает ещё большие затруднения, чем первые три, при решении обратных задач – это существование широкого интервала неопределённости для исход-

1 Здесь и далее большими буквами Y,X обозначаются сами случайные величины выхода и входа НСМ, а малыми буквами y, x – их конкретные числовые значения.

ных данных D, т.е. Y и $\vec{x}$ измеряются с существенной погрешностью.

Другими словами задачи налогового и финансового контроля характеризуются сильным зашумлением данных (вплоть до сознательного их искажения!), а также дефицитом наблюдений, что отягчает получение решения обратной задачи.

В данной статье анализируется концепция разработки методов и алгоритмов обеспечения состоятельности регуляризованных по А.Н. Тихонову [3] обратных задач восстановления многомерных нелинейных функций в нейросетевом базисе. Согласно этой концепции уменьшение числовых мер ошибок эксперимента δ и ошибок аппроксимации в НСМ ρ должно производится взаимосвязано с использованием существующей объективно закономерности обучения сети:

$$\rho = \varphi(\delta), \tag{1}$$

где $\varphi(\cdot)$ – неизвестная функция, зависящая от архитектуры сети, вида активационных функций в скрытых слоях, параметров обучения и искомых параметров модели (матрицы синоптических весов W). Причём управление числовой мерой δ, в отличие от известных подходов к структурированию, преобразованию и фильтрации данных должно быть подчинено процедуре управления качеством будущего обучения сети. Последнее означает выполнение условия квазиминимизации, которое удовлетворяет принципу регуляризации А.Н. Тихонова [3]:

$$Z_\delta : \rho_{\tilde{U}}(Az, \tilde{u}) \le \delta,\ z \in Z^*,\ z_\delta \in Z_\delta,\ \tilde{u} \in \tilde{U}, \tag{2}$$

где $\tilde{u}$ – зашумлённые наблюдаемые характеристики (данные) объекта; z – искомые в процедуре обучения сети параметры модели W (точное решение обратной задачи); $\tilde{U}$ – пространство зашумлённых данных; $A(\cdot)$ – оператор решения обратной задачи восстановления функции $Y(\vec{X}, W)$ (при обучении сети – это, например оператор алгоритма обратного распространения (Back Propagation (BP); $\rho_{\tilde{U}}$ – расстояние между элементами в пространстве $\tilde{U}$; z_δ – решение обратной задачи, принадлежащее множеству практической эквивалентности Z_δ; Z^* – компакт.

Математический анализ, основанный на теореме А.Н. Тихонова Ax=u [3] приводит к выводу, что выбор (2) решения z_δ из множества практической эквивалентности Z_δ можно гарантировать, если потребовать принадлежности решения z_δ, к тому же компакту Z^*, что и точное решение операторного уравнения Az = u.

Для практической реализации указанных выше концепций из необходимо разработать два алгоритма:

– алгоритм I построения подходящей числовой меры оценки погрешности δ для данных D и инструмента управления этой погрешностью;

– алгоритм II построения числовой меры оценки качества нейросети и инструмента управления этим качеством.

Для алгоритма I в [2] предложен, разработан в деталях и проверен на сериях вычислительных экспериментов метод вложенных математических моделей (ВММ), который сводится к итерационному процессу, построения вспомогательных НСМ (субмоделей) для кластеризации, фильтрации и ремонта данных.

Детализация алгоритма II на основе байесовского подхода [2] и является целью данной статьи.

Алгоритм байесовской регуляризации НСМ. В качестве числовой меры $\rho_{\tilde{U}}(A_{z,\tilde{u}})$ качества аппроксимации данных в НСМ примем мультипликативный критерий, аналогичный используемому в алгоритме I [2], но только определённый не на обучающем множестве Ω^{train} данных D, а на тестовом множестве Ω^{test}:

$$\Phi(Y(\vec{X},W)) = E \cdot S \cdot R,\ (\vec{X},Y) \in \Omega^{test}, \qquad (3)$$

где E – ошибка обобщения НСМ, которая имеет смысл относительной нормы аппроксимации на тестовом множестве точек, которые сеть не знала при обучении; S – мера сжимающих свойств НСМ (аналог константы Липшица связи «вход – выход» сети); R – мера отклонения коэффициента детерминации от его идеального значения, равного 1.

Частные критерии оценки качества НСМ E, S, R определяются по формулам:

$$E = \frac{\left\| y - \hat{Y} \right\|}{\|y\|};\quad \|y\| = \sqrt{\sum_i y_i^2};\quad \left\| Y - \hat{Y} \right\| = \sqrt{\sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2},\quad i = \overline{1, N^{test}}, \qquad (4)$$

где $\left\|Y_i, \hat{Y}_i\right\|$ – экспериментальное и рассчитанное в НСМ значение выхода в i-ой точке данных; N^{test} – количество точек в тестовом множестве Ω^{test}: $S = \left\|\hat{y}_\alpha - \hat{y}_\beta\right\| / \left\|\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta\right\|$, (5)

где x_α и x_β два близких по евклидовой норме в R^n вектора независимых переменных из тестового множества; $\left\|\vec{x}_\alpha\right\|_{R_n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_{\alpha j}^2}$, $j = \overline{1,n}$ – номер независимой переменной; $\hat{y}_\alpha$ и $\hat{y}_\beta$ – расчётные значения выходной величины в точках α и β на тестовом множестве Ω^{test}; $R = 1 - \Gamma^2_{Y,\hat{Y}}$, где $\Gamma^2_{Y,\hat{Y}}$ – коэффициент детерминации между расчётными и экспериментальными значениями выхода НСМ.

Ошибка обобщения E характеризует прогностические свойства сети: чем меньше E, тем ближе расчётные значения $\hat{y}$ к экспериментальным y на новых точках. Частный критерий S характеризует устойчивость НСМ к вариации независимых переменных $\vec{x}$: чем меньше S, тем меньше «разбегание» траекторий $\hat{y}(\vec{x})$ на новых точках после обучения сети.

Однако заметим, что при малых S, т.е. при сильных сжимающих свойствах нейросетевого отображения $A_z = u$, в режиме обучения сети, т.е. в обратной задаче поиска параметров W нейросетевой - оператор $A(\cdot)$ ведёт себя как «вполне непрерывный (компактный) оператор» [3], что является индикатором некорректности обратной задачи. Критерий R характеризует качество аппроксимации «зашитой» в данных D истинной зависимости $Y(\vec{X})$, т.е. гиперповерхности с помощью нейросетевого отображения $\hat{Y}(\vec{X})$.

Таким образом, обобщённый критерий качества НСМ Ф оценивает как точные и прогностические свойства нейросети, так и её устойчивость по вариации данных D.

Библиографический список

1. Бирюков А.Н. Байесовский подход к регуляризации задач нейросетевого моделирования налогового и финансового подхода. Уфа: Издательство «Гилем» АН РБ, препринт № 4, 2010.– С. 24.

2. Нужный А.С., Шумский С.А. Регуляризация Байеса в задаче аппроксимации функции многих переменных // Математическое моделирование, 2003.– Том 15.– № 9.– С. 55-63.

3. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. – М.: Наука, 1995.– 312 с.

Сведения об авторах

Бирюков Александр Николаевич, доктор экономических наук, доцент, профессор СФ БашГУ. E-mail: biryukov_str@mail.ru

Алексеева Наталья Григорьевна, кандидат экономических наук, доцент, доцент СФ БашГУ. E-mail: korolevichlyba@mail.ru

УДК 330.42

Бирюков А.Н., Алексеева Н.Г.

УПРАВЛЕНИЕ ОБОБЩЁННЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА НЕЙРОСЕТЕВОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ БАЙЕСОВСКОГО ПОДХОДА

Результат работы заключается в выдвинутой идее, области нейроматематики, одновременного использования байесовского ансамбля априорных гипотез и соответствующих ему нейросетей, различающихся архитектурой и видом активационных функций, к двум согласованным процедурам – структурированию данных и повышению прогностических свойств нейросети.

Ключевые слова: нейросети, априорная гипотеза, Байесовский подход, ранжирование учреждений, сигмоидная активационная функция.

Biryukov A.N., Alexeeva N.G.

MANAGEMENT OF GENERALIZED CRITERION OF THE QUALITY OF NEURAL NETWORK MODELS BASED ON BAYESIAN APPROACH

The result of the work is to put forward the idea of neuromathematics, the simultaneous use of Bayesian ensemble of a priori hypotheses and the corresponding neural networks of differing architecture and activation functions, the two agreed procedures – to organize the data and improve the predictive properties of neural networks.

Key words: neural networks, a priori hypothesis, Bayesian approach, ranking institutions, sigmoidal activation function.

© Бирюков А.Н., Алексеева Н.Г, 2017

Интуитивно, задачей обучения является обобщение эмпирических данных, предполагающее возможность предсказывать новые события, основываясь на известном опыте прошлого. Такие предсказания в наиболее общем случае имеют вероятностный характер. Обобщением имеющего набора данных $D = \{\vec{d}_1,...,\vec{d}_N\}$ служит некая гипотеза h вероятностного происхождения данных $P_h(\vec{d}) = P(\vec{d}/h)$.

Такая гипотеза обладает предсказательной силой, поскольку позволяет не только оценить меру правдоподобия имеющихся данных $P(D/h)$), но и предсказать вероятность любого нового набора данных $P(D'/h)$. Расчёт подобного рода вероятностей различных исходов экспериментов при заданном способе порождения данных $P(\vec{d}/h)$ является предметом теории вероятности.

Обучение предполагает решения обратной задачи: по имеющимся данным следует выяснить вероятность различных гипотез о способе порождения этих данных $P(h/D)$.

Обычно эту апостериорную (posterior) вероятность используют для выбора наиболее вероятной гипотезы в качестве кандидата для предсказаний будущих событий такого рода: $h_{MP} = ard \max_h P(h|D)$.

В традиционной статистике, рассматривающей, по сути, идентичный круг задач выбора наилучшей аппроксимации эмпирических данных, базовым является другой критерий оптимальности – принцип максимума правдоподобия: $h_{ML} = ard \max_h P(D|h)$, не предполагающий решения обратной задачи, т.е. поиска гипотезы h. Такое приближение действительно оправдано в рамках обычных предположений традиционной статистики, а именно, когда количество данных намного превышает эффективное число параметров модели. Между тем, при относительно небольшом количестве данных принцип максимального правдоподобия может приводить к парадоксам. Например, при бросании монеты наиболее правдоподобной оценкой её кривизны является эмпирическая частота выпадения «решек». И если в серии из 5 исходов случайно не выпадет ни одной «решки», то мы вынуждены будем считать монету «бесконечно кривой», тогда как на самом деле вероятность такого события даже для идеальной монеты не слишком мала.

Байесовский подход к обучению, основанный на решении обратной задачи, более последователен и, соответственно, применим к более широкому классу моделей с большими возможностями моделирования сложных явлений. Тем более, что в общем виде эта задача решается «в одну строку» и её решение следует из общих принципов теории вероятностей. Действительно, если трактовать как выбор гипотезы, так и наблюдение данных в вероятностном смысле и записать согласно определению условных вероятностей $P(D,h) = P(h/D)P(D) = P(D/H)P(h)$, получим теорему Байеса:

$$P(h|D) = \frac{P(D|h)P(h)}{P(D)} = \frac{P(D|h)P(h)}{\sum_h P(D|h)P(h)}, \qquad (1)$$

здесь $P(D|h)$ – апостериорная вероятность конкретной гипотезы h о порождении данных D, т.е. мера правдоподобия (Likelihood) наблюдения данных D в соответствии с гипотезой h; $P(h)$ – априорная вероятность (Prior) гипотезы h; $P(D) = \sum_h P(D|h) \cdot P(h)$ – фактически наблюдаемая суммарная по всем гипотезам $\{h_i\}$ вероятность (Evidence) данных D.

Пример использования байесовского подхода к прогнозным оценкам.

Рассмотрим задачу ранжирования муниципальных образовательных учреждений (МУ) при планировании фонда материального развития из [2]. Постановка задачи: входы описываются n-мерным вектором $\vec{X}$, а выход – скалярным агрегированным показателем $\Phi(\vec{X}, W)$, характеризующим эффективность работы МУ. W – искомая в обратной задаче обучения матрица синоптических весов.

В качестве пространства гипотез выбрано W – параметрическое семейство функций $h : y = h(x,w)$ с заданными ограничениями на значения её параметров w. Например, в случае нейросетевой аппроксимации w есть множество всех настроечных синоптических весов (synaptic weights). На эту функцию накладывается шум $y=h(x,w) + \eta(\beta)$.

– В качестве мета-гипотезы H принята парадигма сети – MLP (многослойный персептрон с алгоритмом обучения обратного распространения ошибки (Back Propagation) (BP)). В пространстве гипотез $\{h_i\}$ варьировались вид активационной функции в скрытых слоях и архитектура сети:

– гипотеза h_1– один скрытый слой сети с сигмоидной активационной функцией (mlp1_sigm);

– гипотеза h_2 – два скрытых слоя с сигмоидными активационными функциями в них (mlp2_sigm);

– гипотеза h_3 – два скрытых слоя с сигмоидными активационными функциями в первом слое и гиперболическим тангенсом во втором слое (mlp2_sigm_th);

– гипотеза h_4 – один скрытый слой с активационной функцией типа «гиперболический тангенс» (mlp1_th);

– гипотеза h_5 – два скрытых слоя с активационной функцией гиперболический тангенс в них (mlp2_th);

– гипотеза h_6 – два скрытых слоя с активационной функцией гиперболического тангенса в первом слое и сигмоида во втором слое (mlp2_th_sigm).

Прогнозные значения показателя Φ для объекта № 2 в ансамбле НСМ гипотез $\{h_i\}$ составили соответственно: 0,02654 0,0235; 0,0238; 0,0272; 0,0245; 0,0223. для оценки ошибки прогноза выбрана точка горизонта прогноза (t = 21 месяц), где были известны данные. Относительная ошибка аппроксимации для шести сетей в ансамбле составила для объекта № 2 в процентах: 11; 2; 1; 13; 2; 7; 3. Максимальная ошибка по ансамблю равна 13 %, средняя ошибка равна 6,5 %, что вполне приемлемо при ограниченном числе наблюдений в выборке (N=180) и сильном зашумлении данных. Взаимная согласованность гипотез $\{h_i\}$ в ансамбле наглядно видна из динамических кривых $\Phi_i(t), i=\overline{1,6}$ на рис.1 для объекта № 2.

Таким образом, предварительные вычислительные эксперименты на реальных данных [2] показали работоспособность предлагаемого подхода к регуляризации НСМ на основе байесовского подхода.

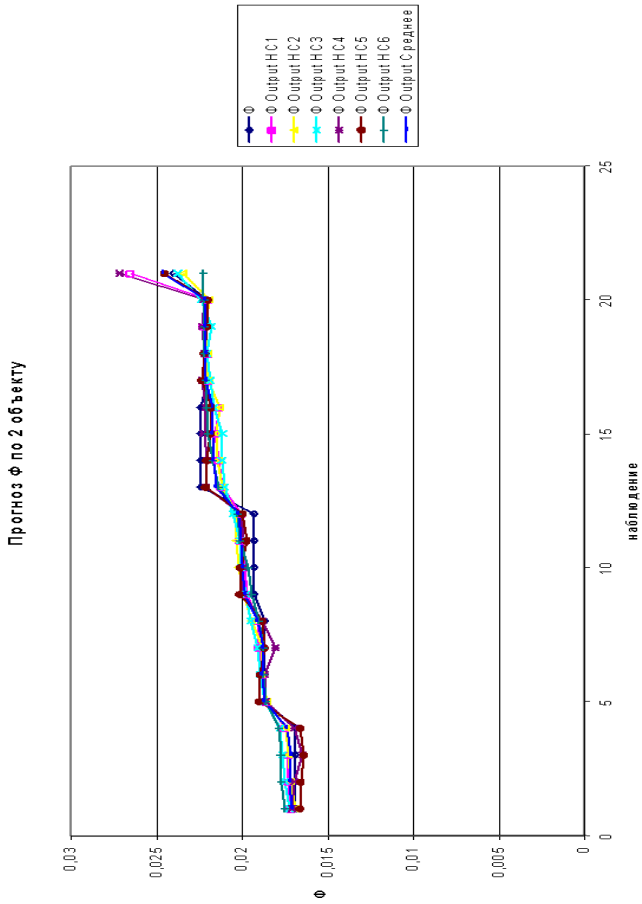


Рис. 1. Сводный график обобщённого показателя Ф для НСМ1 – НСМ6 и прогноз на период времени 21 для объекта 2

Библиографический список

1. Бирюков А.Н. Байесовская регуляризация нейросетевых моделей ранжирования и кластеризации экономических объектов. – Уфа: Академия наук РБ, Издательство «Гилем», 2011. – 292 с.

2. Моделирование бюджетных процессов на муниципальном уровне на основе нейросетей / Бирюков А.Н. [и др.]. – Уфа: Восточный университет, 2008. – 220 с.

Сведения об авторах

Бирюков Александр Николаевич, доктор экономических наук, доцент, профессор СФ БашГУ. E-mail: biryukov_str@mail.ru

Алексеева Наталья Григорьевна, кандидат экономических наук, доцент, доцент СФ БашГУ. E-mail: korolevichlyba@mail.ru

УДК 519.179

Блюмин С.Л.

ГРАФЫ, ГИПЕРГРАФЫ, МЕТАГРАФЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С 2D-СИСТЕМАМИ

Введены ассоциированные с 2D-*системами графы, гиперграфы, метаграфы и их матрицы; установлена их связь с с переходом от базовых к ассоциированным моделям* 2D-*систем.*

Ключевые слова: 2D-*системы, графы, гиперграфы, метаграфы.*

Blyumin S.L.

GRAPHS, HYPERGRAPHS, METAGRAPHS, ASSOCIATED WITH 2D-SYSTEMS

Graphs, hypergraphs, metagraphs, associated with 2D-*systems, and their matrices are introduced; their connection with transition from base to associated models of* 2D-*systems is established.*

Key words: 2D-*systems, graphs, hypergraphs, metagraphs.*

Ключевым шагом в разработке теории дискретно-аргументных систем является переход к ассоциированной модели [1]. 2D-системы являются простейшими характерными представителями дискретно-аргументных систем [2].

Цель данной работы – ввести ассоциированные с 2D-системами объекты графоструктурного моделирования – графы, гиперграфы [5] и метаграфы [4,3], их матрицы инцидентности, смежности, валентности, лапласианы и установить их связь с переходом к ассоциированной модели.

© Блюмин С.Л., 2017

Базовая модель 2D-системы описывается уравнением

$$x[t,s] = A_1 x[t-1,s] + A_2 x[t,s-1] + Bu[t,s], t,s \in N = \{0,1,2,\ldots\},$$

$$x[0,0] = x_0, x[t,s] = 0, u[t,s] = 0 \text{ при } t<0 \text{ или } s<0.$$

Дискретная плоская решетка $N \times N$ – первый квадрант дискретной плоскости – разбивается на «уровни», номера $"t" \in N$ которых, идущие в северо-восточном направлении на плоскости, определяют «ассоциированное время». Уровень с номером $"t"$ содержит $"t"+1$ естественным образом упорядоченных точек $[t,s], t+s="t"$:

$$"t" = L["t"] = \{["t",0],["t"-1,1],["t"-2,2],\ldots,[2,"t"-2],[1,"t"-1],[0,"t"]\}$$

Ассоциированная модель описывается уравнением:

$$x["t"] = A["t"]x["t"-1] + B["t"]u["t"], x["0"] = x_0,$$

$$x["t"] = \begin{bmatrix} \cdot \\ x[t,s] \\ \cdot \end{bmatrix}_{t+s="t"}, u["t"] = \begin{bmatrix} \cdot \\ u[t,s] \\ \cdot \end{bmatrix}_{t+s="t"}$$

$$A["t"] = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ A_2 & A_1 & \\ & A_2 & \ddots \\ & & \ddots \end{bmatrix}_{("t"+1)\times"t"},$$

$$B["t"] = I_{"t"+1} \otimes B = \begin{bmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & B & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}_{("t"+1)\times("t"+1)},$$

так что матрицы ассоциированной модели имеют блочную структуру (нулевые блоки опущены).

Орграф $G(2D)$, ассоциированный с базовой моделью 2D-системы, представлен своим фрагментом:

$$
\begin{array}{ccccccc}
[0,3] & \rightarrow & [1,3] & \rightarrow & [2,3] & \rightarrow & [3,3] \\
\uparrow & \backslash''3'' & \uparrow & \backslash''4'' & \uparrow & \backslash''5'' & \uparrow \\
[0,2] & \rightarrow & [1,2] & \rightarrow & [2,2] & \rightarrow & [3,2] \\
\uparrow & \backslash''2'' & \uparrow & \backslash''3'' & \uparrow & \backslash''4'' & \uparrow \\
[0,1] & \rightarrow & [1,1] & \rightarrow & [2,1] & \rightarrow & [3,1] \\
\uparrow & \backslash''1'' & \uparrow & \backslash''2'' & \uparrow & \backslash''3'' & \uparrow \\
[0,0] & \rightarrow & [1,0] & \rightarrow & [2,0] & \rightarrow & [3,0]
\end{array}
\quad .
$$

Его матрицы инцидентности $IG(2D)$, смежности $AG(2D)$, валентности $DG(2D)$ и лапласиан $LG(2D)$ связаны соотношением

$IG(2D)\cdot IG(2D)^{T} = LG(2D) = DG(2D) - «A»G(2D)$,

где $«A»G(2D)$ – матрица смежности соответствующего неориентированного графа, а $AG(2D)$ – ее поддиагональная часть; так, для $''t''=''2''$

$$
LG(2D)=
\begin{array}{c}
[0,0] \\ [1,0] \\ [0,1] \\ [2,0] \\ [1,1] \\ [0,2]
\end{array}
\begin{bmatrix}
-1 & -1 & & & & \\
1 & & -1 & -1 & & \\
 & 1 & & & -1 & -1 \\
 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & \\
 & & & & & 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
-1 & 1 & & & & \\
-1 & & 1 & & & \\
 & -1 & & 1 & & \\
 & -1 & & & 1 & \\
 & & -1 & & 1 & \\
 & & -1 & & & 1
\end{bmatrix}
=
$$

$$
=
\begin{bmatrix}
2 & & & & & \\
 & 3 & & & & \\
 & & 3 & & & \\
 & & & 1 & & \\
 & & & & 2 & \\
 & & & & & 1
\end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix}
 & 1 & 1 & & & \\
1 & & & 1 & 1 & \\
1 & & & & 1 & 1 \\
 & 1 & & & & \\
 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & & &
\end{bmatrix}
.
$$

Тем самым структура поддиагональных блоков, образующих $AG(2D)$, соответствуют структуре матриц $A[''1'']$, $A[''2'']$ ассоциированной модели; это верно и в общем случае.

С 2D-системой, помимо графа $G(2D)$, ассоциируются гиперграф $H(2D)$ и метаграф $M(2D)$, причем гиперребра гиперграфа совпадают с метавершинами метаграфа, а их упорядоченные пары – метадуги ме-

таграфа – являются дугами вспомогательного орграфа $G^*(2D)$ [5]; при этом между их матрицами инцидентности справедлива связь

$IM(2D)= IH(2D)\cdot IG^*(2D)$.

Представляется естественным считать метавершинами определенные выше «уровни»; в этом случае для $"t"="2"$

$$I\hat{}M(2D)= \begin{matrix}[0,0]\\ [1,0]\\ [0,1]\\ [2,0]\\ [1,1]\\ [0,2]\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1\\ & & 1\\ & & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & & \\ 1 & -1 & \\ & 1 & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \\ 1 & -1\\ 1 & -1\\ & 1\\ & 1\\ & 1\end{bmatrix}.$$

Но при такой трактовке

$L\hat{}M(2D)=$

$$\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} & 1 & 1 & & & \\ 1 & & & 1 & 1 & 1\\ 1 & & & 1 & 1 & 1\\ & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & & \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} & & & & & \\ & & 2 & & & \\ & 2 & & & & \\ & & & & 1 & 1\\ & & & 1 & & 1\\ & & & 1 & 1 & \end{bmatrix}$$

(третья матрица определяет смежность вершин в метавершинах) нижний блок второй матрицы не соответствует структуре матрицы $A["2"]$ ассоциированной модели.

Локальная структура орграфа $G(2D)$ подсказывает определение двух типов метавершин, одноэлементных $[t,s]$ и двухэлементных $\{[t+1,s],[t,s+1]\}$, метадуг как упорядоченных пар $([t,s],\{[t+1,s],[t,s+1]\})$, так что «уровни» могут рассматриваться как объединения соответствующих метавершин. При такой трактовке, для $"t"="2"$,

$$IM(2D)=\begin{matrix}[0,0]\\[1,0]\\[0,1]\\[2,0]\\[1,1]\\[0,2]\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & & & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & & \\ 1 & -1 & \\ 1 & & -1 \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1\end{bmatrix},\ LM(2D)=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1\end{bmatrix}-$$

$$-\begin{bmatrix} & 1 & 1 & & & \\ 1 & & & 1 & 1 & \\ 1 & & & & 1 & 1 \\ & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & & \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} & & & 1 & & \\ & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & 1 \\ & & & & 1 & \end{bmatrix},$$

что соответствует структуре матриц $A["1"]$, $A["2"]$ ассоциированной модели. Более того: это соответствие наблюдается и в элементах 1 матрицы $IM(2D)$ и, до того, в последних трех столбцах матрицы $IH(2D)$ при последней трактовке метавершин метаграфа – гиперребер гиперграфа.

Установленные связи распространяются на dD-системы и, при надлежащих уточнениях, на некоторые другие классы дискретно-аргументных систем [1]. Этим определяется полезность использования графоструктурного моделирования в теории таких систем.

Библиографический список

1. Блюмин С.Л. Соотношения типа Кэли-Гамильтона в теории дискретно-аргументных систем // АиТ. – 1981. – № 9. – С. 133-142.
2. Блюмин С.Л. Двумерные преобразования сигналов и анализ двумерных систем. – Воронеж: ЛПИ, 1991. – 76 с.
3. Блюмин С.Л. Графоструктурное моделирование. Метаграфы и их матрицы // Вестник ЛГТУ. – 2015. – № 1(23). – С. 7-13.
4. Basu A., Blanning R. Metagraphs and Their Applications. – NY: Springer, 2007. – 172 p.
5. Bretto A. Hypergraph Theory. An Introduction. – NY: Springer, 2013. – 134 p.

Сведения об авторе

Блюмин Семён Львович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики ЛГТУ.

E-mail: sabl@lipetsk.ru

УДК 517:956

Борисов Д.И.

О МАЛОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ ОДНОГО КВАДРАТИЧНОГО PT-СИММЕТРИЧНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

В работе рассматривается квадратичный операторный пучок с малым периодическим PT-симметричным возмущением. Детально исследуется структура спектра. В частности показано, что в существенном спектре есть необычные лакуны, расположенные между малыми параболами в комплексной плоскости, и в этих лакунах могут возникать изолированные собственные значения.

Ключевые слова: PT-симметричный оператор, возмущение, спектр, возникающие собственные значения, асимптотика

Borisov D.I.

ON A SMALL PERIODIC PERTURBATION OF A QUADRATIC PT-SYMMETRIC OPERATOR PENCIL

In the work we consider a quadratic operator pencil with a small periodic PT-symmetric perturbation. We study in details the structure of the spectrum. In particular, we show that the essential spectrum contains unu-

© Борисов Д.И., 2017

sual gaps located between small parabolas in the complex plane and isolated eigenvalues can emerge in these gaps.

Keywords: PT-symmetric operator, perturbation, spectrum, emerging eigenvalues, asymptotics.

В работе рассматривается квадратичный операторный пучок на оси с малым PT-симметричным возмущением:

$$H_\varepsilon(\lambda) = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \kappa + i\varepsilon\lambda\gamma(x) - \lambda^2$$

Здесь $V(x)$ − некоторая непрерывная функция, экспоненциально убывающая на бесконечности, κ − вещественное число, ε − малый положительный параметр, $\gamma(x)$ − вещественная непрерывная 2π-периодическая функция, λ − спектральный параметр. Данный пучок рассматривается в пространстве $L_2(R)$ на области определения $W_2^2(R)$. Целью исследований является изучение структуры спектра данного пучка при малых ε.

В работе показано, что при малых ε спектр данного пучка сходится как множество к спектру предельного пучка, соответствующего $\varepsilon=0$. Спектр предельного пучка состоит только из существенной компоненты и изолированных собственных значений. Существенная часть спектра представляет собой объединение двух или четырех лучей, расположенных на вещественной и мнимой осях в комплексной плоскости. При произвольно малых положительных ε в существенном спектре возмущенного пучка возникают малые лакуны. Концы этих лакун устроены достаточно необычно. Один из концов − это точка вещественной или мнимой оси, с другой стороны − это малая парабола в комплексной плоскости. Получено асимптотическое описание формы данных парабол. Показано, что в окрестности этих парабол могут операторный пучок может иметь дополнительные изолированные собственные значения, исчезающие в пределе существенном спектре. Выведены необходимые и достаточные условия существования и отсутствия таких собственных значений, вычислено их количество и кратности, построены первых члены их асимптотических разложений. Аналогичные результаты получены и для собственных значений, сходящихся к изолированным собственным значениям предельного пучка.

Сведения об авторах

Борисов Денис Иванович, д.ф.-м.н., профессор РАН, в.н.с. ИМВЦ УНЦ РАН. E-mail: borisovdi@yandex.ru.

УДК 004.9

Буланов А.С., Хасанова С.Л.

РАЗРАБОТКА СЕТЕВОГО РЕСУРСА ПРОГРАММНОЙ ПОДДЕРЖКИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА ФАКУЛЬТЕТА МИИТ СФ БАШГУ

В работе реализован сетевой ресурс программной поддержки учебного процесса факультета МиИТ СФ БашГУ.

Ключевые слова: сетевой ресурс, html, css, JavaScript, поддержка.

Bulanov AS, Hasanova S.L.

DEVELOPMENT OF THE NETWORK RESOURCE OF THE PROGRAM SUPPORT OF THE TRAINING PROCESS OF THE MIIT FACULTY SF BASHGU

The network resource of the program support of the educational process of the faculty of the MIIT SF BashSU is realized in the work.

Keywords: network resource, html, css, JavaScript, support.

На сегодняшний день существует объективная проблема организации учебного процесса. Учебный процесс по направлениям информатика и информационные технологии напрямую зависит от программного обеспечения установленного в компьютерных классах.

Для поддержания учебного процесса необходимо современное программное обеспечение, которое к сожалению недешево. В связи с этим приходится пользоваться либо "тем что есть" пока, либо Portable версиями, либо пиратскими версиями, что крайне не желательно. Даже лицензированное программное обеспечение, если оно есть, установлено не во всех компьютерных классах – это вторая проблема при проведении учебных занятий. В связи с этим было решено создать сетевой ресурс с помощью которого решаются эти обе проблемы. И работа в компьютерных классах станет более комфортной как для педагога, так и для студентов.

© Буланов А.С., Хасанова С.Л., 2017

Для реализации сетевого ресурса сначала построим модель его содержания, затем проанализируем средства реализации. Проанализировав учебный план всех специальностей факультета математики и информационных технологий. Был составлен перечень используемого программного обеспечения на учебных занятиях. Считаем целесообразным сгруппировать данный перечень по основным разделам информатики.

Таблица 1

Предлагаемая структура

Название раздела	Перечень ПО
Раздел 1 Программирование	Pascal ABC.NET
	Turbo Pascal
	Visual Basic
	C#
	Dev-C++
	Delphi
Раздел 2. Графические пакеты	Corel Draw
	Photoshop
	Macromedia Flash
	3Ds Max
Раздел 3. Базы данных	Oracle
	SQL Server
Раздел 4. Сетевые программные средства	Perl
	Java
Раздел 5. Нейроинформатика	Visual Prolog
	NeuroPro
	Brain Maker
	Deductor
	NeuroSolutions
Раздел 6. Математические пакеты	Maple
	Matchcad
	Matlab
Раздел 7. Методика обучения информатики	Малютка
	Машина Неймана
	Кумир
	Кукарача
Раздел 8. Теоретические основы информатики	Кумир
	Машина Тьюринга

	Машина Поста
Раздел 9. Офисный пакет приложений	Microsoft Word
	Microsoft Excel
	Microsoft Outlook
	Microsoft PowerPoint
	Microsoft Access
	Microsoft InfoPath
	Microsoft OneNote
	Microsoft Visio
	Microsoft Project

Для создания сетевого ресурса были использованы следующие программные средства: HTML, CSS, JavaScript, Notepad++.

Разрабатываемый сетевой ресурс должен иметь логическую разметку и физическую связку страниц сайта, а так же расположение видимых элементов дизайна, обусловленную во-первых: стандартами разработки сайта; во-вторых для предоставления информации, а также быстрого и легкого ее поиска.

Образовательный ресурс является программной методической поддержкой реализации учебного процесса, по направлениям информатика и информационные технологии. В рамках представленной работы, реализованы девять разделов программного обеспечения (таблица 1), которые полностью охватывают все направления информационных технологий.

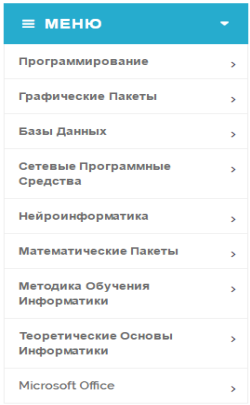


Рис 1. Меню сайта

При разработке дизайна ресурса было решено взять основу дизайна сайта СФ БашГУ. С целью дальнейшего совмещения с ним в разделе ФМиИТ.

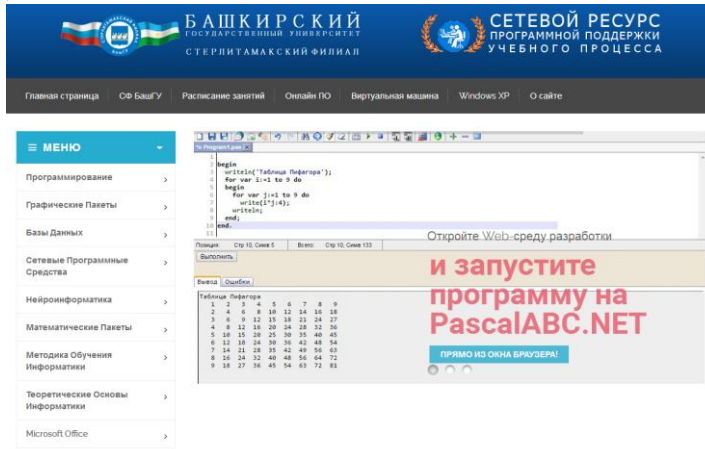


Рис. 2. Главная страница

Приведем пример работы пользователя с конкретным программным обеспечением Dev-C++. В окне 1 вводится код программы и с помощью кнопки Run компилируется код.

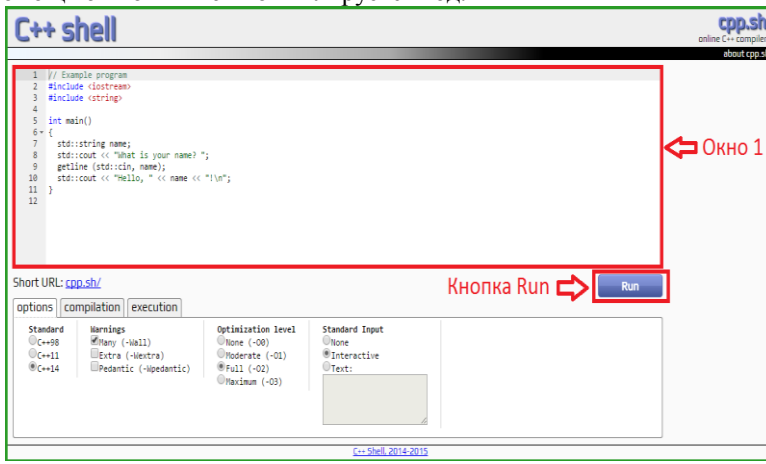


Рис. 3. Окно компилятора Dev-C++

После выполнения компиляции, в диалоговом окне программа просит ввести исходные данные задачи:

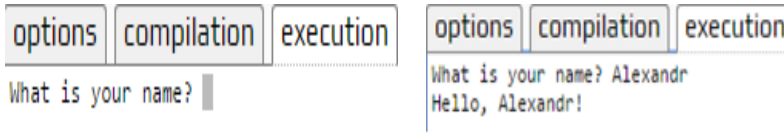


Рис. 4. Работа с программой

С помощью созданного ресурса студенту предоставляется возможность использования программного обеспечения официальных разработчиков. Без закупки лицензионного программного обеспечения, что повышает эффективность учебных занятий.

Библиографический список

1. Дуванов А. А. Web-конструирование. – Петербург, 2009. – 384 с.
2. Едомский Ю. Е. Техника Web-дизайна для студента. – Петербург, 2010. – 491 с.
3. Крамер Э. HTML: наглядный курс Web-дизайна. – Киев, 2009. – 304 с.
4. Основы CSS и HTML: [Электронный ресурс]. – http://www.web-lesson.ru (дата обращения: 1.03.2014)
5. Создание сайтов: HTML: [Электронный ресурс].
6. Создание страниц сайта с помощью HTML: [Электронный ресурс].

Сведения об авторах

Буланов Александр Сергеевич, студент СФ БашГУ.
E-mail: peugeotr@yandex.ru
Хасанова Светлана Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ.
E-mail: hasanovasl@rambler.ru

УДК 517.51

Буренков В.И., Нурсултанов Е.Д., Чигамбаева Д.К.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ

В работе доказана ограниченность риссовских потенциалов и сингулярных операторов в пространствах типа Морри.

Ключевые слова: пространства типа Морри, оператор Рисса, сингулярный оператор.

Burenkov V.I., Chigambayeva D.K., Nursultanov E.D.

BOUNDEDNESS OF SOME CLASSICAL OPERATORS ON MORREY-TYPE SPACES

In this paper we prove the boundedness in the introduced Morrey-type spaces of the Riesz potential and singular integral operator.

Key words: Morrey-type spaces, Riesz operator, singular operator.

Классические пространства Морри и их обобщения возникли в связи с некоторыми вопросами теории дифференциальных уравнений и теории вариации. В дальнейшем пространства Морри нашли широкое применение в теории уравнений Навье-Стокса и Шрёдингера. Имеется множество книг и обзоров статей, посвященных пространствам Морри и их приложениям. См. [2].

Пусть $0 < p \leq \infty$ и $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$. Пространства Морри M_p^λ были определены Чарльзом Морри [4] в 1938 г. и определялись как пространства всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$\|f\|_{M_p^\lambda} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty ,$$

где $B(x,r)$ – открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Если $\lambda = 0$, то $M_p^0 = L_p(\mathbb{R}^n)$, а если $\lambda = \frac{n}{p}$, то $M_p^{\frac{n}{p}} = L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Если $\lambda < 0$ или $\lambda > \frac{n}{p}$, то $M_p^\lambda = \Theta$, где Θ – множество всех функций эквивалентных нулю на $\mathbb{R}^n$.

Определим обобщенные пространства типа Морри $M_{p,q}^\lambda(\Omega)$ как пространства всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ с конечной квази-нормой

© Буренков В.И., Нурсултанов Е.Д., Чигамбаева Д.К., 2017

$$\|f\|_{M^{\lambda}_{p,q}(\Omega)} = \left(\int_0^{\infty} \left(t^{-\lambda} \sup_{x \in \Omega} \|f\|_{L_p(B(x,t))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}},$$

если $0 < p < \infty,\ 0 < q \leq \infty, 0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$. Заметим, что в случае $p = \infty$ пространство $M^{\lambda}_{p,q}(\Omega) = \Theta$. Также отметим, что введенные пространства совпадают с классическими пространствами Морри в случае $q = \infty$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$, т.е.

$$M^{\lambda}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) = M^{\lambda}_p.$$

Если $\Omega = \{x\}$ – одноточечное множество, то

$$M^{\lambda}_{p,q}(\Omega) = LM^{\lambda}_{p,q,x},$$

где $LM^{\lambda}_{p,q,x}$ – локальные пространства типа Морри [3].

Пусть $f \in L_1^{loc}$. В данной работе мы изучаем оценки нормы оператора Рисса, который определяется следующим образом

$$I_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)dy}{|x-y|^{n-\gamma}},\quad 0 < \gamma < n.$$

Хорошо известно классическое неравенство Харди-Литлвуд-Соболева. Пусть

$$1 < p < q < \infty \text{ и } \quad \gamma = \frac{n}{p} - \frac{n}{q},$$

тогда оператор I_γ ограничен из L_p в L_q.

Ограниченность оператора Рисса в классических пространствах Морри и их обобщений была получена в работе Адамса [1] и др. В данной работе мы также исследуем ограниченность оператора Рисса в пространствах типа Морри.

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ 1 < p < q < \infty,\ 0 < \tau \leq \infty,$ $0 < \nu \leq \lambda < \frac{n}{q}$ и $\gamma = \frac{n}{p} - \frac{n}{q} + \lambda - \nu > 0$. Если $f \in M^{\nu}_{p,\tau}(\Omega)$, то $I_\gamma f \in M^{\lambda}_{q,\tau}(\Omega)$ и верно следующее неравенство

$$\|I_\gamma f\|_{M^{\lambda}_{q,\tau}(\Omega)} \leq c\|f\|_{M^{\nu}_{p,\tau}(\Omega)}.$$

В данной работе мы также исследуем ограниченность оператора Кальдерона-Зигмунда. Результат ограниченности различных классов данного оператора из пространства Лебега L_p в L_p при $1 < p < \infty$ был установлен в работе Стейна [5] и др.

Определение 1. Пусть $1 \leq a < b \leq \infty$. Линейный оператор T назовем (a, b) – сингулярным, если

1) оператор T ограничен из $L_p(\mathbb{R}^n)$ в $L_p(\mathbb{R}^n)$ для всех $a < p < b$;

2) существует измеримая функция K в $\mathbb{R}^n$, такая что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|K(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^n}$$

и для произвольной финитной, локально интегрируемой функции f с компактным носителем имеет место представление

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy \quad \text{почти всюду на } \mathbb{R}^n \backslash suppf.$$

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \le a < b \le \infty$ и оператор $T - (a,b)$ - сингулярный. Тогда для $p \in (a,b), 0 < \nu < \frac{n}{p}, 0 < \tau \le \infty$ оператор T ограничен из $M^{\nu}_{p,\tau}(\Omega)$ в $M^{\nu}_{p,\tau}(\Omega)$.

Библиографический список

1. Adams D.R. A note on Riesz potentials // Duke Math., 1975.– № 42. – P. 765-778.

2. Burenkov V.I. Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces II // Eurasian Mathematical Journal, 2013. – № 4 (1). – P. 21-45.

3. Burenkov V.I., Guliyev H.V., Guliyev V.S. Nessesary and sufficient conditions for boundedness of the fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces // Doklady Ross. Akad. Nauk. Matematika, 2006. – № 409. – P. 443-447.

4. Morrey C.B. On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc., 1938. – № 43. – P. 126-166.

5. Stein E.M. Harmonic analysis: Real variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals // Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

Сведения об авторах

Буренков Виктор Иванович, доктор физико-математических наук, профессор Кардиффского университета
E-mail: burenkov@cardiff.ac.uk

Нурсултанов Ерлан Даутбекович, доктор физико-математических наук, профессор Казахстанского филиала Московского государственного универсритета имени М.В. Ломоносова E-mail: er-nurs@yandex.ru

Чигамбаева Диана Кабдушевна, PhD, старший преподаватель Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева
E-mail: d.darbaeva@yandex.ru

УДК 517.95

Вагапов В.З.

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ В ПОЛУПОЛОСЕ

Для уравнения эллиптико-гиперболического типа с двумя перпендикулярными линиями степенного вырождения методом спектральных разложений установлен критерий единственности решения первой граничной задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа с двумя линиями вырождения, задача Дирихле, критерий единственности решения, полуполоса.

Vagapov V.Z.

CRITERION OF UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE EQUATION OF THE MIXED TYPE WITH TWO LINES OF DEGENERATION IN THE SEMI-STRIP

For the equation of elliptiko-hyperbolic type with two perpendicular lines of sedate degeneration the method of spectral decomposition has established criterion of uniqueness of the solution of the first boundary task.

Keywords: the equation of the mixed type with two lines of degeneration, Dirichlet problem, criterion of uniqueness of the decision, a semi-strip.

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu(x,t) \equiv K(t)u_{xx} + x^m u_{tt} - b^2 x^m K(t)u = 0 \qquad (1)$$

в бесконечной прямоугольной области $D = \{(x,t) \mid 0 < x < 1,\ t > -\alpha\}$, где $K(t) = (sgn\, t)\,|t|^n$, $n > 0$, $b \geq 0$, $\alpha > 0$ и $b > 0$ – заданные действительные числа.

Задача Дирихле. Найти в области D ограниченную функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\left(D_+ \cup D_-\right); \qquad (2)$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \qquad (3)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad -\alpha \leq t < +\infty; \qquad (4)$$

© Вагапов В.З., 2017

$$u(x,-\alpha)=\psi(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{5}$$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, причём $\psi(0)=\psi(1)=0$, $D_+ = D\cap\{t>0\}$, $D_- = D\cap\{t<0\}$.

Ранее задача Трикоми для уравнения (1) при $b=0$ изучалась в работах [1, 2] в известной классической области, где методом экстремума доказана единственность решения, а существование проведено методом интегральных уравнений при всех $m=n>0$. Обзор работ, посвященных данному направлению исследований, приведен в монографии [3].

В работах [4, 5] исследована задача (2) – (5) для уравнения (1) при $m=0$ в прямоугольной области и полуполосе и методами спектрального анализа установлен критерий единственности, решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье.

В данной статье на основании этих работ установлен критерий единственности решения задачи (2) – (5) при всех $n,\ m>0$, не обязательно равных.

Рассмотрим функции

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)x^m X_k(x)dx,\ \ k=1,2,\dots\ , \tag{6}$$

где $X_k(x)=J_{\frac{1}{2l}}\left(d_k x^l\right)$ являются решениями спектральной задачи:

$$X''(x)+\mu_k\ X(x)x^m=0,\ 0<x<1, \tag{7}$$

$$X(0)=X(1)=0, \tag{8}$$

$\mu_k=\left(d_k l\right)^2$, $k=1,2,\dots,\ 2l=m+2,\quad d_k$ – k - й корень уравнения $J_{\frac{1}{2l}}(d)=0$.

На основании (6) введем функции

$$u_{k,\varepsilon}(t)=\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,t)x^m X_k(x)dx,\ \ k=1,2,\dots\ , \tag{9}$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Поскольку функции $X_k(x)$ удовлетворяют уравнению (7), то отсюда выразим $x^m X_k(x) = -\frac{1}{\mu_k} X_k^{//}(x)$ и подставим в (9):

$$u_{k,\varepsilon}(t) = -\frac{1}{\mu_k} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,t) X_k^{//}(x) dx . \qquad (10)$$

Интегрируя по частям интеграл (10) два раза и используя уравнение (1) при $t \neq 0$, получим

$$u''_{k,\varepsilon}(t) - \left(b^2 + \mu_k\right) K(t) u_{k,\varepsilon}(t) - K(t)\left[u(1-\varepsilon,t) X_k'(1-\varepsilon) - u(\varepsilon,t) X_k''(\varepsilon) - \right.$$
$$\left. - u_x(1-\varepsilon,t) X_k(1-\varepsilon) + u_x(\varepsilon,t) X_k(\varepsilon)\right] = 0 . \qquad (11)$$

Переходя в (11) к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом условий (4) и (8), получим, что $u_k(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u_k''(t) - \left(b^2 + \mu_k\right) K(t) u_k(t) = 0, \quad t \in [-\alpha, +\infty],$$

решение которого, удовлетворяющее условиям задачи Дирихле, определяется по формуле

$$u_k(t) = \begin{cases} b_k \sqrt{t}\, K_{\frac{1}{2q}}\left(p_k t^q\right), & t > 0, \\ b_k \sqrt{-t}\, \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k (-t)^q\right), & t < 0, \end{cases} \qquad (12)$$

где b_k – произвольные постоянные,

$$\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k (-t)^q\right) = \frac{\pi}{2\sin(\pi/2q)} \left[J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k (-t)^q\right) + J_{-\frac{1}{2q}}\left(p_k (-t)^q\right)\right],$$

$J_{\frac{1}{2l}}(z)$ – функция Бесселя первого рода, $K_{\frac{1}{2q}}(z)$ – модифицированная функция Бесселя третьего рода.

Для нахождения постоянных b_k воспользуемся граничным условием (5) и формулой (6):

$$u_k(-\alpha)=\int_0^1 u(x,-\alpha)x^m X_k(x)dx=\int_0^1 \psi(x)x^m X_k(x)dx=\psi_k. \qquad (13)$$

Тогда из (12) и (13) при условии

$$\delta_k(\alpha)=\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\neq 0 \qquad (14)$$

имеем

$$b_k=\frac{\psi_k}{\delta_k(\alpha)\sqrt{\alpha}}. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (12), найдем окончательный вид функций $u_k(t)$:

$$u_k(t)=\begin{cases}\psi_k\sqrt{\dfrac{t}{\alpha}}\,\dfrac{K_{\frac{1}{2q}}\left(p_k t^q\right)}{\delta_k(\alpha)}, & t>0,\\ \psi_k\sqrt{\dfrac{-t}{\alpha}}\,\dfrac{\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k(-t)^q\right)}{\delta_k(\alpha)}, & t<0.\end{cases} \qquad (16)$$

Пусть теперь $\psi(x)\equiv 0$ и выполнено условие (14). Тогда из равенств (13) и (16) следует, что $u_k(t)\equiv 0$ при всех $k\in N$. Учитывая это, получим

$$\int_0^1 u(x,t)x^m X_k(x)dx=0,\ \ k=1,2,\dots\ .$$

Отсюда, в силу полноты системы $X_k(x)=J_{\frac{1}{2l}}\left(d_k x^l\right)$ в пространстве $L_2[0,1]$ с весом x^m, следует, что $u(x,t)=0$ почти для всех $x\in[0,1]$ и при любом $t\in[-\alpha,+\infty)$. Поскольку $u(x,t)\in C\left(\overline{D}\right)$, то $u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть теперь при некоторых α и $k=s\in N$ нарушено условие (14), т.е. $\delta_s(\alpha)=0$. Тогда однородная задача (2) – (5) (где $\psi(x)\equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_s(x,t)=\begin{cases}\sqrt{t}\,K_{\frac{1}{2q}}\left(p_s t^q\right)X_s(x), & t>0,\\ \sqrt{-t}\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_s(-t)^q\right)X_s(x), & t<0.\end{cases}$$

Таким образом, установлен следующий критерий единственности.

Теорема. *Если существует решение* $u(x,t)$ *задачи (2) – (5), то оно единственно тогда и только тогда, когда* $\delta_k(\alpha)\neq 0$ *при всех* $k\in N$.

Библиографический список

1. Сабитов К.Б., Карамова А.А., Шарафутдинова Г.Г. К теории уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения // Изв. вузов. Математика. 1999. – № 11. – С. 70–80.

2. Сабитов К.Б., Шарафутдинова Г.Г. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения // Дифференц. уравнения. 2003. – Т. 39. – № 6. – С. 788–800.

3. Сабитов К.Б., Биккулова Г.Г., Гималтдинова А.А. К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа. Уфа: Гилем, 2006. – 150 с.

4. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН, 2007. – Т. 413. – № 1. – С 23–26.

5. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в полуполосе // Дифференц. уравнения. 2007. – Т. 43. – № 10. – С. 1417–1422.

Сведения об авторе

Вагапов Винер Зуфарович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа СФ БашГУ.
E-mail: vagapov_vz@rambler.ru.

УДК 550.837.3

Викторов С.В.

МЕТОД ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СРЕДЕ

В работе рассматривается метод для решения задач математической физики с уравнениями эллиптического типа, описывающими стационарные электрические поля. Предложенный алгоритм позволяет ускорить поиск решения задач электроразведки в кусочно-однородных средах, аналитическое решение которых отсутствует.

Ключевые слова: прямая задача электроразведки, комбинированный метод интегральных преобразований и интегральных уравнений, кусочно-однородная среда.

Viktorov S.V.

METHOD OF PARALLEL CALCULATION OF THE TASK ABOUT THE FIELD DIRECT ELECTRIC CURRENT IN TO THE AXISYMMETRIC ENVIRONMENT

In work the method for the solution of problems of mathematical physics with the equations of elliptic type describing stationary electric fields is considered. The offered algorithm allows to accelerate search of the solution of problems of electroinvestigation in piecewise homogeneous environments which analytical solution is absent.

Keywords: a direct problem of electroinvestigation, the combined method of integrated transformations and the integrated equations, a piecewise homogeneous environment.

Прямые задачи геоэлектрики, описывающие распределение постоянных электрических полей, приводят к стационарной модели потенциального электрического поля. Она представляет собой внешнюю краевую задачу для дифференциальных уравнений второго порядка. При численном решении таких задач требуются значительные вычислительные ресурсы ЭВМ. Вычислительные программы, построенные на основе классических последовательных алгоритмов, в такой ситуации становятся малоэффективными из-за больших временных затрат на вычисления. Потребность в быстрых параллельных алго-

© Викторов С.В., 2017

ритмах для существующих методов решения задач обуславливает актуальность вопроса их разработки.

Среди основных групп методов решения прямых задач электроразведки широкое распространение получили комбинированные методы, основанные на сочетании интегральных преобразований Фурье и интегральных уравнений теории потенциала. Они применяются для решения краевых задач электроразведки в случае моделей осесимметричных сред, описанных в соответствующих криволинейных системах координат. Применяя интегральное преобразование Фурье получены явные формулы расчета параметров стационарного электрического поля в виде ряда [1], вычисление которого хорошо поддается распараллеливанию.

Рассмотрим допускающий распараллеливание вычислений алгоритм расчета потенциального поля точечного источника постоянного электрического тока в осесимметричной кусочно-однородной среде с проводящим включением на основе комбинированного метода [2].

Учет в математических моделях осесимметричных сред обусловлен тем, что большинство исследуемых включений, с некоторой степенью достоверности, могут быть представлены телами вращения, и в качестве вмещающих пространств в этом случае удобнее рассматривать осесимметричные среды, ось вращения которых совпадает с осью вращения включения. В этом случае к задаче применимы интегральные методы решения, которые допускают параллелизм [3].

Пусть Ω – кусочно-однородное и изотропное по удельной электрической проводимости полупространство, состоящее из конечного числа слоев $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_N$ с удельными электрическими проводимостями $\sigma_1,\ldots,\sigma_N$, обладает осевой симметрией поля, возбуждаемого в точке $A(x_0,0,z_0)$ точечным источником постоянного электрического тока интенсивности I. В *k*-ом слое вмещающего полупространства Ω содержится осесимметричное проводящее включение Ω_V с удельной электрической проводимостью σ_V. Данное включение может аппроксимировать рудные дайки или нефтяные линзы, принимающие нередко (учитывая осадочные отложения пород) форму близкую к телам вращения (рис. 1).

Математическая модель, описывающая потенциальное поле точечного источника, размещенного в слое Ω_l, σ_l представляется в виде следующей краевой задачи эллиптического типа:

$$\Delta u_i(P)=\begin{cases}-\dfrac{I}{\sigma_l}\delta(x-x_0)\delta(y)\delta(z-z_0),i=l;\\ 0,\ i\neq l,\quad i=\overline{1,N},\end{cases} \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u_1(P)}{\partial z}\right|_{z=0}=0; \tag{2}$$

$$u_i(P)\big|_{z=z_i}=u_{i+1}(P)\big|_{z=z_i};\ \ \sigma_i\left.\frac{\partial u_i(P)}{\partial n}\right|_{z=z_i}=\sigma_{i+1}\left.\frac{\partial u_{i+1}(P)}{\partial n}\right|_{z=z_i},\ i=\overline{1,N-1}; \tag{3}$$

$$u_V(P)\big|_S=u_k(P)\big|_S;\ \ \sigma_V\left.\frac{\partial u_V(P)}{\partial n}\right|_S=\sigma_k\left.\frac{\partial u_k(P)}{\partial n}\right|_S; \tag{4}$$

$$u_i(P)\to 0,\ \ P\to\infty,\ i=\overline{1,N}, \tag{5}$$

где Δ – оператор Лапласа, $u_i(P)$ – искомая функция потенциала поля в i-ой области ($P(x,y,z)\in\Omega_i$, $i=\overline{1,N}$), $z=z_i$ – нижняя граница слоя Ω_i ($i=\overline{1,N-1}$), плоскость $z=0$ определяет «дневную» поверхность, $\delta(P-A)$ – описывающая источник функция Дирака, n – единичный вектор внешней нормали к поверхности S (границе включения).

В случае сложной формы включения Ω_V его поверхность S аппроксимируется параметрическим сплайном.

Решение задачи (1) – (5) построим комбинированным методом, основанном на сочетании методов интегральных Фурье-преобразований и интегральных уравнений теории потенциала [4].

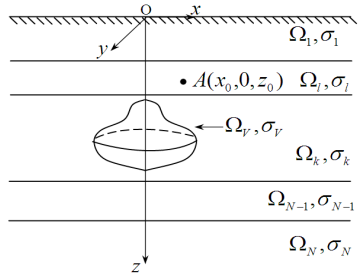


Рис. 1. Осесимметричное включение в слоистом полупространстве

Для рассматриваемого случая осесимметричной среды решение задачи (1) – (5) удобнее искать в цилиндрической системе координат (r,φ,z) с полуплоскостью $\varphi=0$, содержащей источник тока.

Комбинированный метод позволяет найти решение в два этапа. На первом этапе трехмерную задачу (1) – (5) переведем в цилиндрическую систему координат и, применяя конечное косинус преобразованием Фурье по переменной φ с целым параметром *m*, представим в виде семейства двумерных задач:

$$u_i^m(r,z)=\int_0^{\pi} u_i(r,\varphi,z)\cos m\varphi\, d\varphi,\quad i=\overline{1,N}.$$

Для восстановления решение в трехмерном виде применяется формула обратного преобразования:

$$u_i(r,\varphi,z)=\frac{1}{\pi}u_i^0(r,z)+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}u_i^m(r,z)\cos\, m\varphi,\ i=\overline{1,N}. \qquad (6)$$

Параметрическое семейство (по целому параметру *m*=0,1,2,…) двумерных краевых задач относительно коэффициентов Фурье $u^m(r,z)$ разложения искомой функции $u(r,\varphi,z)$ в ряд (6) определяется следующим образом:

$$\tilde{L}[u_i^m]=\frac{\partial^2 u_i^m}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_i^m}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_i^m}{\partial z^2}-\frac{m^2}{r^2}u_i^m,\ i=\overline{1,N}$$

$$\tilde{L}[u_i^m]=\begin{cases}-\dfrac{I}{4r_0\sigma_l}\delta(r-r_0)\,\delta(z-z_0),\ i=l,\tilde{P}(r,z)\in\tilde{\Omega}_l;\\ 0,\ i\neq l,\ \tilde{P}(r,z)\notin\tilde{\Omega}_l\end{cases} \qquad (7)$$

$$u_i^m\Big|_{z=z_i}=u_{i+1}^m\Big|_{z=z_i},\ \sigma_i\frac{\partial u_i^m}{\partial n}\Big|_{z=z_i}=\sigma_{i+1}\frac{\partial u_{i+1}^m}{\partial n}\Big|_{z=z_i},\ i=\overline{1,N-1}; \qquad (8)$$

$$u_v^m\Big|_{\tilde{S}}=u_k^m\Big|_{\tilde{S}},\quad \sigma_v\frac{\partial u_v^m}{\partial n}\Big|_{\tilde{S}}=\sigma_k\frac{\partial u_k^m}{\partial n}\Big|_{\tilde{S}}; \qquad (9)$$

$$u_i^m\to 0,\quad \tilde{P}\to\infty,\ i=\overline{1,N}, \qquad (10)$$

где области $\widetilde{\Omega}_i$ и граница $\widetilde{S}$ соответственно получены сечением областей Ω_i и границы S плоскостью $\varphi = const$, на которой приемник определяется точкой $\widetilde{P}(r,z)$.

Второй этап, основанный на теории потенциала простого (V) и двойного (W) слоев, позволяет свести решение двумерных задач (8)–(10) расчета коэффициентов $u^m(r,z)$ к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно плотности «вторичных» зарядов (μ), которые выделяются на границе включения:

$$u_i^m(\widetilde{P}) = W^m(\widetilde{P}) + V^m(\widetilde{P}),\ i = \overline{1,N},\ \widetilde{P}(r,z) \notin \widetilde{\Omega}_V;$$

$$u_V^m(\widetilde{P}) = \frac{\sigma_k}{\sigma_V}(W^m(\widetilde{P}) + V^m(\widetilde{P})),\ \widetilde{P}(r,z) \in \widetilde{\Omega}_V,$$

где $V^m(\widetilde{P}) = \dfrac{I}{2\sigma_l} G^m(\widetilde{P},\widetilde{A});\quad W^m(\widetilde{P}) = \int\limits_S \mu^m(\widetilde{Q}) r_Q \dfrac{\partial G^m(\widetilde{P},\widetilde{Q})}{\partial \widetilde{n}_{\widetilde{Q}}} dS_{\widetilde{Q}}$.

Здесь $\mu^m(\widetilde{Q})$ – неизвестная плотность двойного слоя на образующей $\widetilde{S}$, определяемая из интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\mu^m(\widetilde{P}) - 2\frac{\sigma_k - \sigma_V}{\sigma_k + \sigma_V} \int\limits_{\widetilde{S}} \mu^m(\widetilde{Q}) r_{\widetilde{Q}} \frac{\partial G^m(\widetilde{P},\widetilde{Q})}{\partial n_{\widetilde{Q}}} dS_{\widetilde{Q}} = \frac{\sigma_k - \sigma_V}{\sigma_k + \sigma_V} \cdot \frac{I}{\sigma_l} G^m(\widetilde{P},\widetilde{A}), \quad (11)$$

где $\widetilde{P}(r,z),\ \widetilde{Q}(r_Q, z_Q) \in \widetilde{S}$;

Функции точечного источника $G^m(\widetilde{P},\widetilde{Q})$ определяется функцией Грина горизонтально-слоистой среды, которая получена методом «фиктивных границ» [1].

Таким образом, найденные через μ^m и $G^m(\widetilde{P},\widetilde{Q})$ функции $W^m(\widetilde{P})$ и $V^m(\widetilde{P})$ позволяют найти коэффициенты $u_i^m(\widetilde{P})$ слагаемых ряда (6). Эти коэффициенты являются независимыми для различных значений параметра m, и следовательно могут быть вычислены параллельно. В итоге искомое решение редуцируется формулой (6). Интегральные уравнения (11) разрешаются численно методом квадратур, путем сведения решения к параллельному вычислению системы линейных алгебраических уравнений. Таким образом, рассмотренная задача решается на основе декомпозиции существующих последова-

тельных алгоритмов. Ранее в работах [5, 6] приводились результаты вычислительных экспериментов на основе применения комбинированного метода решения, реализованного на использовании последовательных алгоритмов.

Библиографический список

1. Кризский В.Н., Викторов С.В., Спивак С.И. Задача поиска аппроксимированной сплайном границы локального включения в кусочно-однородной среде по данным электроразведки постоянным током // Труды Средневолжского математического общества. 2003. – Т. 5. – № 1. – С. 176-185.

2. Викторов С.В. Комбинированный метод решения задачи электрокаротажа вертикальной скважины // Журнал Средневолжского математического общества, 2011. – Т. 13. – № 2. – С. 57-62.

3. Викторов С.В. Параллельный алгоритм комбинированного метода решения прямой задачи о поле точечного источника в осесимметричной среде с включением // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы V Всероссийской научно-практической конференции, приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – С. 101–107.

4. Викторов С.В. Параллельный метод вычисления стационарного электрического поля в изотропной среде // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы IV Всерос. науч.-практ. конф., посвященной 75-летию физико-математического факультета, 16-19 декабря 2015 г., г. Стерлитамак / под общ. ред. С.А. Мустафиной. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2015. – С. 31-38.

5. Викторов С.В., Гаврилов А.К. Математическое моделирование задачи электрокаротажа вертикальной скважины // Математическое моделирование процессов и систем: Сборник трудов III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2014. – С. 18–23.

6. Шамсутдинова Г.Р., Викторов С.В. Решение обратной задачи определения формы фрагмента цилиндрического включения // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2016): материалы Международной конференции и молодёжной школы. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)»; Институт систем обработки изображений РАН, 2016. – С. 781–785.

Сведения об авторах

Викторов Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Стерлитамакского филиала БашГУ. E-mail: viktorov@rambler.ru.

УДК 519.6

Викторов С.В., Ибрагимова А.Р.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

В работе рассматривается математическая модель и решение обратной задачи поиска деформированных участков прямого цилиндра в трехслойном полупространстве методами электроразведки.

Ключевые слова: прямая и обратная задача электроразведки, метод интегральных представлений, метод конфигурации, функция Грина, краевая задача.

Viktorov S.V., Ibragimova A.R.

MATHEMATICAL MODEL OF THE FIELD OF THE DOT SOURCE IN THE ISOTROPIC ENVIRONMENT WITH CYLINDRICAL INCLUSION

In work the mathematical model and the solution of the return problem of search of the deformed sites of the direct cylinder in a three-layer half-space is considered by electroinvestigation methods.

Keywords: direct and return problem of electroinvestigation, method of integrated representations, configuration method, Green's function, regional task.

Задачи электроразведки потенциальными полями постоянного электрического тока являются актуальными в разведочной геофизике. Большинство исследуемых протяженных неоднородностей в среде проводящей ток, с некоторой степенью достоверности, могут быть представлены бесконечными цилиндрами. Геоэлектрический разрез, учитывающий осадочные отложения пород, осложнен неоднородностями, в том числе, принимающими форму близкую к бесконечно протяженным цилиндрическим телам.

© Викторов С.В., Ибрагимова А.Р., 2017

В том случае, если в качестве вмещающих пространств рассматривать плоскостно-симметричные среды, в которых источник постоянного электрического тока не принадлежит общей плоскости симметрии, то задача становится квазитрехмерной (когда в симметричной среде возникает асимметричное относительно оси вращения потенциальное поле тока).

Рассмотрим задачу о поле точечного источника в однородной изотропной среде, содержащей протяженное включение цилиндрической формы (рис.1).

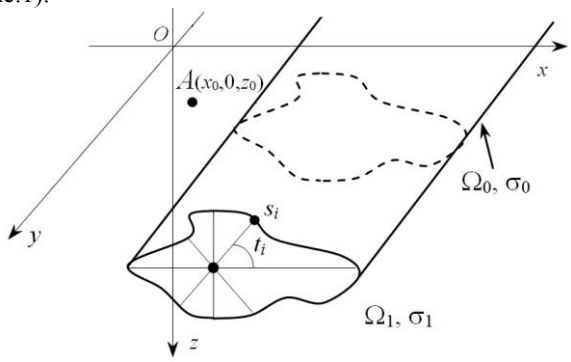


Рис.1. Цилиндрическое включение в однородном пространстве

Пусть в однородном изотропном пространстве Ω_1 с удельной электрической проводимостью σ_1 параллельно оси *Oy* расположено протяженное включение цилиндрической формы Ω_0 с удельной электрической проводимостью σ_0. Математическая модель задачи, описывающая потенциальное поле точечного источника постоянного тока интенсивности I, возбуждаемого в точке $A(x_0,0,z_0)$ среды Ω_1, представляет собой краевую задачу эллиптического типа:

$$\Delta u_1(P) = -\frac{I}{2\sigma_1}\delta(x-x_0)\delta(y)\delta(z-z_0),\ P(x,y,z)\in\Omega_1; \qquad (1)$$

$$\Delta u_0(P) = 0,\ P(x,y,z)\in\Omega_0; \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial u_1(P)}{\partial z}\right|_{z=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial u_i(P)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,\ i=\overline{0,1}; \qquad (3)$$

$$u_0(P)\big|_S = u_1(P)\big|_S; \quad \sigma_0 \frac{\partial u_0(P)}{\partial n}\bigg|_S = \sigma_1 \frac{\partial u_1(P)}{\partial n}\bigg|_S; \tag{4}$$

$$u(P) \to 0, \quad P \to \infty \tag{5}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, условия (3) следуют из симметрии поля относительно плоскостей $z = 0$ и $y = 0$, условия (4) определяют непрерывность функции $u(P)$ – потенциала и $\sigma \frac{\partial u_0(P)}{\partial n}$ – плотности тока на границе S раздела двух сред, условие (5) – условие регулярности решения на бесконечности.

Границу включения S зададим в параметрическом виде: $S = S\big(\zeta(\vec{s},t), y\big),\ t \in [0, 2\pi),\ y \in [0, \infty)$, где $\zeta(\vec{s},t)$ – сечение образующей цилиндрического тела S. Конечномерный вектор $\vec{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_L)$ с ограниченными коэффициентами $m_i \le s_i \le M_i,\ i = \overline{0, L}$ определяет кубический сплайн, заданный в параметрическом виде, где s_i – расстояние от оси цилиндрического тела до кривой ζ на луче $t = t_i$ (см. рис. 1). Сплайн с фиксированными граничными условиями однозначно определяется вектором значений $\{s_0, s_1, \ldots, s_L\}$ в узлах сетки $\{t_0, t_1, \ldots, t_L\}$. При таком описании границы S заданного включения Ω_0, декартовые координаты в плоскости xOz любой ее точки определяются в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \zeta(\vec{s},t) \cdot \cos t \\ z = -\zeta(\vec{s},t) \cdot \sin t + z_v \end{cases},$$ где z_v – значение аппликаты оси цилиндрического тела (глубина залегания включения).

Решение прямой задачи (1) – (5) осуществлялось комбинированным методом интегральных преобразований и интегральных уравнений, в соответствии с которым строится семейство двумерных задач в результате применения интегрального преобразования Фурье и решение задачи представляется в виде суммы потенциала источника и потенциала двойного слоя [1, 2]:

$u_1^{\lambda}(\tilde{P}) = W^{\lambda}(\tilde{P}) + V^{\lambda}(\tilde{P}),\ \tilde{P} \in \tilde{\Omega}_1,\ u_0^{\lambda}(\tilde{P}) = c \cdot \big(W^{\lambda}(\tilde{P}) + V^{\lambda}(\tilde{P})\big),\ \tilde{P} \in \tilde{\Omega}_0,$
$\tilde{P}(x,z),\ \tilde{Q}(x_Q, z_Q) \in \tilde{S},\ \tilde{A}(x_0, z_0)$.

Здесь $\lambda \in [0,\infty)$ – параметр Фурье-преобразования; области $\tilde{\Omega}_0, \tilde{\Omega}_1$ и граница $\tilde{S} = \zeta$ получены сечением областей Ω_0, Ω_1 и границы S_0 плоскостью $y = const$; $c = \sigma_1/\sigma_0$; $V^{\lambda}(\tilde{P}) = \frac{I}{4\sigma_1} G^{\lambda}(\tilde{P}, \tilde{A})$ – потенциал источника тока в $\tilde{\Omega}_0$; $W^{\lambda}(\tilde{P}) = \int\limits_{\tilde{S}} \mu^{\lambda}(\tilde{Q}) \cdot \frac{\partial G^{\lambda}(\tilde{P}, \tilde{Q})}{\partial \tilde{n}_{\tilde{Q}}} \, d\tilde{S}_{\tilde{Q}}$ – потенциал двойного электрического слоя на кривой $\tilde{S}$ границе включения; $\mu^{\lambda}(\tilde{Q})$ – неизвестная плотность потенциала двойного слоя на $\tilde{S}$, которая определяется решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода [3]:

$$\mu^{\lambda}(\tilde{P}) - 2\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_1 + \sigma_0} \int\limits_{\tilde{S}} \mu^{\lambda}(\tilde{Q}) \frac{\partial G^{\lambda}(\tilde{P}, \tilde{Q})}{\partial n_{\tilde{Q}}} d\tilde{S}_{\tilde{Q}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_1 + \sigma_0} \cdot \frac{I}{2\sigma_1} G^{\lambda}(\tilde{P}, \tilde{A}),$$

где $\lambda \in [0,\infty)$, $\tilde{P}(x,z)$, $\tilde{Q}(x_Q, z_Q) \in \tilde{S}$. Функции $G^{\lambda}(\tilde{P}, \tilde{Q})$ – коэффициенты функции Грина $G(P,Q)$ – функции источника в однородной среде $\tilde{\Omega}_0$, которая определяется через функцию Макдональда и для случая полного пространства имеет вид:

$$G^{\lambda}(x, z, x_{\tilde{Q}}, z_{\tilde{Q}}) = \frac{1}{4\pi} K_0\left(\lambda\sqrt{(x - x_{\tilde{Q}})^2 + (z - z_{\tilde{Q}})^2}\right).$$

Изложенный метод позволяет получить численные расчеты электрического поля во всем пространстве при любых положениях источника тока, как внутри описанного включения, так и вне его. Кроме того, что предложенный метод обладает определенной универсальностью, он допускает использование параллельных вычислительных алгоритмов [4, 5].

Для поиска решения обратной задачи и проведение вычислительного эксперимента в работе [6] было реализовано программное средство для случая однородного полупространства.

Библиографический список

1. Кризский В.Н., Викторов С.В., Беляева М.Б. Математическое моделирование геоэлектрических полей в кусочно-однородных квазитрехмерных средах: Монография. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2015. – 110 с.

2. Беляева М.Б. Математическое моделирование электрических полей в цилиндрических кусочно-однородных средах со сплайн-аппроксимацией границ.– Дисс. ... к.ф.-м.н.– Стерлитамак, 2007.

3. Викторов С.В. Обратная задача определения формы границ включения в горизонтально-слоистой среде // Информация и образование: границы коммуникаций.– 2014.– № 6 (14).– С. 104-105.

4. Викторов С.В. Параллельный алгоритм комбинированного метода решения прямой задачи о поле точечного источника в осесимметричной среде с включением // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы V Всероссийской научно-практической конференции, приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – С. 101–107.

5. Викторов С.В. Параллельный метод вычисления стационарного электрического поля в изотропной среде // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы IV Всерос. науч.-практ. конф., посвященной 75-летию физико-математического факультета, 16-19 декабря 2015 г., г. Стерлитамак / под общ. ред. С.А. Мустафиной. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2015. – С. 31-38.

6. Викторов С.В., Гаврилов А.К. Математическое моделирование задачи электрокаротажа вертикальной скважины // Математическое моделирование процессов и систем: Сборник трудов III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2014. – С. 18–23.

Сведения об авторах

Викторов Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент филиала БашГУ в г. Стерлитамак. E-mail: viktorov@rambler.ru.

Ибрагимова Азалия Разилевна, магистрант 1 курса очного обучения СФ БашГУ.

E-mail: G1U9L9A5@yandex.ru.

УДК 51(072):371

Викторова Ю.В., Викторов С.В.

ИНТЕРАКТИВНЫЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ УЧАЩИХСЯ 9-Х КЛАССОВ

В работе приведено описание интерактивного электронного учебника по математике, использование которого позволяет повысить эффективность обучения математике среди учащихся девятых классов средней общеобразовательной школы.

Ключевые слова: интеракитвные средства обучения, электронный учебник, применение электронных образовательных ресурсов в процессе обучения математике.

Viktorova Yu.V., Viktorov S.V.

INTERACTIVE ELECTRONIC TEXTBOOK AS MEANS OF INCREASE IN LEARNING EFFICIENCY TO MATHEMATICS OF PUPILS OF THE 9TH CLASSES

The description of the interactive electronic textbook on mathematics which use allows to increase learning efficiency to mathematics among pupils of the ninth classes of high comprehensive school is provided in work.

Keywords: interakitvny tutorials, the electronic textbook, application of electronic educational resources in the course of training in mathematics.

Увеличение объема математического материала, повышение его абстрактности, использование различной символики, усложнение логической структуры содержания обосновывают необходимость применения в процессе обучения математике в рамках основного общего образования интерактивных электронных средств учебного назначения.

Разработанный в настоящем исследовании интерактивный электронный учебник по предмету «Алгебра 9 класс» представляет собой современный электронный образовательный ресурс, созданный с помощью инструментального программного обеспечения Embarcadero RAD Studio Delphi XE. Данный электронный учебник (ЭУ) является средством повышения эфективности обучения учащихся 9-х классов в процессе обучения математике.

© Викторова Ю.В., Викторов С.В., 2017

Выбор в качестве средства повышения эфективности обучения математике ЭУ обусловлен информационным характером современных средств обучения и их направленностью на информационно-коммуникационные технологии.

Существуют различные современные подходы к разработке электронных средств образовательного назначения, к которым можно отнести ЭУ. В настоящее время сложились три основных подхода к созданию ЭУ. Как утверждает И. В. Роберт [1], первый подход основан на использовании универсальных прикладных программных средств, второй подход предполагает написание программ с помощью языков программирования, а третий подход основан на использовании специализированных инструментальных систем для создания педагогических приложений. В настоящем исследовании был использован второй подход, рассмотрим его подробнее.

По мнению И. В. Роберт [1], в настоящее время в связи с появлением таких мощных объектно-ориентированных средств разработки, как IDE Borland Delphi и C++ Builder, Microsoft Visual Studio и др., процесс создания обучающих программ существенно упрощается. Как считает автор, программирование с помощью указанных средств сводится к разработке определенных программных объектов и их дальнейшему многоразовому использованию. Такие объекты могут осуществлять вывод графиков и векторных диаграмм, ввод и проверку ответов обучаемого, в том числе ввод и проверку формул в общем виде, моделировать реальные объекты и процессы, имитировать лабораторные стенды и т.п. Автор отмечает, что эти высокоуровневые языки программирования позволяют осуществлять разработку многооконных пользовательских приложений; создавать многофункциональные системы общего назначения; проектировать базы данных любой сложности и средств управления базами данных; разработку систем обработки текстовой, графической, видеоинформации и звука; создавать графические операционные оболочки; создавать одно- и многопользовательские интерфейсы; разрабатывать сетевые приложения; создавать мультимедийные приложения, средства их разработки и многое другое.

ЭУ, как и любое программное средство учебного назначения, должен отвечать определенным требованиям. И.В. Роберт [1] в качестве основных требований к электронным средствам образовательного назначения рассматривает следующие: психолого-педагогические, дизайн-эргономические, технические, эстетические.

Учет перечисленных требований к разработке ЭУ обусловлен его образовательной направленностью. В связи с этим все перечисленные требования положены в основу проектирования ЭУ в рамках настоящей работы.

Описываемый в настоящей работе ЭУ по алгебре для 9-х классов общеобразовательных учреждений предназначен для повышения эфективности обучения математике учащихся. Он реализован в виде многооконного приложения, главная форма которого имеет следующий вид (рис. 1).

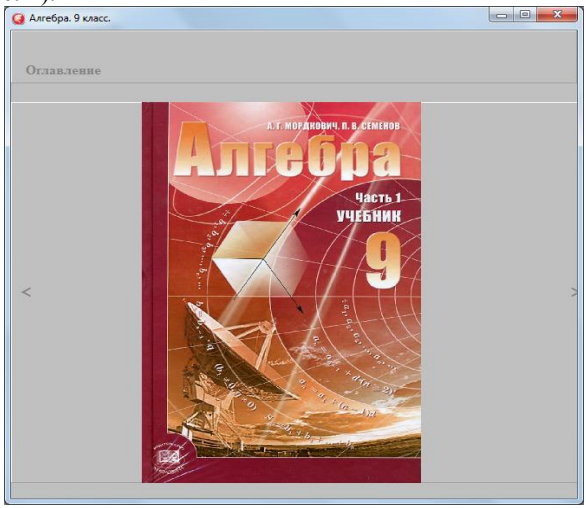


Рис. 1. Главная программная форма ЭУ

ЭУ по алгебре для учащихся 9-х классов дает возможность ознакомиться с теорией по выбранной теме предмета. Его содержание построено на основе учебного материала печатного учебника для учащихся общеобразовательных учреждений «Алгебра. 9 класс» авторов А.Г. Мордковича, П.В. Семенова [2].

Для удобства использования ЭУ, его внешний вид и оформление максимально приближены к печатному изданию. При этом он имеет удобный графический интерфейс. ЭУ снабжен удобной навигацией по своему содержанию. Учебный материал сформирован в виде отдельных электронных страниц, содержащих все необходимые интерактивные элементы управления в соответствии с предъявляемыми к их оформлению требованиями. В левой и правой частях страницы имеются «всплывающие» кнопки для их перелистывания (рис. 2). Учени-

ку при работе с учебником постоянно доступна возможность воспользоваться оглавлением, которое имеет иерархическую структуру (рис.3).

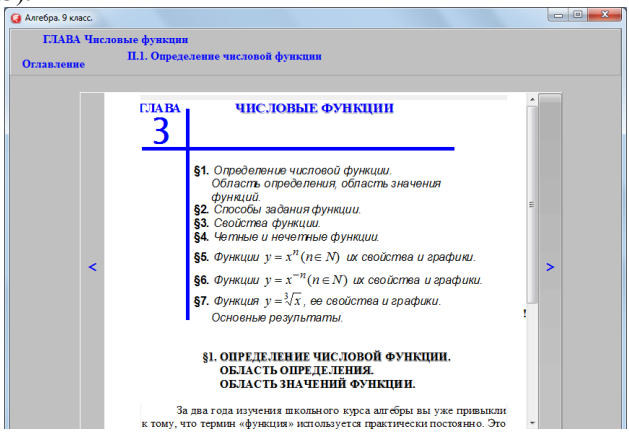


Рис. 2. Внешний вид электронной страницы учебника

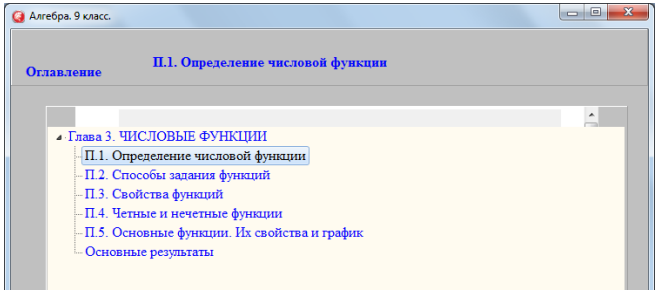


Рис. 3. Иерархическое оглавление

Интерфейс ЭУ имеет мультимедийные эффекты обработки событий: анимацию (всплывающие меню, визуальный эффект перелистывания страниц) и звуковую поддержку.

В содержании учебного материала имеются примеры для теоретического осмысления изучаемых понятий, а также решения текстовых задач. Все они реализованы в виде отдельных интерактивных приложений, которые запускаются на выполнение посредством применения гипертекстовых ссылок. Например, на рисунке 4 демонстрируется интерактивное приложение, которое наглядно в виде анимированных иллюстраций определяет понятие функции как математиче-

ской модели $y = f(x)$. Здесь важным является дополнительное формулирование числового множества, из которого берутся значения для независимой переменной x.

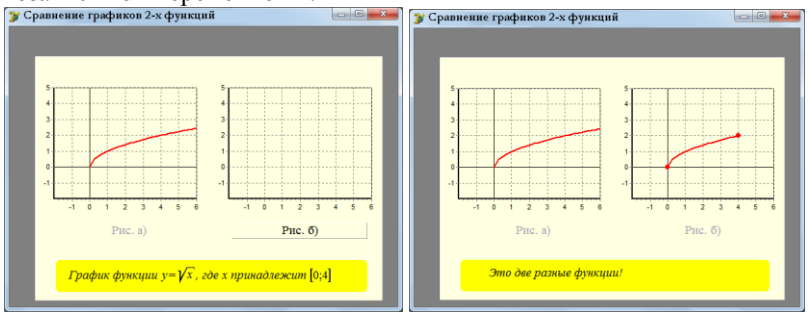


Рис. 4. Демонстрация различий в определении одноименных функций

Аналогичным образом, вводится другие определения изучаемых понятий [3], [4].

Понимание учащимися учебного материала при использовании электронных средств достигается за счет интегрированного представления информации, повышения интереса к математике на основе автоматизации решений задач различных видов, наглядного обеспечения связи математики с практической жизнедеятельностью, устранения средствами справочной системы возможных негативных ситуаций, возникающих на некоторых этапах решения задач.

Библиографический список

1. Роберт И. В. Информационные и коммуникационные технологии в образовании: учебно-методическое пособие / И.В. Роберт, С.В. Панюкова, А.А. Кузнецов, А.Ю. Кравцова; под ред. И.В. Роберт. – М.: Дрофа, 2008. – 312 с.

2. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 13-е изд. – М.: Мнемозина, 2011. – 226 с.

3. Викторова Ю.В. Электронный учебно-методический комплекс как средство формирования ИКТ – компетентности учащихся 9-х классов в процессе обучения математике / Ю.В. Викторова, С.В. Викторов // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 12. – Ч. 4. – С. 634-639.

4. Викторова Ю. В. Электронный ресурс «Электронный учебник «Квадратные уравнения»» / Ю.В. Викторова, С.В. Викторов. – М.: ФГНУ ИНИПИ РАО, ОФЭРНиО № 16404 от 17.11.2010 г.

Сведения об авторах

Викторова Юлия Владимировна, преподаватель математики и информатики колледжа СФ БашГУ. E-mail: viktorovayv@mail.ru.

Викторов Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент СФ БашГУ. E-mail: viktorov@rambler.ru.

УДК 51(072):371

Викторова Ю.В., Викторов С.В.

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В 9-ОМ КЛАССЕ

В работе приведено описание электронного учебно-методического комплекса для обучения математике учащихся 9-х классов средней общеобразовательной школы.

Ключевые слова: интеракитвные средства обучения, электронный учебно-методический комплекс, применение электронных образовательных ресурсов в процессе обучения математике.

Viktorova Yu.V., Viktorov S.V.

ELECTRONIC EDUCATIONAL AND METHODICAL COMPLEX AS THE TUTORIAL TO MATHEMATICS IN THE 9TH CLASS

The description of an electronic educational and methodical complex for training in mathematics of pupils of the 9th classes of high comprehensive school is provided in work.

Keywords: interakitvny tutorials, an electronic educational and methodical complex, application of electronic educational resources in the course of training in mathematics.

На сегоднешний день вопрос необходимости применения в образовательном процессе электронных средств учебного назначения не вызывает сомений. В процессе обучения различным дисциплинам, в том числе и математике в рамках основного общего образования, сложно обойтись без использования информационных технологий,

© Викторова Ю.В., Викторов С.В., 2017

позволяющих упростить процесс обучения на фоне увеличения объема математического материала, повышение его абстрактности, использование различной символики, усложнение логической структуры содержания.

В работе рассматривается электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК), с помощью которого учащимся предлагается выполнять различные виды учебно-познавательной деятельности, связаные с выбором индивидуальной образовательной траектории и решением информационно-познавательных задач, восприятие содержания которых определяется в соответствии с выбранной траекторией.

Разработанный ЭУМК по предмету «Алгебра 9 класс» представляет собой современный электронный образовательный ресурс, созданный с помощью инструментального программного обеспечения Embarcadero RAD Studio Delphi XE. ЭУМК является средством для обучения математике в 9-м классе.

Существуют различные современные подходы к разработке электронных средств образовательного назначения (ЭСОН), к которым можно отнести ЭУМК. В настоящее время сложились три основных подхода к созданию ЭУМК. Как утверждает И. В. Роберт [1, с. 117], первый подход основан на использовании универсальных прикладных программных средств, второй подход предполагает написание программ с помощью языков программирования, а третий подход основан на использовании специализированных инструментальных систем для создания педагогических приложений. В настоящем исследовании был использован второй подход, рассмотрим его подробнее.

ЭУМК, как и любое программное средство учебного назначения должен отвечать определенным требованиям.

И.В. Роберт [1, с. 132] в качестве основных требований к ЭСОН рассматривает следующие:

– психолого-педагогические требования, которые предполагают учитывать специфику предмета (понятийный аппарат, особенности методов исследования закономерностей), обоснование выбора тематики, необходимость реализации современных методов обработки информации;

– дизайн-эргономические требования к содержанию и оформлению, которые предполагают: учитывать возрастные особенности учащихся (работоспособность, различные типы мышления и типы организации нервной деятельности), повышать уровень их мотивации к процессу обучения (через включение игровых ситуаций, многократного обращения к программе в случае неудачной попытки и других положительных стимулов при взаимодействии учащегося с програм-

мой), учитывать требования к изображению информации (расположению текста на экране, цветовой гамме, четкости изображения) и режимам работы;

– технические требования, которые предполагают обеспечение устойчивой работы системы;

– эстетические требования устанавливают соответствие эстетического оформления функциональному назначению учебной среды.

Учет перечисленных требований к разработке ЭУМК обусловлен его образовательной направленностью.

Понимание учащимися учебного материала при использовании электронных средств достигается за счет интегрированного представления информации, повышения интереса к математике на основе автоматизации решений задач различных видов, наглядного обеспечения связи математики с практической жизнедеятельностью, устранения средствами справочной системы возможных негативных ситуаций у учащихся, возникающих на некоторых этапах решения задач.

Разработанный в настоящем исследовании ЭУМК по алгебре для 9-х классов общеобразовательных учреждений предназначен для формирования ИКТ – компетентности учащихся. Он реализован в виде многооконного приложения, главная форма которого имеет следующий вид (рис. 1).

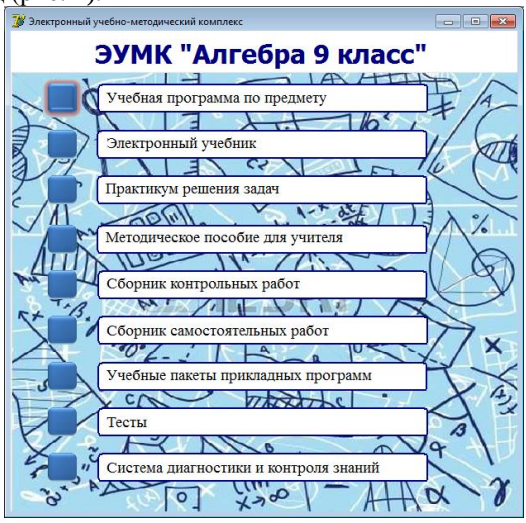


Рис. 1. Главная форма ЭУМК

По своей структуре ЭУМК включает разработанные в соответствии с ФГОС ООО и предназначенные для учащихся 9-х классов следующие разделы:

– учебная программа по предмету;
– электронный учебник;
– практикум решения задач;
– методическое пособие для учителя;
– сборник контрольных работ;
– сборник самостоятельных работ;
– учебные пакеты прикладных программ;
– тесты;
– система диагностики и контроля знаний.

Доступ к перечисленным разделам ЭУМК осуществляется с помощью одноименных программных ссылок, расположенных на форме в виде списка. При выборе любой из них, пользователю открывается соответствующий раздел ЭУМК в виде отдельного приложения. Каждый из программных элементов, определяющих состав ЭУМК, может быть открыт и использоваться независимо от других.

Раздел «Учебная программа по предмету». Данный раздел предоставляет пользователю ЭУМК возможность изучить рабочую программу для учащихся 9-х классов по учебнику А.Г. Мордковича, П.В. Семенова, разработанную в соответствии с основными положениями ФГОС и требованиями «Примерной образовательной программы основного общего образования». Программа содержит развернутое календарно-тематическое планирование системы учебных занятий (уроков) и педагогических средств, с помощью которых формируются УУД, планируемые результаты освоения образовательной программы: личностные, метапредметные, предметные, а также учебно-методическое обеспечение.

Раздел «Электронный учебник». Электронный учебник по алгебре для учащихся 9-х классов дает возможность ознакомиться с теорией по выбранной теме предмета. Содержание электронного учебника построено на основе учебного материала печатного учебника для учащихся общеобразовательных учреждений «Алгебра. 9 класс» авторов А.Г. Мордковича, П.В. Семенова [2]. Для удобства использования электронного учебника его внешний вид и оформление максимально приближены к печатному изданию. При этом он имеет удобный графический интерфейс.

Раздел «Практикум решения задач». Представляет собой приложение для решения текстовых задач, где ученику предлагается решить их в виде тренировочных упражнений. Задачи классифицируются по уровню сложности и восприятию учебного материала. Пользователь приложения в зависимости от преобладающего у него когнитивного стиля кодирования информации имеет возможность выбора различных вариантов текстовых задач, формируя при этом свой индивидуальный образовательный маршрут обучения.

Раздел «Методическое пособие для учителя». Данное приложение предоставляет возможность учителю ознакомиться с методическими рекомендациями для проведения уроков.

Разделы «Сборник контрольных задач» и «Сборник самостоятельных задач» содержат учебный материал для проведения самостоятельных и контрольных работ по каждой теме. Они могут быть использованы учителем для осуществления текущего контроля знаний, умений и навыков учащихся, а также учениками при индивидуальной работе.

Раздел «Учебные пакеты прикладных программ». Содержащиеся в данном разделе ЭУМК программы позволяют переводить учебную деятельность школьников в интерактивный режим использования специальных компьютерных инструментов для графических построений. Основная функция данных программ заключается в том, чтобы сформировать у учащихся четкое представление об изучаемом объекте. Инструментальные возможности данных программ позволяют сделать это в наглядной форме.

Раздел «Тесты». Данный раздел ЭУМК содержит программы с банком тестовых заданий для компьютерного тестирования.

Раздел «Система контроля знаний». Для проверки знаний и умений, полученных при работе с учебным материалом, в ЭУМК реализована система диагностики и контроля знаний, основу которой составляют тестовые задания.

Наряду с традиционными в рамках ЭУМК необходимо использовать особые технические требования, обусловленные спецификой компьютерных технологий. Авторы А.В. Слепухин, Б.Е. Стариченко выделяют ряд технических требований к тестовым заданиям с учетом специфики компьютерных средств тестирования:

– комплексность (многофункциональность пакета);

– производительность (время доступа, охват);

– надежность (безаварийная работа, восстановление после сбоя);

– масштабируемость (сетевые версии программ тестирования);

– защищенность (использование криптографических методов для кодирования содержания тестовых заданий);

– простота использования (развертываемость, дружелюбность).

Перечисленные технические требования были учтены при разработке тестовых заданий ЭУМК.

Предлагаемая в настоящем исследовании диагностика, проводимая с помощью тестов, направлена на выстраивание индивидуальной образовательной траектории учащихся, основу которой составляют выделенные М.А. Холодной когнитивные стили кодирования информации. Создание индивидуальной образовательной траектории является необходимым условием для реализации индивидуального подхода и организации индивидуальной самостоятельной работы учащихся в процессе обучения математике. Именно индивидуализация обучения позволит обеспечить учащимся выбор индивидуального маршрута своей деятельности.

В работе в основу выстраивания ИОТ учащегося положены типы ориентировочной основы действий, выделенные П.Я. Гальпериным и Н.Ф. Талызиной. Они были положены в основу формирования следующих индивидуальных образовательных траекторий.

Траектория 1. Ученику в интерактивном режиме предлагается построить ход решения задачи на основе наводящих вопросов с готовыми вариантами ответов (в виде тестов).

Траектория 2. Решение задач осуществляется посредством вопросно-ответной системы. Информационная система ставит перед пользователем наводящий вопрос, ответ на который либо есть решение, либо позволяет его достичь.

Траектория 3. Ученик решает задачу путем осуществления самостоятельного поиска теоретической информации с помощью наводящих программных ссылок на информационные Интернет-ресурсы.

Выделеные виды деятельности, которыми овладевают учащиеся в процессе обучения математике при решении информационно-познавательных задач, раскрывают возможности описанного ЭУМК.

Библиографический список

1. Роберт И.В. Информационные и коммуникационные технологии в образовании: учебно-методическое пособие / И.В. Роберт, С.В. Панюкова, А.А. Кузнецов, А.Ю. Кравцова; под ред. И.В. Роберт. – М.: Дрофа, 2008. – 312 с.

2. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 13-е изд. – М.: Мнемозина, 2011. – 226 с.

3. Викторова Ю.В. Электронный учебно-методический комплекс как средство формирования ИКТ – компетентности учащихся 9-х классов в процессе обучения математике / Ю.В. Викторова, С.В. Викторов // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 12. – Ч. 4. – С. 634-639.

4. Викторова Ю.В. Электронный ресурс «Электронный учебник «Квадратные уравнения»» / Ю.В. Викторова, С.В. Викторов. – М.: ФГНУ ИНИПИ РАО, ОФЭРНиО № 16404 от 17.11.2010г.

Сведения об авторах

Викторова Юлия Владимировна, преподаватель математики и информатики колледжа СФ БашГУ. E-mail: viktorovayv@mail.ru.

Викторов Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент СФ БашГУ. E-mail: viktorov@rambler.ru.

УДК 330.43+51-77

Гафарова Е.А., Мишенев А.И.

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОХОДОВ ДОМОХОЗЯЙСТВ

В работе представлены результаты эконометрического моделирования доходов домашних хозяйств на основе уравнения минцеровского типа для данных РМЭЗ НИУ ВШЭ.

Ключевые слова: эконометрическое моделирование, доходы домохозяйства, уравнение Минцера.

Gafarova E.A., Mishenev A.I.

ECONOMETRIC MODELING OF HOUSEHOLD INCOME

The paper presents the results of econometric modeling of household incomes derived from the Mincer wage Equation for the RLMS-HSE data.

Key words: econometric modeling, household income, Mincer wage Equation.

© Гафарова Е.А., Мишенев А.И., 2017

Ухудшение общей экономической ситуации в России сопровождается ростом неравенства по уровню доходов населения. Как показывают исследования в области дифференциации доходов, в России с 2001 года дифференциация остается самой высокой из всех экономически развитых стран мира [4]. На рис. 1 представлена динамика в 2000-2016 гг. коэффициента Джини, характеризующего степень отклонения линии фактического распределения общего объема доходов населения от линии их равномерного распределения.

Как видно из рисунка, наибольший разрыв в распределении доходов за анализируемый период наблюдался в 2007-2010 гг. В 2013-2015 гг. наметилась тенденция снижения коэффициента Джини медленными темпами. Однако в 2016 г. опять наблюдался рост неравенства доходов.

Рис. 1. Динамика коэффициента Джини в России в 2000–2016 гг.

На дифференциацию доходов населения и, в частности, домашних хозяйств влияют внешние факторы (территориальные, демографические, отраслевые, морально-этические), а также внутренние факторы (тип семьи и личностные характеристики членов домохозяйства). В данной работе представлены результаты исследования влияния характеристик домохозяйства на уровень его благосостояния с помощью методов эконометрики. Поскольку обычно под главой домохозяйства понимается член домохозяйства с наибольшим индивидуальным доходом [1], то будем предполагать, что на доходы домохозяйства влияют индивидуальные характеристики главы домашнего хозяйства.

Для построения эконометрической модели были задействованы данные полной выборки 23 волны (2014 год) ежегодного обследования домохозяйств субъектов Российской Федерации «Российский мониторинг экономического положения и здоровья населения НИУ-

ВШЭ» [3]. Полная выборка данных составила 1000 опрошенных домашних хозяйств по следующим субъектам РФ: Ленинградская область, Удмуртская республика, Пермский край, Калужская область, Тамбовская область, Волгоградская область, Оренбургская область, Чувашская республика. Из рассмотрения были исключены домохозяйства, для которых не были указаны значения их доходов.

В качестве зависимой переменной были взяты данные о доходах домохозяйств, а в качестве независимых переменных: количество членов домохозяйств, количество пенсионеров в домохозяйстве, количество иждивенцев до 15 лет, а также группа бинарных переменных, характеризующих наличие у главы домохозяйства мужского пола, высшего профессионального образования, среднего профессионального образования, проживание в городской местности, наличие у домохозяйства безвозмездных выплат[1]. В состав доходов домохозяйств респондентами были включены заработная плата, социальные трансферты, имеющиеся денежные поступления, в том числе и в валюте. Далее доходы домохозяйств были выражены в прожиточных минимумах субъекта РФ. При этом использовались установленные в субъектах РФ в IV квартале 2014 год величины прожиточного минимума для всего населения (в среднем на душу населения) [5].

За основу спецификации было выбрано уравнение минцеровского типа, описывающего зависимость логарифма заработков индивида от характеристик его трудового и человеческого капитала, организации и вида деятельности. Модель оценки уровня доходов домохозяйств запишем в общем виде:

$$\ln(y_i) = a + \sum_{k=1}^{m} b_i x_i + \varepsilon_i,$$

где y_i – уровень доходов домохозяйств (выраженный в прожиточных уровнях субъекта РФ), x_i – факторы, оказывающие влияние на изменение уровня доходов, m – количество факторов, a – свободный член модели, ε_i – случайные ошибки модели, b_i – оцениваемые параметры модели.

Результаты эконометрического моделирования доходов домашних хозяйств в зависимости от характеристик самого домохозяйства и его главы приведены в таблице 1.

Поскольку размеры безвозмездных выплат были указаны не всеми опрашиваемыми домохозяйствами, то для сохранения наблюдения в выборке решено было ввести бинарную переменную, характеризующую наличие выплат.

Таблица 1

Результаты эконометрического моделирования доходов домохозяйств

Факторы, влияющие на уровень доходов	Значения коэффициентов	p-уровень
Количество членов домохозяйства	0,1854	0,000
Мужской пол главы домохозяйства	0,2521	0,000
Наличие высшего образования главы домохозяйства	0,2682	0,000
Наличие среднего образования главы домохозяйства	0,0607	0,049
Количество пенсионеров	0,0924	0,001
Проживание в городе	0,1087	0,001
Наличие безвозмездных выплат	0,2403	0,002
Количество иждивенцев до 15 лет	0,1377	0,000
Константа	0,2663	0,000

Анализ адекватности построенного уравнения показал: соответствие выбранной математической формы исходным данным на основе критерия Фишера; статистическую значимость всех факторов; некоррелированность и гомоскедастичность остатков модели; отсутствие мультиколлинеарности. Слабым местом модели осталось низкое значение скорректированного коэффициента детерминации, равное 0,42. Это может быть следствием недоучета факторов, поэтому дальнейшая работа по улучшению модели будет продолжаться.

Как видно из таблицы, значимыми факторами для доходов домашних хозяйств оказались: тип местности, пол главы домохозяйства, наличие среднего профессионального и высшего образования, состав домохозяйства (число членов домохозяйства, пенсионеров и иждивенцев), наличие безвозмездных выплат. Установлено, что размер домохозяйства (число членов домохозяйства, число иждивенцев, число пенсионеров) положительно влияет на его доходы. Прибавление членов домохозяйств увеличивает общий уровень доходов домохозяйств на 0,18 условных единиц с каждым новым членом домашнего хозяйства. Увеличение иждивенцев до 15 лет в домохозяйствах способствуют дополнительным выплатам, субсидиям, или пособиям, которые непосредственно увеличивают общий доход. Кроме того, в работе [2] эмпирически доказано, что вступление в брак и ответственность за семью оказывают влияние на мужчину и вызывают рост его производительности и денежных доходов. По аналогии с

супружеской премией, можно говорить о «семейной» премии. Наличие иждивенцев и пенсионеров в домохозяйстве способствуют формированию ответственности за них и способствуют росту доходов главы и остальных членов домохозяйства. Общий уровень доходов домохозяйств увеличивается на 0,13 условных единиц с каждым ребенком. Также увеличение количества пенсионеров способствует большему количеству накоплений денежных средств, а также дополнительных выплат, пенсионных страхований и т.д., что непосредственно увеличивает общий уровень доходов домохозяйств. В построенной модели, прибавление количества пенсионеров, увеличивает общий уровень доходов на 0,09 условных единиц.

Уровень доходов домохозяйств, проживающих в городской местности, больше чем у сельских жителей. По результатам исследования, доходы домохозяйства, проживающего в городе, увеличиваются на 0,10 условную единицу.

По результатам исследования, домохозяйство, главой в которых является мужчина, имеют более высокий уровень доходов на 0,69 условных единиц. Наличие высшего и послевузовского образования главы домохозяйства (бакалавриат, магистратура, аспирантура) повышает конкурентоспособность главы домохозяйства на рынке труда, вследствие чего его заработная плата и общий уровень дохода возрастает на 0,25 условных единиц.

Безвозмездные выплаты участникам домохозяйства от общественных организаций, частных лиц, церквей, мечетей или синагог, родственников, безусловно, увеличивают общий доход домохозяйств на 0,24 условных единиц соответственно.

Построенная эконометрическая модель позволила определить влияние характеристик домохозяйства и его главы домохозяйства на благосостояние самого домохозяйства. Таким образом, регрессионный анализ показал, что основными факторами, влияющими на уровень доходов домохозяйства, являются: проживание домохозяйства в городской местности; мужской пол главы домохозяйства; наличие среднего профессионального или высшего образования у главы домохозяйства; большой размер домохозяйства; наличие безвозмездных выплат.

Библиографический список

1. Абанокова К.Р., Лошкин М.М. Влияние эффекта масштаба в потреблении домохозяйств на бедность в России // Экономический журнал ВШЭ, 2014.– № 4.– С. 620–644.

2. Аистов А.В., Коваленко Н.В. Супружеская премия // XIV Апрельская международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества: в 4 кн. / отв. ред. Е. Г. Ясин; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». Кн. 2. М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2014.– С. 661–671.

3. Российский мониторинг экономического положения и здоровья населения НИУ ВШЭ. URL: http://www.hse.ru/rlms/

4. Стукаленко Е.А. Дифференциация доходов населения: причины и последствия // Вестник Омского университета. Серия «Экономика».– 2014.– № 1.– С. 183–187.

5. Федеральная служба государственной статистики. http://www.gks.ru/

Сведения об авторах

Гафарова Елена Аркадьевна, кандидат экономических наук, доцент, старший научный сотрудник Института социально-экономических исследований Уфимского научного центра РАН. E-mail: gafarovaea@mail.ru

Мишенев Андрей Игоревич, магистрант ИНЭФБ Башкирского государственного университета. E-mail: a.mishenev@inbox.ru

УДК 544.42

Гиззатова Э.Р., Спивак С.И.

О МОДЕЛИ КОНВЕРСИИ МОНОМЕРА В ПРОЦЕССАХ РАДИКАЛЬНОЙ ПОЛИМЕРИЗАЦИИ ДИЕНОВ

В работе дана общая схема построения математической модели процесса радикальной полимеризации диенов. Указано, что процесс характеризуется изменением значений констант скоростей квадратичных обрывов, что влияет на поведение конверсионной кривой, в которой отмечаются участки постоянства концентрации активных центров. Приведены формулы для расчета значений констант скоростей.

Ключевые слова: радикальная полимеризация, кинетическая схема, математическая модель.

© Гиззатова Э.Р., Спивак С.И., 2017

Gizzatova E.R., Spivak S.I.

ABOUT MODEL OF MONOMER CONVERSION IN RADICAL POLYMERIZATION PROCESSES OF DIENE.

This paper is consists a scheme for constructing a mathematical model of the process of radical polymerization of dienes. Provided that the process is characterized by the values of the rate constants of the quadratic breaks that affect the behavior of the conversion curve, which highlights areas of the constancy of the concentration of active centers. The formulas for calculating the values of the rate constants.

Keywords: radical polymerization, the kinetic scheme, mathematical model.

Описание кинетических особенностей полимеризационного процесса может вестись методами и средствами математического моделирования. Целесообразность подхода обуславливается необходимостью описания полимеризационных процессов и выделения всех кинетических закономерностей, которыми связаны компоненты друг с другом. В литературе [1] принято выделять два подхода к моделированию полимеризационных процессов – статистический и кинетический. Основной составляющей первого из них является вероятность, понимаемая как количественная возможность наступления отдельной реакции каждой элементарной стадии. Другой подход - кинетический – позволяет оценивать поведение реагентов в ходе процесса: изменение их концентраций; изменение скоростей процесса; влияние температуры на процесс.

Полученная кинетическая модель [1], представляет собой математический аналог реального химического процесса. Законы химической кинетики описывают поведение реагентов во времени посредством дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X, K)$$

где t – время полимеризации, X – вектор концентраций всех возможных реагентов системы; K – вектор констант скоростей всех элементарных стадий процесса.

Для построенной системы дифференциальных уравнений выписывают начальные условия и ставят прямые и обратные кинетические задачи.

Согласно изложенному выше, для кинетической схемы (1):

$$I \xrightarrow{k_i} 2R_1$$

$$R_i + M \xrightarrow{k_p} R_{i+1}$$

$$R_i + S \xrightarrow{k_S} P_i + R_1 \qquad (1)$$

$$R_i + R_m \xrightarrow{k_{tr}} P_i + m$$

$$R_i + R_m \xrightarrow{k_{td}} P_i + P_m$$

система дифференциальных уравнений, выписанная согласно законам химической кинетики, будет иметь вид:

$$\frac{dI}{dt} = -k_i I$$

$$\frac{dC_a}{dt} = 2fk_i I - k_{tr}\left(C_a\right)^2 - k_{td}\left(C_a\right)^2$$

$$\frac{dM}{dt} = -k_p M C_a \qquad (2)$$

$$\frac{dS}{dt} = -k_S S C_a$$

$$\frac{dR_1}{dt} = 2fk_i I - k_p M R_1 + k_S S(C_a - R_1) - k_{tr} R_1 C_a - k_{td} R_1 C_a$$

$$\frac{dP_1}{dt} = k_S S R_1 + k_{td} R_1 C_a$$

$$\frac{dR_i}{dt} = k_p M(R_{i-1} - R_i) - k_S S R_i - k_{tr} R_i C_a - k_{td} R_i C_a \ , i \geq 2$$

$$\frac{dP_i}{dt} = k_S S R_i + k_{tr} \sum_{z=1}^{i-1} R_z R_{i-z} + k_{td} C_a R_i \ , i \geq 2$$

Начальные условия для системы следующие:

$$I^{(0)}=I(0),\ M^{(0)}=M(0), S^{(0)} = S(0),\ C_a^{(0)}=C_a(0),\ R_i^{(0)}= P_i^{(0)}=0,\ i\geq 1 \qquad (3)$$

При заданных значениях констант скоростей всех элементарных стадий процесса и начальных условий (3), получают решение прямой кинетической задачи. Однако владеть числовыми значениями всех констант скоростей практически невозможно в силу слож-

ности их получения в результате натурного эксперимента. Таким образом, возникает обратная кинетическая задача поиска значений констант скоростей, с которыми бы удовлетворительно описывались экспериментально получаемые кривые по конверсии, средним молекулярным массам и молекулярно-массовому распределению.

Надо заметить, что процессы радикальной полимеризации отличаются от других процессов полимеризаций тем, что наблюдается падение скоростей квадратичных обрывов, вызываемое уменьшением значений соответствующих констант скоростей реакций [2,3]. Наиболее ярко выражено такое поведение констант в характере изменения конверсии мономера, где появляется эффект, называемый автокатализом и проявляемый как резкий скачок расхода мономера [2,3] (рис. 1).

Согласно [3], закон изменения констант может быть подчинен зависимости:

$$k^* = k \cdot exp(-c_1 U - c_2 U^2 - c_3 U^3) \quad (4)$$

В работе были получены функциональные закономерности изменения констант скоростей квадратичных обрывов для процесса полимеризации метилметакрилата (ММА) на инициирующей системе азоизобутиронитрил (АИБН). Дальнейшие вычисления показали, что (4) можно дополнить уточняющим коэффициентом, увеличивающим коэффициент корреляции между экспериментальными и теоретическими данными [2]:

$$k^* = k \cdot exp(-c_0 - c_1 U - c_2 U^2 - c_3 U^3) \quad (5)$$

Каждый коэффициент кривой (5) является линейно независимым параметром от температуры:

$$c_i = a_i + b_i \cdot T \quad (6)$$

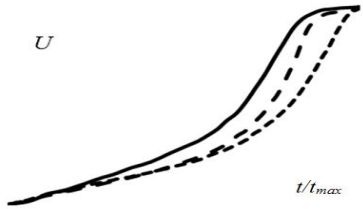


Рис. 1. Различные виды конверсионных кривых мономера в радикальной полимеризации, соотнесенные к абсолютному времени

Применяя при решении системы вида (2) с начальными условиями (3), выражение (5), ход процесса полимеризации позволяет выделить два режима работы, последовательно меняющих друг друга: стационарный и нестационарный, что отмечено на рис.2.

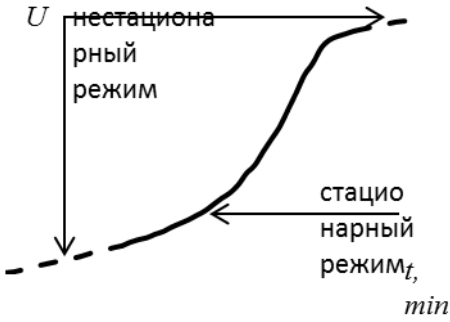


Рис. 2. Смена работы стационарного и нестационарного режимов на конверсионной кривой в радикальной полимеризации ММА при Т=323К на инициирующей системе АИБН (I_0 = 0,003 моль/л)

Математически, стационарность режима означает постоянство концентрации активных центров, то есть при любом $t \in [t_0 , t_{max}]$, $C_a(t)=const$, нестационарность – обратное.

Таким образом, в работе представлена модель поведения конверсионной кривой для радикального процесса полимеризации, характеризующаяся появлением стационарного и нестационарных режимов работы процесса.

Библиографический список

1. Подвальный С.Л. Моделирование промышленных процессов полимеризации. – М.: Химия, 1979.– 256 с.

2. Гиззатова Э.Р., Спивак С.И., Колесов С.В. Математическое моделирование кинетической неоднородности констант бимолекулярного обрыва радикальной полимеризации // Системы управления и информационные технологии. 2015. - № 1.1(59). – С. 126-129.

3. Hui A., Hamielec A. Thermal polymerization of styrene at high conversions and temperatures. An experimental study // Journal of Applied Polymer Science, 1972, vol.16, pp. 749-769.

Сведения об авторах

Гиззатова Эльвира Раисовна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры Стерлитамакского филиала Башгосуниверситета. E-mail: makella@rambler.ru

Спивак Семён Израилевич, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования филиала Башгосуниверситета. E-mail: makella@rambler.ru

УДК 517.956.6

Гималтдинова А.А.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

В работе для уравнения с двумя линиями изменения типа изучена краевая задача с условиями первого и второго рода на границе прямоугольной области. Установлен критерий единственности и решение построено в виде суммы биортогонального ряда.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, краевая задача, существование и единственность решения.

Gimaltdinova A.A.

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION WITH THE OPERATOR OF LAVRENTIEV–BICADZE WITH TWO LINES OF TYPE CHANGE IN THE RECTANGULAR AREA

For the equation with two lines of type change was studied the boundary value problem with conditions of the first or second kind on the boundary of a rectangular domain. A uniqueness criterion was established and the solution was constructed as the sum of a biorthogonal series.

Keywords: mixed type equation, boundary value problem, existence and uniqueness of the solution.

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} x)u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + bu = 0, \ b \in R, \qquad (1)$$

в области $D = \{(x, y) \| x | < 1, -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta \in R_+$. Пусть $D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_3 = D \cap \{x < 0, y < 0\}$, $D_4 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$.

© Гималтдинова А.А., 2017

Задача. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, (x,y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4, \tag{3}$$

$$u(x,y)\big|_{x=1} = u(x,y)\big|_{x=-1} = 0,\ y \in [-\alpha, \beta], \tag{4}$$

$$u_y(x,y)\big|_{y=\beta} = \varphi(x),\ u_y(x,y)\big|_{y=-\alpha} = \psi(x), x \in (-1,1), \tag{5}$$

где φ и ψ – заданные достаточно гладкие функции.

Краевые задачи для уравнений смешанного типа с одной или несколькими линиями изменения типа изучались многими авторами.

Работа [1] дала новый толчок к изучению краевых задач для уравнений смешанного типа в прямоугольных областях.

В настоящей работе для уравнения (1) с двумя внутренними линиями изменения типа изучена краевая задача с условиями первого и второго рода на границе прямоугольной области D. Установлен критерий единственности, и решение задачи (2) – (5) построено в виде суммы ряда по биортогональной системе двух взаимно-сопряженных спектральных задач для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с разрывным коэффициентом при старшей производной. Единственность решения поставленной задачи доказана на основании полноты биортогональной системы в пространстве $L_2[-1,1]$. При доказательстве существования решения задачи (2) – (5) возникла так называемая «проблема малых знаменателей», которая создает трудности при обосновании сходимости построенного ряда в классе функций (2). При определенных ограничениях на параметры α, β доказаны леммы об отделимости малых знаменателей от нуля.

После разделения переменных $u(x,y) = X(x)Y(y)$ в уравнении (1) получим:

$$\operatorname{sgn} x \cdot X'' + dX = 0,\ x \in (-1,0) \cup (0,1), \tag{6}$$

$$X(0+0) = X(0-0), X'(0+0) = X'(0-0), X(-1) = X(1) = 0, \tag{7}$$

$$\operatorname{sgn} y \cdot Y'' + (b-d)Y = 0,\ y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta), \tag{8}$$

$$Y(0+0) = Y(0-0), Y'(0+0) = Y'(0-0), \tag{9}$$

где $d = \mu^2 \in \mathrm{C}$ – постоянная разделения. Спектральная задача (6), (7) не является классической из-за незнакоопределенности коэффициента

при старшей производной. Эта задача также получена в [2] при решении задачи Дирихле для уравнения (1) при $b = 0$.

Решениями задачи (6), (7) будут функции

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, x > 0, \\ \dfrac{\mathrm{sh}[\mu_k(x+1)]}{\mathrm{ch}\,\mu_k}, \ x < 0, \end{cases} \qquad X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}[\mu_k(x-1)]}{\mathrm{ch}\,\mu_k}, \ x > 0, \\ \dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, x < 0, \end{cases}$$

где $\mu_k \approx -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in N$, - положительные корни трансцендентного уравнения $\mathrm{tg}\,\mu = -\mathrm{th}\,\mu$. В работе [2] отмечено, что система $\{X_k^{(1)}(x), X_k^{(2)}(x)\}$ не ортогональна в $L_2[-1,1]$ и показано, что в $L_2[-1,1]$ является полной биортогональная система $\{Z_k^{(1)}(x), Z_k^{(2)}(x)\}$, где $Z_k^{(i)}(x) = \mathrm{sgn}\,x \cdot X_k^{(i)}(x)$. При найденных μ_k и при $|b| < \mu_1^2$ найдем решение уравнения (8) с условиями (9):

$$Y_k^{(1)}(y) = \begin{cases} a_k^{(1)}\,\mathrm{ch}(y\sqrt{\mu_k^2 - b}) + b_k^{(1)}\,\mathrm{sh}(y\sqrt{\mu_k^2 - b}), \ y > 0, \\ a_k^{(1)}\cos(y\sqrt{\mu_k^2 - b}) + b_k^{(1)}\sin(y\sqrt{\mu_k^2 - b}), \ y < 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$Y_k^{(2)}(y) = \begin{cases} a_k^{(2)}\cos(y\sqrt{\mu_k^2 + b}) + b_k^{(2)}\sin(y\sqrt{\mu_k^2 + b}), \ y > 0, \\ a_k^{(2)}\,\mathrm{ch}(y\sqrt{\mu_k^2 + b}) + b_k^{(2)}\,\mathrm{sh}(y\sqrt{\mu_k^2 + b}), \ y < 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $a_k^{(i)}, b_k^{(i)}, i = 1,2,$ – неизвестные пока коэффициенты.

Можно убедиться, что функции

$$u_k^{(i)}(y) = \int_{-1}^{1} u(x,y) Z_k^{(i)}(x)dx,\ k = 1,2,3,... \tag{12}$$

удовлетворяют уравнению (8), поэтому представимы в виде (10) и (11). Тогда из равенств (12) и граничных условий (5) имеем:

$$\left(u_k^{(i)}\right)'(\beta) = \int_{-1}^{1} u'_y(x,\beta) Z_k^{(i)}(x)dx = \int_{-1}^{1} \varphi(x) Z_k^{(i)}(x)dx = \varphi_k^{(i)}, \tag{13}$$

$$\left(u_k^{(i)}\right)'(-\alpha) = \int_{-1}^{1} u'_y(x,-\alpha) Z_k^{(i)}(x)dx = \int_{-1}^{1} \psi(x) Z_k^{(i)}(x)dx = \psi_k^{(i)}, \tag{14}$$

$k = 1,2,3,....$ Учитывая (10), (11), (13) и (14), получим

$$\begin{cases} a_k^{(1)}\,\mathrm{sh}(\beta\sqrt{\mu_k^2 - b}) + b_k^{(1)}\,\mathrm{ch}(\beta\sqrt{\mu_k^2 - b}) = \varphi_k^{(1)} / \sqrt{\mu_k^2 - b}, \\ a_k^{(1)}\sin(\alpha\sqrt{\mu_k^2 - b}) + b_k^{(1)}\cos(\alpha\sqrt{\mu_k^2 - b}) = \psi_k^{(1)} / \sqrt{\mu_k^2 - b}, \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} -a_k^{(2)} \sin(\beta\sqrt{\mu_k^2+b}) + b_k^{(2)} \cos(\beta\sqrt{\mu_k^2+b}) = \varphi_k^{(2)} / \sqrt{\mu_k^2+b}, \\ -a_k^{(2)} \operatorname{sh}(\alpha\sqrt{\mu_k^2+b}) + b_k^{(2)} \operatorname{ch}(\alpha\sqrt{\mu_k^2+b}) = \psi_k^{(2)} / \sqrt{\mu_k^2+b}. \end{cases} \tag{16}$$

Если при всех $k \in \mathrm{N}$ определители систем (15) и (16) отличны от нуля:

$$\Delta_k^{(1)} = \operatorname{sh}(\beta\sqrt{\mu_k^2-b}) \cos(\alpha\sqrt{\mu_k^2-b}) - \sin(\alpha\sqrt{\mu_k^2-b}) \operatorname{ch}(\beta\sqrt{\mu_k^2-b}) \neq 0,$$

$$\Delta_k^{(2)} = \sin(\beta\sqrt{\mu_k^2+b}) \operatorname{ch}(\alpha\sqrt{\mu_k^2+b}) - \operatorname{sh}(\alpha\sqrt{\mu_k^2+b}) \cos(\beta\sqrt{\mu_k^2+b}) \neq 0,$$

то системы однозначно разрешимы:

$$a_k^{(1)} = \frac{1}{\Delta_k^{(1)}\sqrt{\mu_k^2-b}} \left[\varphi_k^{(1)} \cos(\alpha\sqrt{\mu_k^2-b}) - \psi_k^{(1)} \operatorname{ch}(\beta\sqrt{\mu_k^2-b}) \right],$$

аналогично для $a_k^{(2)}, b_k^{(1)}, b_k^{(2)}$. Подставляя найденные значения в (10), (11), получим тем самым представление для $u_k^{(i)}(y)$.

Теорема. *Если существует решение задачи* (2) – (5), *то оно единственно, только если для всех* $k \in \mathrm{N}$ *выполняются условия* $\Delta_k^{(i)}(\alpha,\beta) \neq 0, \ i = 1,2.$

Для обоснования существования решения задачи (2) – (5) необходимо показать существование чисел α и β таких, что при больших k выражения $\Delta_k^{(i)}(\alpha,\beta)$ отделены от нуля.

Можно доказать, что если $\alpha \in \mathrm{N}$ – любое, кроме чисел вида $4p-1, \ p \in \mathrm{N}$, или $\alpha = p/q \in \mathrm{Q}$, $p,q \in \mathrm{N}$, $(p,q)=1$, причем число $q-p$ не кратно 4, то существуют постоянная $M_1 > 0$ и номер $k_1 \in \mathrm{N}$ такие, что для всех $k > k_1$ справедлива оценка $|\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)| \geq M_1 e^{\pi k\beta}$.

Решение задачи (2) – (5) ищется в виде суммы биортогонального ряда

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(u_k^{(1)}(y) X_k^{(1)}(x) + u_k^{(2)}(y) X_k^{(2)}(x) \right). \tag{17}$$

При некоторых ограничениях на граничные функции φ и ψ доказана равномерная сходимость ряда (17) и его производных до второго порядка включительно в соответствующих областях, что означает выполнение условия (2).

Библиографический список

1. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. – 2007. – Т. 413.– № 1. – С. 23-26.

2. Гималтдинова А.А. Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // Доклады академии наук. – 2015. – Т. 460.– № 3.– С. 260-266.

Сведения об авторе

Гималтдинова Альфира Авкалевна, доцент УГНТУ
E-mail: alfiragimaltdinova@mail.ru

УДК 532.546:536.421

Гималтдинов И.К., Кильдибаева С.Р., Кильдибаева Г.Р.

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ С УЧЕТОМ ОБРАЗОВАНИЯ ГИДРАТА

В работе рассматривается течение затопленной струи в условиях стабильного существования гидрата. Процесс формирования гидрата влияет на такие теплофизические параметры струи, как: температура, скорость, плотность, радиус.

Ключевые слова: гидратообразование, затопленная струя, разлив нефти.

Gimaltdinov I.K., Kildibaeva S.R., Kildibaeva G.R.

FEATURES OF FLOW SIMULATION IN A SUBMERGED JET SUBJECT TO CONDENSATION

In the paper, for a submerged jet in conditions of stable existence of hydrate. The process of formation of hydrate affects such important parameters of the jet: temperature, speed, density, radius.

Keywords: hydrate formation, submerged jet, oil spill.

Течение многофазных затопленных струй может иметь как естественный, так и техногенный характер. Большие объемы выбросов нефти и газа в океан, чаще всего, связаны с повреждением трубопровода или скважины. Рассмотрим случай, когда течение струи вызвано аварией на нефтедобывающей конструкции.

© Гималтдинов И.К., Кильдибаева С.Р., Кильдибаева Г.Р., 2017

Пусть в начальный момент времени известны объемные расходы нефти и газа, поступающих из трубопровода. Также известна начальная температура углеводородов и окружающей среды. Для моделирования поведения струи необходимо определить радиус струи, траекторию, скорость, плотность и температуру. Полученные зависимости данных параметров от времени позволят спрогнозировать дальнейшее распространение струи [1, 2] и смоделировать работу устройств для устранения нежелательных техногенных утечек [3]. Считаем, что газ распространяется в виде пузырьков и занимает центральное ядро сечения струи, а термобарические условия на дне водоема соответствуют условиям стабильного существования гидрата.

В основе математической модели лежит интегральный Лагранжевый метод контрольного объема, предложенный в работе [4]. Согласно этому методу считаем, что струя (рис. 1*а*) состоит из последовательных элементов – цилиндров, имеющих высоту h и радиус b (рис. 1*б*).

Каждый элемент струи – контрольный объем характеризуется своим положением в пространстве, средней скоростью, температурой, плотностью и объемным содержанием веществ, входящих в струю. Турбулентное вовлечение окружающей воды в контрольный объем учитывается при расчетах на каждом шаге по времени. Необходимо определить все характеристики КО с течением времени. Зная характеристики контрольного объема, можно получить параметры струи.

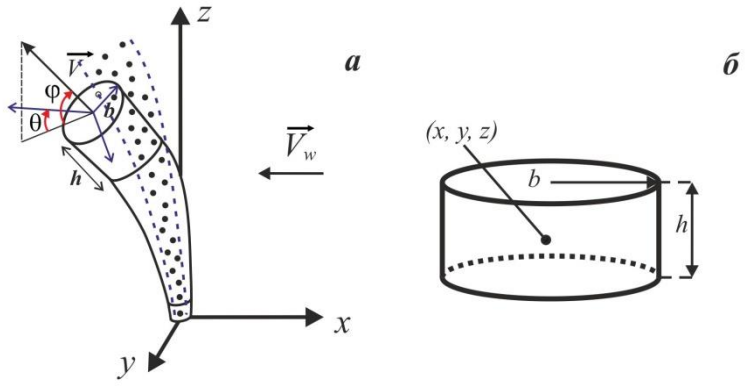


Рис.1. Схема затопленной струи (а), контрольный объем (б)

Уравнения сохранения масс для воды, газа, нефти и гидрата в КО:

$$\frac{dm_w}{dt} = \rho_w Q_w - J_w^h, \quad \frac{dm_g}{dt} = -J_g^h - \rho_g Q_g, \quad \frac{dm_o}{dt} = 0, \quad \frac{dm_h}{dt} = J_h - \rho_h Q_h, \quad (1)$$

где m_i, ρ_i (i=w,g,o,h) – масса компонентов в контрольном объеме и их плотность; Q_w – объемный поток, вовлеченной в струю окружающей воды; Q_g, Q_h – объемный поток газа и гидрата, «выходящий» из КО в связи с искривлением струи; J_w^h, J_g^h – соответственно интенсивности расхода воды и газа при образовании гидрата; J_h – интенсивность образования газогидрата. Здесь и далее нижние индексы *w*, *g*, *o*, *h* относятся к параметрам воды, газа, нефти и гидрата соответственно.

Интенсивности расходов связаны следующими соотношениями:

$$J_g = G \cdot J_h,\ J_w = (1-G) J_h,\ J_h = N 4\pi a_h^2 j_h, \quad (2)$$

где G – гидратное число, N – количество пузырьков в контрольном объеме, a_{gh} – радиус композитных пузырьков, j_h – интенсивность образования гидрата, отнесенная к площади поверхности пузырька.

Уравнение (1) с учетом (2) примет вид:

$$\frac{dM}{dt} = \rho_w Q_w - \rho_{com} Q^f,\ \rho = \sum_i \alpha_i \rho_i,\ \sum_i \alpha_i = 1, \quad (3)$$

здесь M – масса КО; Q^f – объемный поток газа и гидрата, «покидающий» КО в связи с искривлением струи, α_i (i=o, g, h, w) – объемные содержания соответствующих компонентов в КО, ρ_{com} – плотность композитного пузырька с гидратной оболочкой. Пузырек может быть газовым, композитным, состоящим из газового ядра и гидратной оболочки или полностью гидратным.

Уравнения сохранения импульсов для КО имеют вид:

$$\frac{d}{dt}(Mu) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(M\upsilon) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left(M_w + M_o\right)w + \left(M_g + M_h\right)\cdot\left(w + w_b\right)\right] = \left(\rho_w - \rho_l\right)\pi b^2 h\left(\alpha_w + \alpha_o\right)g + \left(\rho_w - \rho_{com}\right)\pi b^2 h\left(\alpha_g + \alpha_h\right)g, \quad (4)$$

где u, υ, w компоненты скорости КО $\vec{V} = u\vec{i} + \upsilon\vec{j} + w\vec{k}$ (рис. 1*а*), g – модуль ускорения силы тяжести, $\rho_l = \alpha_w\rho_w + \alpha_o\rho_o$ – плотность жидкой составляющей в КО, $\rho_{com} = \left(a_g^3\rho_g^0 + \left(a_{gh}^3 - a_g^3\right)\rho_h^0\right)\Big/ a_{gh}^3$ – плотность композитного пузырька с гидратной оболочкой, M_i (i=*o*, *g*, *h*, *w*) – масса компонент КО.

Уравнение сохранения энергии КО:

$$\frac{d}{dt}\left(cMT\right) = c_w T_w \rho_w Q_w + J_h L - J_w c_w T_{hs}, \quad (5)$$

где c, T, c_w, T_w соответственно теплоемкость и температура КО и окружающей жидкости, L – скрытая теплота фазовых переходов.

Процесс формирования гидрата более подробно рассмотрен в работе [5]. Уравнения (1), (3)-(5) решаем численно.

Расчеты были проведены для параметров системы: R=0.05 м, Q_o^e =0.35 м^3/с и газа Q_g^e =0.15 м^3/с, температура окружающей воды T_w =4 °C, температура истечения смеси нефти и газа T^e =80 °C, давление P=15 МПа, плотность окружающей воды ρ_w =1030 кг/м^3, нефти ρ_o =650 кг/м^3, газа (метана) ρ_g =0.7 кг/м^3,

В результате численных расчетов получены: зависимость температуры (рис. 2*а*) и объемных содержаний компонент (рис. 2*б*) КО от вертикальной координаты. На рисунке 2 *а* линия 1 соответствует случаю, когда образование гидратной оболочки на поверхности пузырьков лимитируется теплообменом с окружающей средой, линия 2 – диффузионным переносом газа через гидратную корку. Температура КО понижается за счет вовлечения окружающей воды с меньшей температурой. В случае, когда в струе образование гидратных оболочек на поверхности пузырьков лимитируется процессом теплообмена с окружающей средой, темп уменьшения температуры струи замедляется, что связано с интенсивным выделением тепла при образовании гидрата. На рисунке 2 *б* обозначение *oil* относится к нефти, *gas* – к газу, *hydrate* – к гидрату, *water* – к воде. Объемные содержания нефти и газа убывают в связи с вовлечением окружающей воды, объемное

содержание воды возрастает. Объемное содержание газового гидрата начинает увеличиваться с высоты 1.62 м (начинается гидратообразование) и постепенно убывает с 6.2 м (несмотря на то, что гидрат всё ещё образуется, вода вовлекается в КО интенсивнее).

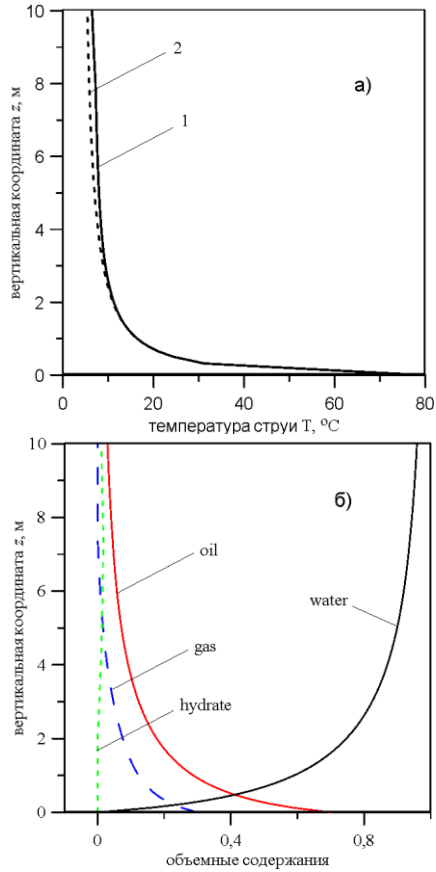


Рис.2. Зависимость температуры (а) и объемных содержаний компонент (б) КО от вертикальной координаты

Библиографический список

1. Гималтдинов И.К., Кильдибаева С.Р., Ахмадеева Р.З. Расчет теплофизических и кинетических параметров затопленной струи // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 11 (часть 7). – С. 1323-1327.
2. Кильдибаева С.Р. Моделирование течения углеводородов в затопленной струе // Современные проблемы науки и образования. 2014. – № 6. – С. 1697.
3. Гималтдинов И.К., Кильдибаева С.Р. К теории начального этапа накопления нефти в куполе-сепараторе // Теплофизика и Аэромеханика. – 2015. – Т. 22.– № 3. – С. 401-406.
4. Yapa P. D. Zheng L. Simulation of oil spills from underwater accidents I: Model development // Journal of Hydraulic Research. – 1997. № 5. – P. 673-688.
5. Кильдибаева С.Р., Гималтдинов И. К. Динамика многофазной затопленной струи с учетом образования гидратов. Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2016. – Т. 1.– № 3(3). – С. 92-101.

Сведения об авторах

Гималтдинов Ильяс Кадирович, доктор физико-математических наук, профессор УГНТУ. E-mail: iljas_g@mail.ru

Кильдибаева Светлана Рустамовна, старший преподаватель СФ БашГУ. E-mail: freya.13@mail.ru

Кильдибаева Гульназ Ринатовна, студентка гр. Физ21 СФ БашГУ. E-mail: carpenter_meow@mail.ru

УДК 517.9

Гнатенко Ю.А., Мурзабаев Т.Р.

ПОИСК ОПТИМАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ХЛАДОАГЕНТА В РЕАКТОРЕ ИДЕАЛЬНОГО СМЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ

Рассмотрена математическая модель реактора идеального смешения периодического действия с теплосъемом для процесса олигомеризации α-метилстирола. Поставлена задача оптимального управления технологическим процессом с помощью температуры

© Гнатенко Ю.А., Мурзабаев Т.Р., 2017

хладоагента. Задача решается методом принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: олигомеризазация, задача оптимального управления, принцип максимума Понтрягина, реактор с теплосъемом, двухточечная краевая задача.

Gnatenko Y.A., Myrzabaev T.R.

THE SEARCH FOR THE OPTIMAL COOLANT TEMPERATURE IN THE REACTOR OF IDEAL MIXING OF PERIODIC ACTION

The mathematical model of ideal mixing reactor of periodic action with the heat removal process for the oligomerization of α-methylsterol. A problem of optimal process control using the coolant temperature. The task is solved by the method of the Pontryagin maximum principle.

Key words: oligomerizate, the optimal control problem, Pontryagin maximum principle, reactor heat removal, two-point boundary value problem.

Ранее ставилась задача нахождения теоретического оптимального температурного режима реакции олигомеризации α-метилстирола. Эта задача была решена с помощью принципа максимума Понтрягина [1]. На рис.1 показаны изменения концентраций продуктов реакции (мольные доли) с течением времени, которые соответствуют найденному оптимальному управлению (рис.2). При найденном оптимальном температурном режиме достигается максимальный выход линейных димеров (x_2 и x_3).

На основе эксперимента, проведенного в адиабатических условиях, выяснилось, что реакция обладает высокой экзотермичностью, и разогрев в реакторе превышает $300^{O}C$. Поскольку основной целью процесса является получение линейных димеров, такой разогрев в реакторе недопустим не только из-за потери управляемости процесса, но и вследствие преимущественного образования циклических димеров. Поэтому данный процесс необходимо осуществлять в реакторе с теплосъемом [2].

Рассмотрим реактор идеального смешения периодического действия (РИС-П), в котором теплосъем можно осуществить двумя путями: с помощью внутреннего змеевика и/или внешнего кожуха, используя в качестве хладоагента воду.

Математическое описание неизотермического процесса представляется системой уравнений теплового и материального балансов.

При составлении уравнения теплового баланса сделаем допущение: теплоприход может иметь место лишь вследствие выделения теплоты в ходе реакции, а теплорасход – вследствие отвода теплоты хладоагентом. Тогда уравнение теплового баланса примет вид:

$$dT / dt = 1 / C_p \sum_{j=1}^{9} Q_j W_j(x, T) + \alpha_x S_x / C_p C_0 (T_x - T) \qquad (1)$$

где C_p – мольная теплоемкость реакционной смеси, $ккал/(кмоль \cdot K)$; T и T_x – температура реакционной среды и хладоагента, K; Q_j, $j = \overline{1,9}$ – тепловые эффекты реакции, $ккал/моль$; $W_j(\mathbf{x}, T)$, $j = \overline{1,9}$ – приведенные скорости химических реакций, $1/ч$; $\mathbf{x}$ – вектор мольных долей концентраций компонентов реакции; α_x – коэффициент теплопередачи, $ккал/(м^2 \cdot ч \cdot K)$; S_x – удельная поверхность теплосъема, $м^2/м^3$; C_0 – начальное значение мольной плотности реакционной смеси, $кмоль/м^3$; t – время проведения реакции, $ч$.

В качестве уравнений материального баланса будем использовать кинетическую модель реакции [3]:

$$\begin{aligned} dx_i / dt &= \left(F_i(\mathbf{x}, T) - x_i F_n(\mathbf{x}, T)\right) / N, \ i = \overline{1, 5}; \\ dN / dt &= F_n(\mathbf{x}, T), \end{aligned} \qquad (2)$$

где $F_i(\mathbf{x}, T)$, $i = \overline{1, 5}$, $F_n(\mathbf{x}, T)$ – функции, составленные с учетом матрицы стехиометрических коэффициентов [3]; $N = C / C_0$ – относительное изменение числа молей реакционной смеси; C – мольная плотность реакционной смеси, $кмоль/м^3$.

Для системы дифференциальных уравнений (1), (2) зададим начальные условия:

$$T(0) = T^0; \ x_i(0) = x_i^0, \ i = \overline{1,5}; \ N(0) = 1. \qquad (3)$$

В системе (1), (2) переменные T, $\mathbf{x}$, N являются переменными состояния, а температура хладоагента T_x – управляющая переменная,

значение которой можно изменять по ходу реакции так, чтобы достигался максимальный выход продуктов реакции (линейных димеров):

$$R = x_2 + x_3 \to \max. \quad (4)$$

Таким образом, для системы нелинейных дифференциальных уравнений (1), (2) с начальными условиями (3), ставится следующая задача оптимального управления: определить оптимальную температуру хладоагента $T_x(t)$, при которой выполняется критерий оптимальности (4).

Задачу оптимального управления (1) – (4) предлагается решать с помощью принципа максимума Понтрягина. Для этого сведем критерий (4) к минимизации функционала:

$$J = \int_0^{t_k} \varphi_0(\mathbf{x}, T, T_x)dt, \ \varphi_0(\mathbf{x}, T, T_x) = -(dx_2/dt + dx_3/dt). \quad (5)$$

Для единства обозначений положим $x_6 = N, x_7 = T$. Время реакции t_k известно. Составим функцию Понтрягина H (гамильтониан):

$$H = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \frac{F_i - x_i F_n}{x_6} + \lambda_6 F_n + \lambda_7 \left(\frac{1}{C_p} \sum_{j=1}^{9} Q_j W_j(\mathbf{x}) + \frac{\alpha_x S_x}{C_p C_0}(T_x - x_7) \right) \quad (6)$$

Здесь функции $\lambda_i(t)$ довлетворяют системе сопряженных уравнений:

$$d\lambda_i/dt = -\partial H/dx_i, \ i = \overline{1,7}. \quad (7)$$

Недостаток граничных условий восполняется условиями трансверсальности, число которых равняется числу недостающих граничных условий для основной и сопряженной системы уравнений (для задачи со свободным правым концом):

$$\lambda_i(t_k) + \lambda_0 \partial R/\partial x_i = 0, \ i = \overline{1,7}. \quad (8)$$

Таким образом, получена двухточечная краевая задача для систем (1), (2) и (7) с заданными граничными условиями (3) и (8) в начальной и конечной точке $t = 0$ и $t = t_k$ соответственно. Аналитически подобную задачу решить сложно, поэтому необходимо разработать программный комплекс, использующий численные методы решения двухточечных краевых задач.

Библиографический список

1. Валиева Ю.А., Мустафина С.А., Спивак С.И. Оптимизация каталитических процессов на основе принципа максимума Понтрягина // Вестник Башкирского университета. – Уфа: РИО БашГУ, 2004. – № 4. – С. 3–6.
2. Мустафина С.А., Валиева Ю.А., Спивак С.И. Теоретическая оптимизация процесса олигомеризации α-метилстирола в присутствии цеолита типа Y в NaH-форме // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2004. – Т.11.– Вып. 2. – С. 375.
3. Валиева Ю.А., Мустафина С.А., Спивак С.И. Моделирование и оптимизация процесса олигомеризации α-метилстирола // Журнал Средневолжского математического общества, 2004. – Т.6.– № 1. – С. 75.

Сведения об авторах

Гнатенко Юлия Ахнафовна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры СФ БашГУ.
E-mail: valieva_julia@mail.ru.

Мурзабаев Тимур Раисович, магистрант СФ БашГУ,
E-mail: murzabaev.tima@mail.ru.

УДК: 530.182+519.7

Горбатков С.А., Полупанов Д.В.

ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРО-АППРОКСИМАТИВНОГО МЕТОДА В ЭКОНОМИЧЕСКИХ И ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Исследуется научная гипотеза о возможности применения оригинального итеро-аппроксимативного метода для моделирования динамических режимов с обострением в экономике и экологии, описываемых нелинейными параболическими уравнениями в частных производных.

Ключевые слова: синергетика, нелинейные динамические режимы с обострением, рост котировок акций, распространения популяции, аппроксимативный метод итерационной линеаризации, уравнения математической физики.

© Горбатков С.А., Полупанов Д.В., 2017

Gorbatkov S.A., Polupanov D.V.

APPLICATION OF ITERA-APPROXIMATION METHOD IN ECONOMIC AND ECOLOGICAL SYSTEMS

The scientific hypothesis about the possibility of using the original itero-approximative method for modeling dynamic regimes with exacerbation in economics and ecology, described by nonlinear parabolic partial differential equations are investigated.

Key words: synergetic, nonlinear dynamic regimes with peaking, growth of stock quotes, population distribution, approximate method of iterative linearization, equations of mathematical physics.

Работа посвящена проблеме создания эффективных аналитических методов математического моделирования социально-экономических и эколого-биологических синергетических рефлексивных процессов диффузии, описываемых нелинейными параболическими уравнениями. Основополагающие идеи проблемы теории самоорганизации и синергетики изложены в работах Г.Г. Малинецкого [1] и С.П. Курдюмова [2]. Примером экономического аналога нелинейной диффузии является процесс роста котировок ценных бумаг на фондовом рынке с учетом эффекта рефлексивного поведения участников рынка [3]. Примером из экологии может служить распространение популяции в замкнутом объеме [4].

Авторы выдвигают научную гипотезу о возможности применения для указанного круга нелинейных динамических задач диффузии ранее разработанного оригинального (авторского) аналитического аппроксимативного метода итерационной линеаризации (АМИЛ) [5], а также возможности развития и обобщения этого метода.

Обоснуем принципиальную новизну предлагаемого к развитию и обобщению АМИЛ применительно к диффузионным нелинейным процессам в экономике и экологии. Для этого запишем формулировку нелинейной начально-краевой задачи теплофизики, для которой был ранее разработан АМИЛ.

Пусть задан нелинейный оператор параболического типа для уравнения теплопроводности:

$$A(Q) = \frac{\partial}{\partial t}(C(Q)\rho(Q)Q(x,t)) - \nabla\cdot(\lambda(Q)\nabla Q(x,t)) = F(x,t); \qquad (1)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega,\ t \in [0, t^*],\ \Omega' = \Omega \times [0, t^*]$$

с нелинейными краевыми условиями вида

$$-\lambda(Q)\frac{\partial Q}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \alpha(Q)(Q-Q_0) + \sum_{j=1}^{M}\varepsilon_{\text{изл.j}}(Q)\sigma(Q^4 - Q_c^4); \qquad (2)$$

$$x \in \partial\Omega,\ t = [0, t^*]$$

и начальными условиями

$$Q(x,t)\big|_{t=o} = Q_0(x),\ x \in \Omega. \qquad (3)$$

Здесь Q – искомая функция (температура); $C(Q)$ – удельная теплоёмкость при постоянном давлении; $\lambda(Q)$ – коэффициент теплопроводности; $\rho(Q)$ – плотность; $\alpha(Q)$ – коэффициент теплообмена за счёт теплопроводности и конвекции на граничной поверхности $\partial\Omega$ нагреваемого тела; Ω – объём тела; $Q_c = Q_c(x,t)$ – температура окружающей среды; $\varepsilon_{изл.\ j}(Q)$ – коэффициент взаимной облучённости элементарной площади $dF \in \partial\Omega$ с элементом конечной площади dF_j, $j = \overline{1,M}$, выделенной на поверхности внешней среды, воспринимающей лучистый поток; σ – постоянная Больцмана; n – внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$; t – текущее время; t^* – конечное время наблюдения процесса; $Q_0(x)$ – заданное начальное распределение температуры; $F(x,t)$ – заданная правая часть уравнения (1), которая в задачах оптимального управления играет роль управляющего воздействия на процесс. Считаем, что функции теплофизических параметров $C(Q)$, $\lambda(Q)$, $\rho(Q)$, коэффициенты теплообмена $\alpha(Q)$ и взаимной облучённости $\varepsilon_{изл}(Q)$ положительны и непрерывны по аргументу Q. Функция начального распределения $Q_0(x)$ непрерывно дифференцируема по x вместе со своей второй производной. Правая часть – измеримая функция: $F(x,t) \in L_2(\Omega')$. В отношении искомой функции $Q(x,t)$ положим, что существует обобщённое решение начально-краевой задачи (1)-(3) в пространстве $V_2^{1,0}(\Omega')$ с нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}} = \max_{0\le t\le t^*}\left[\int_\Omega u^2 dx\right]^{1/2} + \left[\int_{\Omega'}\nabla u\cdot\nabla u dx dt\right]^{1/2}. \qquad (4)$$

Пусть искомая функция находится путем обращения оператора A:

$$Q = A^{-1}\left[F(x,t), \lambda(Q), \rho(Q), x, t\right] \qquad (5)$$

и выражается в конечном итоге в виде разложения (тройных рядов) по собственным функциям спектральной задачи Штурма-Лиувилля:

$$\bar{u}^{(n)}(x,t) = \sum_{k}^{\infty}\sum_{n}^{\infty}\sum_{m}^{\infty} \bar{u}_{knm}^{(n)}(t) K(\lambda_{knm}, x)\,,\ n = 1,2,\ldots \qquad (6)$$

где $K(\lambda_{knm}, x)$ – собственные функции задачи Штурма-Лиувилля для линейного оператора B; $\bar{u}_{knm}^{(n)}(t)$ – решение обыкновенного дифференциального уравнения для трансформанты КИП; λ_{knm} – собственные числа; n – номер итерации.

Отметим, что в (6) осуществлен переход от $Q(x,t)$ к функции $u(x,t)$ с помощью преобразования Кирхгофа, которое «стягивает» три нелинейности $\lambda(Q)$, $c(Q)$, $g(Q)$ в одну $a(Q)$ – коэффициент температуропроводности:

$$u = \lambda_0^{-1} \int_{Q_0}^{Q} \lambda(\xi) d\xi\,. \qquad (7)$$

Новыми признаками АМИЛ являются:

А) Сведение исходного нелинейного параболического оператора A к виду нестационарного, т.е. изменяемого от шага к шагу итераций, оператора $A^{(n)} = B + R^{(n)}$, где B – линейная часть параболического оператора; $R^{(n)}, (n = 1,2,\ldots)$ – итерируемая нелинейная поправка. Здесь $B = b_0\left(\partial Q/\partial t\right) - LQ;\ \ L = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2}$ – дифференциальный оператор Лапласа по пространственным переменным, $b_0 > 0$.

Признак позволяет использовать сжимающие свойства обратного оператора A^{-1}, которые проявляются в операциях интегрирования по пространственным переменным в схеме КИП при построении решения (6), где используется нелинейная поправка $R^{(n)}(\tilde{u}^{(n)}(x,t))$, итерируемая и аппроксимируемая достаточно гладкими функциями из конечномерного класса. Упомянутые сжимающие свойства оператора A^{-1} обеспечивают быструю сходимость итераций: в прикладных задачах за 5..7 шагов при невязке решения порядка 1%. Аналогичная процедура итерационной линеаризации проведена также для нели-

нейных граничных условий, где тепловой поток зависит от 4-й степени искомой функции (температуры).

Данный оригинальный признак в нелинейных начально-краевых задачах для параболических уравнений ранее не встречался.

Б) Аппроксимация решения на каждом n-ом шаге итерации начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с нелинейными граничными условиями рядами по собственным функциям линейного оператора B, в которых коэффициентами разложения служат решения для трансформант конечного интегрального преобразования (КИП) по объему Ω пространства, где анализируется процесс диффузии. При этом трансформанты $\widetilde{u}^{(n)}_{knm}(t)$ находятся довольно просто в виде решений обыкновенных дифференциальных уравнений, выражаемых экспоненциальными функциями. Здесь нижние индексы k,n,m соответствуют номерам собственных чисел, входящих в выражение ядра $K(\lambda_{knm},\vec{x})$ КИП.

Признак «Б» для нелинейных параболических начально-краевых задач не был известен, т.е. в схему КИП не входила итерируемая и аппроксимируемая гладкими функциями поправка $R^{(n)}(u^{(n-1)}(x,t))$.

В) Взаимодействие признаков «А» и «Б». С одной стороны, признак «А» в силу сжимающих свойств обратного оператора A^{-1} облегчает аппроксимацию нелинейной поправки $R^{(n)}(u^{(n-1)}(x,t))$, входящей в схему КИП, и, как следствие, улучшает сходимость рядов в (6). Практически достаточно удерживать 6..7 членов ряда по каждой переменной. С другой стороны, хорошая сходимость рядов позволяет ограничиться в прикладных задачах малым числом итераций $(n=5..7)$ в построении нестационарного оператора $A^{(n)}=B+R^{(n)}$. Другими словами, признаки «А» и «Б» усиливают друг друга. Это и есть проявление системного подхода при разработке АМИЛ, т.е. уменьшение энтропии (в нашем случае невязки искомого решения $\widetilde{u}^{(n)}(x,t)$) при объединении.

Таким образом, в (6) информацию о пространственном изменении искомой функции $u(x,y,z,t)$ несут ряды по собственным функциям конечных интегральных преобразований по пространственным переменным а информацию о временном изменении искомой функции – коэффициенты разложения $\widetilde{u}^{(n)}_{knm}(x,t)$. Общий эмерджентный

эффект АМИЛ – обеспечение аналитичности решения (6) при сохранении приближенной информации о нелинейностях исходной начально-краевой задачи.

Библиографический список

1. Малинецкий Г.Г. Теория самоорганизации. На пороге IV парадигмы // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5. – № 3. – С. 315-366.

2. Курдюмов С.П. Режимы с обострениями. Эволюция идеи / Сб. статей под ред. Г.Г. Малинецкого. – М.: Физматлит, 2006. – 312 с.

3. Егоров Д.Г. Моделирование финансовых рынков: синергетический подход // Мировая экономика и международные отношения. – 2007. – № 5. – С. 31-37.

4. Долгоносов Б.М. Нелинейная динамика экологических и гидрологических процессов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 440 с.

5. Горбатков С.А., Полупанов Д.В. Итеро-аппроксимативный метод решений нелинейных многомерных задач электротеплового поля // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21. – № 6. – С. 110-120.

Сведения об авторах

Горбатков Станислав Анатольевич – доктор технических наук, профессор кафедры математики и информатики Уфимского филиала Финансового университета при Правительстве РФ. E-mail: sgorbatkov@mail.ru

Полупанов Дмитрий Васильевич – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики Башкирского государственного университета. E-mail: demetrious@ mail.ru

УДК 519.6

Грибова О.В., Лабахуа Л.Р., Меркурьев И.В.

РАЗРАБОТКА ИНТЕГРИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ НАВИГАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ МОБИЛЬНОГО РОБОТА

Обсуждаются методы повышения точности задач навигации и управления автономным роботом. Полученные неголономные уравнения движения мобильного робота использованы для построения оп-

© Грибова О.В., Лабахуа Л.Р., Меркурьев И.В., 2017

тимального по быстродействию управления движением. Построена информационно-вычислительная схема для оптимальной по Калману оценки состояния робота.

Ключевые слова: динамика, управление, навигация, оценка состояния, точность

Gribova O.V., Labakhua L.R., Merkuryev I.V.

DEVELOPMENT OF INTEGRATED NAVIGATION AND MOTION CONTROL OF A MOBILE ROBOT

The problem navigation and control system of a mobile robot intended for automatic performance of technological operations in the remote and constrained conditions is discussed. The received nonholonomic equations of the mobile robot movement are used for optimal control. The information scheme of navigation and motion control system of the robot is constructed.

Key words: dynamics, control, navigation, state estimation, precision

Объектом исследований является мобильный робот–манипулятор KUKA, оснащённый роликонесущими колесами и многозвенным манипулятором (рис.1). На управляемом колесе робота установлены свободно вращающиеся ролики, оси которых расположены под углом 45 градусов к плоскости колеса. Угловое и линейное движение корпуса робота определяется согласованным вращением четырех ведущих колес, при этом положение осей вращения ведущих колес не изменяется относительно корпуса. Робот предназначен для автоматизации сложных технологических процессов и операций. Наличие роликонесущих колес позволяет перемещаться в стесненных условиях в любом направлении на плоскости.

Анализ существующих программных решений управления мобильным роботом показывает, что для управления движением робота используется каскадный подход, основанный на кинематической модели манипулятора и мобильной платформы. Управление приводом робота реализует программное кинематическое движение подвижных элементов робота с использованием пропорционально интегро-дифференциального регулятора в канале обратной связи. Недостатками указанного подхода является пренебрежение динамическими эффектами при движении робота. Кинематический способ организации движения не позволяет решать задачи оптимального по быстродействию и по энергозатратам управления движением, что приводит к

уменьшению срока автономного функционирования робота, к увеличению времени переходных процессов и погрешностей при выполнении целевых задач.

Рис. 1. Мобильный робот – манипулятор KUKA

В целях повышения точности робота поставлена задача оптимального по быстродействию согласованного управления движением мобильной колесной платформы при учете ограничений на силовые характеристики привода. Также поставлены задачи повышения точности навигации и управления движением автоматическим транспортным средством на основе комплексной обработки датчиков внешней измерительной информации, установленных на борту робота.

Актуальность проводимых исследований связана с подготовкой специалистов по направлению «Мехатроника и робототехника» и с выполнением научных исследований по приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в Российской Федерации.

1. Уравнения движения

Для получения уравнений движения робота использованы методы неголономной механики в форме уравнений Маджи [1-4]. Уравнения движения мобильной платформы дополнены уравнениями электропривода ведущих колес. Управляющими воздействиями в системе являются напряжения, подаваемые на электродвигатели робота.

Полученные уравнения неголономной электромеханической системы используются для расчета движения платформы. Наличие из-

быточного числа электродвигателей робота позволяет оптимизировать движение с учетом ограничений на характеристики привода.

2. Система автоматического управления

Управление траекторным движением робота и комплексная обработка первичных измерительных сигналов датчиков и систем мобильного робота ведется в бортовом компьютере робота. Для решения задач управления движения робота запишем уравнения мобильной платформы с роликонесущими колесами в форме конечноразностных уравнений

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = F\left(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}\right), \; k = 0,1,...,N \qquad (17)$$

где $\mathbf{x}^{(k)}$ – вектор состояния системы в момент времени t_k, изменяющийся под действием управления $\mathbf{u}^{(k)}$ и свойств динамической системы $F\left(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}\right)$. Управляющими воздействиями в системе являются напряжения на электродвигателях робота, ограниченные максимально допустимой величиной. Учитывая изменяющуюся помехо-сигнальную обстановку мобильного робота, требуется провести расчет стратегии управления на конечное число N шагов по времени. При траекторном движении мобильного робота необходимо построить следящую систему управления в форме обратной связи по оценке состояния.

Для решения задачи оптимального управления применен метод динамического программирования Беллмана [5], который позволяет определять оптимальное управление в форме обратной связи по компонентам вектора состояния.

Качество процесса управления оценивается функционалом J, характеризующим быстродействие и точность выполнения задачи:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} h\left(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}\right) + S_N\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \qquad (18)$$

где h – скалярная функция от компонентов вектора состояния и управления, например, для задачи оптимального быстродействия h=1; для задачи оптимального по энергозатратам управления h характеризует квадрат нормы управления; $S_N\left(\mathbf{x}^{(N)}\right)$ – скалярная функция, характеризующая стоимость конечного состояния. При оптимальном

процессе управления функционал (18) принимает минимальное (экстремальное) значение.

В соответствии с принципом оптимальности Беллмана движение оптимальной системы не зависит от предыстории, а определяется текущим состоянием системы и целью управления. На предпоследнем шаге $N-1$ оптимальное управление $\mathbf{u}_*^{(N-1)}$ зависит от текущего состояния системы $\mathbf{x}^{(N-1)}$, уравнений системы (17) и определяется из условия минимума частичной суммы $h\left(\mathbf{x}^{(N-1)},\mathbf{u}^{(N-1)}\right)+S_N\left(\mathbf{x}^{(N)}\right)$ в функционале (18):

$$S_{N-1}\left(\mathbf{x}^{(N-1)}\right)=\min_{\mathbf{u}\in U}\left[h\left(\mathbf{x}^{(N-1)},\mathbf{u}^{(N-1)}\right)+S_N\left(\mathbf{x}^{(N)}\right)\right]. \qquad (19)$$

Таким образом, определяется и запоминается оптимальное управление $\mathbf{u}_*^{(N-1)}\left(\mathbf{x}^{(N-1)}\right)$ в виде обратной связи от вектора состояния $\mathbf{x}^{(N-1)}$. Наименьшее значение частичной суммы $S_{N-1}\left(\mathbf{x}^{(N-1)}\right)$, которое было определено на шаге $N-1$, используется для расчета оптимального управления на шаге $N-2$. В этом случае в рекуррентном уравнении Беллмана (19) вместо N записывается $N-1$.

Таким образом, вычисленное в обратном времени оптимальное управление $\mathbf{u}_*^{(k)}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ используется в контуре управления роботом. В отличие от программного управления, стратегия управления в форме обратной связи позволяет парировать ошибки из-за возмущений, действующих на систему.

3. Разработка программного обеспечения

Мобильный робот управляется бортовым компьютером с операционной системой семейства Linux. Программное обеспечение бортового компьютера робота включает в себя низкоуровневые управляющие программы для сенсоров и двигателей, а также программные оболочки для разработки приложений для управления роботом на языках C++ и Python.

В целях участия в научно-техническом фестивале молодежи «Мобильные роботы» им. профессора Е.А. Девянина [1-2], в соревнованиях в области робототехнических систем по программам Eurobot и WorldSkills требуется разработка мобильных роботов и программного

обеспечения, позволяющего выполнить достаточно сложный регламент соревнований.

Одним из упражнений соревнований является максимально быстрое движение по контрастной полосе в заданной дорожной разметке. Для выполнения упражнения используется автоматическое распознавание дорожной разметки и максимальное по быстродействию управление движением.

На борту мобильного робота установлена стерео видеокамера, сигналы которой обрабатываются в бортовом вычислителе в целях выделения контрастной полосы дорожной разметки. В простейшем случае это делается путем усреднения позиций всех найденных контрастных переходов в строках видеосигналов.

Стратегия управления представляет собой заранее созданные массивы с кодовыми значениями управляющих сигналов, к которым обращается бортовой вычислитель по результатам комплексной обработки измерительных данных.

4. Комплексная обработка первичной измерительной информации

В составе интегрированной системы автоматического управления движением и навигации мобильного робота имеется набор датчиков для измерения углов поворота ведущих колес, комплект оптико-электронных и дальномерных устройств. Дальномерное устройство сканирует пространство и определяет направления и дальность до заданных ориентиров – маяков. По известным координатам маяков определяется текущее положение робота на испытательном полигоне. Для повышения точности определения координат и скорости робота построена оценка вектора состояния системы с использованием метода оптимальной фильтрации Калмана [6].

Вычисленная в прямом времени, от начальной метки времени к последующей, оценка состояния использует всю имеющуюся на борту измерительную информацию с учетом уровня систематических и случайных помех в первичной информации. В отличие от известных функций вычисления траектории и скорости робота, применение избыточного числа датчиков и фильтрация случайных помех в измерениях позволяет повысить точность решения поставленных задач навигации и управления. Проведенные стендовые испытания измерительных датчиков мобильного робота, позволяют на основе разработанной математической модели датчиков оценить параметры мате-

матической модели и компенсировать систематические погрешности в измерениях.

Заключение

Рассматриваемый мобильный робот используется для решения прикладных задач в различных сферах деятельности, в том числе для выполнения операций в опасной или труднодоступной для человека среде.

Разработка программного комплекса управления мобильного роботом на основе методов неголономной механики, математического моделирования и автоматического управления позволяет существенно повысить точность выполнения целевых задач за счет комплексной обработки первичных измерительных сигналов датчиков робота и построения оптимального по быстродействию управления в виде обратной связи.

В отличие от кинематической схемы управления, учет динамических свойств управляемого робота позволяет повысить точность решения задачи управления движением и увеличить быстродействие системы.

Предложенная информационно-вычислительная схема мобильного робота используется в учебных целях для подготовки бакалавров и магистров по направлению «Мехатроника и робототехника», а также для участия в международных робототехнических соревнованиях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-08-07939).

Библиографический список

1. Мартыненко Ю. Г. Управление движением мобильных колёсных роботов // Фундамент. и прикл. матем., Т.11.– № 8.– 2005.– С. 29–80.

2. Охоцимский Д.Е., Мартыненко Ю.Г. Новые задачи динамики и управления движением мобильных колёсных роботов // Успехи механики.– 2003.– Т. 2.– № 1.– С. 3-47.

3. Павловский В.Е., Алисейчик А.П. Методика исследования динамической комфортабельности движения многоколесного мобильного робота.– М.: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2010.– № 84.– 27 с.

4. Павловский В.Е., Шишканов Д.В. Исследование динамики и синтез управления колесными аппаратами с избыточной подвижностью.– М.: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006.– № 12.– 28 с.

5. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления.– М.: Наука, 1969.– 118 с.

6. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления.– М.: Наука, 1978.– 486 с.

Сведения об авторах

Грибова Ольга Валерьевна, ассистент, ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «МЭИ».

Лабахуа Лариса Робертовна, аспирант, ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «МЭИ».

Меркурьев Игорь Владимирович, доктор технических наук, заведующий кафедрой ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «МЭИ», MerkuryevIV@mpei.ru.

УДК 678+517.977.5

Григорьев И.В., Мустафина С.А.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СОПОЛИМЕРИЗАЦИИ А-МЕТИЛСТИРОЛА С МАЛЕИНОВЫМ АНГИДРИДОМ

Исследован механизм сополимеризации α-метилстирола с малеиновым ангидридом в гетерогенной среде. На основе механизма радикальной сополимеризации α-метилстирола с малеиновым ангидридом построена математическая модель. Подобраны условия процесса сополимеризации α-метилстирола с малеиновым ангидридом. Расчеты по модели показали удовлетворительное согласование с экспериментальными данными.

Ключевые слова: кинетическая схема; метод моментов; сополимеризация; среднечисленная молекулярная масса; среднемассовая молекулярная масса.

Grigoriev I.V., Mustafina S.A.

MODELING OF THE PROCESS OF CO-POLYMERIZATION OF A-METHYLSTYRENE WITH MALEIC ANHYDRIDE

Studied the mechanism of copolymerization of α-methylstyrene with maleic anhydride in a heterogeneous environment. Based on the mechanism of the radical copolymerization of α-methylstyrene with maleic anhydride mathematical model is constructed. Selected process conditions of

© Григорьев И.В., Мустафина С.А., 2017

copolymerization of α-methylstyrene with maleic anhydride. The model calculations showed satisfactory agreement with experimental data.

Keywords: kinetic scheme; method of moments; copolymerization; average molecular weight; weight average molecular weight.

Сополимер α-метилстирола с малеиновым ангидридом (α-метилстиромаль) может найти широкое применение в различных отраслях промышленности: текстильной – для защиты текстильного материала от биообрастания, в деревообрабатывающей – для защиты древесного материала от воздействия окружающей среды, в нефтяной – входит в состав буровых растворов, в роли стабилизатора при производстве полимеров, в качестве флокулянта при очистке промышленных и сточных вод и т.д [1]-[5].

Кинетическая схема полимеризации α-метилстирола с малеиновым ангидридом включает следующие элементарные стадии:

Инициирование свободных радикалов

$$I \xrightarrow{k_i} 2R,$$

Рост цепи

$$R + M \xrightarrow{k_{i1}} P_1,$$

Продолжение цепи

$$P_1 + M \xrightarrow{k_p} P_2, \cdots, P_i + M \xrightarrow{k_p} P_{i+1},$$

Обрыв цепи в результате взаимодействия с радикалом

$$P_n + R \xrightarrow{k_r} Q_n,$$

Рекомбинация активных цепей

$$P_n + P_m \xrightarrow{k_{rec}} Q_{n+m},$$

Диспропорционирование активных цепей

$$P_n + P_m \xrightarrow{k_{dis}} Q_n + Q_m,$$

где M – мономер, R – свободный радикал, I – инициатор, P_n, Q_n – активные («растущие») и неактивные («мертвые») цепи сополимера длиной n, соответственно, содержащие n звеньев M мо-

номера, $k_i, k_{i1}, k_p, k_r, k_{rec}, k_{dis}$ – константы элементарных стадий инициирования, роста и стадий обрыва цепи соответственно [6].

Составляя матрицу стехиометрических коэффициентов и умножая ее на вектор-столбец скоростей реакции, получим бесконечную систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающую процесс полимеризации α-метилстирола с малеиновым ангидридом. Далее используя метод моментов, бесконечную систему дифференциальных уравнений сведем к конечной системе относительно моментов распределения, применяемых в статистике и теории вероятностей для оценки распределения случайных величин. Моменты *j* – порядка активных и неактивных цепей полимера, рассчитываются по формулам:

$$\mu_j = \sum_{i=2}^{\infty} i^j [P_i], \tag{1}$$

$$\eta_j = \sum_{i=2}^{\infty} i^j [Q_i] \tag{2}$$

Для расчета средних молекулярных масс сополимера необходимо знание моментов до второго порядка включительно. Тогда система дифференциальных уравнений относительно моментов ММР сополимера с помощью формул (1)-(2) примет вид:

$$\frac{d[I]}{dt} = -k_i[I],$$

$$\frac{d[R]}{dt} = 2k_i[I] - k_{i1}[M][R] - k_r[P_1][R],$$

$$\frac{d[M]}{dt} = -[M]k_p\mu_0 - [M]k_{i1}[R],$$

$$\frac{d[P_1]}{dt} = k_{i1}[M][R] - k_p[M][P_1] - k_r[R][P_1] - (k_{rec} + k_{dis})[P_1]^2\mu_0,$$

$$\frac{d[Q_1]}{dt} = k_r[R][P_1] + \frac{1}{2}k_{rec}[P_1][R] + k_{dis}[P_1]^2\mu_0,$$

$$\frac{d\mu_0}{dt} = k_p[M][P_1] - k_r[R]\mu_0 - (k_{rec} + k_{dis})[P_1]\mu_0^2,$$

$$\frac{d\mu_1}{dt} = k_p[M][P_1] + k_p[M][P_1]\mu_0 - k_r[R]\mu_1 - (k_{rec} + k_{dis})[P_1]\mu_1\mu_0, \quad (3)$$

$$\frac{d\mu_2}{dt} = k_p[M][P_1]\mu_2 + 2k_p[M][P_1]\mu_1 + k_p[M][P_1]\mu_0 -$$
$$- k_p[M]\mu_2 - k_r[R]\mu_2 - (k_{rec} + k_{dis})[P_1]\mu_2\mu_0,$$

$$\frac{d\eta_0}{dt} = k_r[R]\mu_0 + k_{rec}[P_1]^2\mu_0^2 + k_{dis}[P_1]\mu_0^2,$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = k_r[R]\mu_1 + k_{rec}[P_1]^2\mu_1\mu_0 + k_{dis}[P_1]\mu_1\mu_0,$$

$$\frac{d\eta_2}{dt} = k_r[R]\mu_2 + k_{rec}[P_1]^2(\mu_2\mu_0 + \mu_1^2) + k_{dis}[P_1]\mu_2\mu_0.$$

где $[\ldots]$ – концентрации соответствующих веществ ($[M]$ – мономера, $[R]$ – свободного радикала, $[I]$ – инициатора, $[P_n], [Q_n]$ – активных («растущих») и неактивных («мертвых») цепей сополимера длиной n, соответственно, содержащие n звеньев M мономера), f – эффективность инициирования.

Начальные условия для системы (3) имеют вид:

$$[I^{(0)}] = [I(0)], [M^{(0)}] = [M(0)], [R^{(0)}] = 0, [P_1^{(0)}] = 0, [Q_1^{(0)}] = 0, \quad (4)$$
$$\mu_k(0) = 0, \eta_k(0) = 0, k = 0,1,2.$$

Найденные значения моментов используются для нахождения средних молекулярных масс M_n, M_w [7].

Величина M_n определяет среднюю длину макромолекул полимера и называется среднечисленной молекулярной массой. Она рассчитывается по следующей формуле:

$$M_n(t) = m\frac{\mu_1(t) + \eta_1(t)}{\mu_0(t) + \eta_0(t)}, \quad (5)$$

где m – молекулярная масса мономера.

Если параметр M_n характеризует, как правило, низкомолекулярную часть ММР, то параметр M_w определяет среднюю часть распределения молекулярной массы и рассчитывается по формуле:

$$M_w(t) = m\frac{\mu_2(t)+\eta_2(t)}{\mu_1(t)+\eta_1(t)}, \qquad (6)$$

На рис.1 – рис.2 представлены расчетные значения среднечисленных и среднемассовых молекулярных масс в зависимости от времени полимеризацииα-метилстирола с малеиновым ангидридом, полученные на основе математической модели (3)-(4) и формул (5)-(6) для вычисления M_n и M_w.

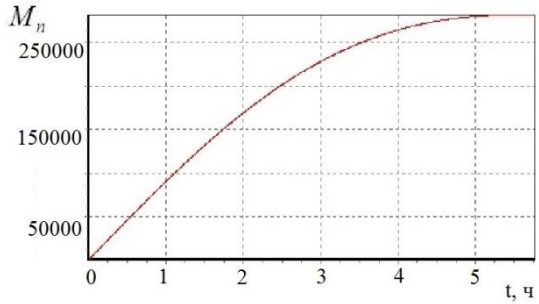


Рис. 1. Зависимость расчетных значений среднечисленных молекулярных масс от времени

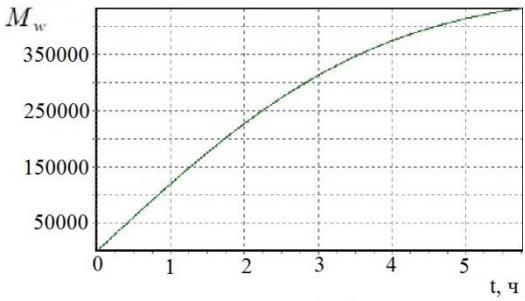


Рис. 2. Зависимость расчетных значений среднемассовых молекулярных масс от времени

Таким образом, в работе описан процесс получения сополимера α-метилстирола и малеинового ангидрида в среде неароматического растворителя с применением азоинициатора. Подобраны условия полимеризации. На основе математической модели построена зависи-

мость значений концентраций мономера от времени полимеризации, а также найдены значения среднечисленных и среднемассовых молекулярных масс.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-47-020068 и проекта №13.5143.2017/БЧ, выполняемого вузом в рамках государственного задания Минобрнауки РФ.

The study was funded by RFBR according to the research project № 17-47-020068 and project No. 13.5143.2017/ BCH, carried out by the University in the framework of the State Task of the Ministry of Education of the Russian Federation.

Библиографический список

1. Михайлова Т.А., Григорьев И.В., Мустафина С.А. Исследование синтеза бутадиен-стирольного сополимера на основе метода Монте-Карло с учетом распределения по времени пребывания // Фундаментальные исследования.– 2015.– № 5-3.– С. 517-520.

2. Григорьев И.В., Мустафина С.А. Математическое моделирование и оптимизация процессов полимеризации // В сборнике трудов III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Математическое моделирование процессов и систем».– 2014.– С. 27-30.

3. Григорьев И.В., Михайлова Т.А., Мустафина С.А. О численном алгоритме метода вариаций в пространстве управлений // Фундаментальные исследования.– 2015.– № 5-2.– С. 279-283.

4. Григорьев И.В., Мустафина С.А. Нахождение оптимального программного управления методом итераций // Путь науки.– 2015.– № 5 (15).– С. 10-13.

5. Григорьев И.В., Мифтахов Э.Н., Мустафина С.А. Моделирование процесса сополимеризации стирола с малеиновым ангидридом // Вестник Казанского технологического университета.– 2016.– Т. 19.– № 17.– С. 127-131.

6. Шангареева Г.Р., Григорьев И.В., Мустафина С.А. Сравнительный анализ численных алгоритмов решения задач оптимального управления // Вестник Казанского технологического университета.– 2016.– Т. 19.– № 8.– С. 119-122.

7. Григорьев И.В., Мустафина С.А. Решение задач глобальной безусловной оптимизации функций многих переменных с использо-

ванием параллельных технологий // Системы управления и информационные технологии.– 2016.– Т. 66.– № 4.1.– С. 138-141.

8. Григорьев И.В., Мустафина С.А. Глобальная оптимизация функций многих переменных на графических процессорах // Техника машиностроения.– 2016.– № 2.– С. 42-45.

9. Григорьев И.В., Мустафина С.А. Моделирование процесса полимеризации стирола с малеиновым ангидридом // Математические методы в технике и технологиях. ММТТ.– 2016.– № 7.– С. 26-27.

10. Степанова Л.Ю., Григорьев И.В., Абдрашитов Я.М., Мустафина С.А., Мифтахов Э.Н. Моделирование процесса сополимеризации стирола с малеиновым ангидридом в гомогенной среде // Башкирский химический журнал.– 2015.– Т. 22.– № 4.– С. 13-19.

11. Григорьев И.В., Мустафина С.А. Нахождение оптимального программного управления методом вариации // Альтернативные источники энергии в транспортно-технологическом комплексе: проблемы и перспективы рационального использования.– 2015.– Т. 2. – № 1. С. 254-257.

12. Григорьев И.В., Мифтахов Э.Н., Мустафина С.А. Математическое моделирование процесса полимеризации стирола с малеиновым ангидридом в гомогенной среде // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем материалы X Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов / под ред. И.В. Бойкова.– 2016.– С. 248-252.

13. Григорьев И.В., Мустафина С.А. Моделирование процесса полимеризации стирола с малеиновым ангидридом // Математическое моделирование процессов и систем. Материалы V Всерос. науч.-практ. конф., приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова.– 2016.– С. 115-121.

14. Григорьев И.В., Шангареева Г.Р., Мустафина С.А. Анализ численных алгоритмов решения задач оптимального управления // Математическое моделирование процессов и систем. Материалы V Всерос. науч.-практ. конф., приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова.– 2016.– С. 192-198.

Сведения об авторах

Григорьев Игорь Владимирович, аспирант кафедры математического моделирования Стерлитамакского филиала БашГУ. E-mail: grigoryevigor@mail.ru

Мустафина Светлана Анатольевна, доктор физико-математических наук, профессор Стерлитамакского филиала БашГУ. E-mail: MustafinaSA@rambler.ru

УДК 517.518.2

Гусейнли А.А., Селим Явуз

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО $L_{p;r}$ И СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ КОШИ

Вводится функциональное пространство $L_{p;r}$, которое непрерывно вложено в L_p. Исходя из нормы этого пространства определяются соответствующие классы Харди, изучаются некоторые свойства функций этих классов, обобщаются основные классические факты. Доказывается ограниченность сингулярного оператора в этом пространстве.

Ключевые слова: функциональное пространство, классы Харди, сингулярный интеграл.

Huseynli A.A., Selim Yavuz

FUNCTIONAL SPACES $L_{p;r}$ AND CAUCHY SINGULAR INTEGRAL

The space $L_{p;r}$ of functions which is continuously embedded into L_p space is introduced. Corresponding Hardy classes are defined, some properties of functions from these classes are studied, and main classical theorems are proved in the framework of these spaces.

Keywords: functional spaces, Hardy classes, singular integrals.

В связи с обширными приложениями в различных областях математики и механики в последнее время сильно возрос интерес к изучению обширных задач математического анализа и теории дифференциальных уравнений в нестандартных функциональных пространствах.

Вводится функциональное пространство $L_{p;r}$, которое непрерывно вложено в L_p.

Рассмотрим обычное лебегово пространство функций $L_p \equiv L_p(-\pi,\pi), 1 \le p \le +\infty$. Через $\hat{f} \equiv \{f_n\}_{n\in Z}$ будем обозначать Фурье образ функции $f \in L_p$:

$$f_n \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, n \in Z .$$

Пусть

$$l_r \equiv \left\{ \{a_n\}_{n\in Z} : \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^r < +\infty \right\}.$$

Положим

$$L_{p;r} \equiv \left\{ f \in L_p : \hat{f} \in l_r \right\},$$

где $r \in [1,+\infty]$ – некоторое число и примем норму $\|\cdot\|_{r;p}$ в $L_{p;r}$:

$$\left\| \hat{f} \right\|_{r;p} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^r \right)^{1/r} + \|f\|_p \equiv \left\| \hat{f} \right\|_{l_r} + \|f\|_p ,$$

где

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} .$$

Всюду в дальнейшем через ω будем обозначать единичный шар $\omega = \{z \in C : |z| < 1\}$ на комплексной плоскости C и пусть $\gamma = \partial\omega$ единичная окружность. Пусть $f \in L_1(\gamma)$ некоторая функция. Рассмотрим интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau, \ \ z \notin \gamma ,$$

и соответствующий ему сингулярный интеграл

$$(Sf)(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - \tau}, \tau \in \gamma .$$

Хорошо известно, что Sf существует п.в на γ [1]-[2]. Положим $f_r(t) = f\left(re^{it}\right)$. Пусть

$$H^+_{p;\nu} = \left\{ f : f \ \textit{аналитична в} \ \omega \ \textit{и} \ \|f\|_{H^+_{p,\nu}} < +\infty \right\},$$

где $\|f\|_{H^+_{p;\nu}} = \sup\limits_{0<r<1} \|f_r(\cdot)\|_{L_{p;\nu}}$.

Пусть $f \in H^+_{p;\nu}$, $1< p <+\infty$, $1\le \nu \le +\infty$, и $f(re^{it}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n r^n e^{int}$, ее разложение Тейлора в нуле. Обозначим через $f^+(\tau)$ некасательные граничные значения $f(\cdot)$ на γ.

Справедлива

Теорема 1. *Функция* $f(\cdot)$ *принадлежит классу* $H^+_{p;\nu}$, $1\le p <+\infty$, $1\le \nu \le +\infty$, *тогда и только тогда, когда* $f^+(\cdot)\in L_{p;\nu}$; *при этом имеет место формула Коши*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f^+(\tau)}{\tau - z} dz,\ \forall z \in \omega.$$

Следующая теорема доказывает ограниченность сингулярного оператора в пространстве $L_{p;r}$.

Теорема 2. *Сингулярный оператор* S *ограниченно действует в* $L_{p;\nu}$, $1< p <+\infty$, $1\le \nu \le +\infty$.

Справедлив следующий аналог классической теоремы Смирнова.

Теорема 3. *Пусть* $f \in H^+_{p_1;r_2}$, *и* $f^+ \in L_{p_2;r_1}$, *где* $1\le p_1 < p_2 <+\infty$, $1\le r_1 < r_2 \le +\infty$. *Тогда* $f \in H^+_{p_2;r_1}$.

Библиографический список

1. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного // М.: Наука. – 1966. – 626 с.

2. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций // М.-Л.: Гостехиздат. – 1950. – С. 324.

Сведения об авторах

Гусейнли Али Аббас, доктор философии по математике, Университет Хазар; старший научный сотрудник, ИММ НАН Азербайжана. E-mail: alihuseynli@gmail.com

Селим Явуз, Технический Университет Йылдыз, Турция. E-mail:selimyyavuz@gmail.com

УДК 519.245:678.7

Гусейнов И.М., Достуев Ф.З.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ПО СПЕКТРАЛЬНЫМ ДАННЫМ

В работе изучено восстановление оператора Штурма-Лиувилля с условиями разрыва по спектральным данным.

Ключевые слова: операторы Штурма-Лиувилля, обратные спектральные задачи, условия разрыва.

Huseynov H.M., Dostuyev F.Z.

RECOVERY OF STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH DISCONTINUITY ONDITIONS WITH RESPECT TO SPECTRAL DATA

In the paper studied the recovery of Sturm-Liouville operator with discontinuity conditions with respect to spectral data.

Keywords: Sturm-Liouville operators,inverse spectral problems, discontinuity conditions.

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y''+q(x)y = \lambda y, 0 < x < \pi, \tag{1}$$

с условиями разрыва в точке $a \in (0,\pi)$

$$y(a+0) = \alpha y(a-0),\ y'(a+0) = \alpha^{-1} y'(a-0), \tag{2}$$

где $q(x)$ – действительная функция, принадлежащая пространству $L_2(0,\pi)$, λ – комплексный параметр, a и α – вещественные числа, причем $a \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right), \alpha > 0, \alpha \neq 1$. Присоединим к (1)-(2) граничные условия

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{3}$$

и

$$y(0) = y'(\pi) = 0. \tag{4}$$

Задачу (1)-(3) будем обозначать через P_1, а задачу (1), (2), (4) – через P_2. В настоящей работе решаются следующие обратные зада-

© Гусейнов И.М., Достуев Ф.З., 2017

чи: (I) по спектру и нормировочному числу краевой задачи P_1 построить функцию $q(x)$; (II) по спектрам задач P_1 и P_2 восстановить функцию $q(x)$. Отметим, что краевые задачи с условиями разрыва внутри интервала связаны с разрывными или негладкими свойствами среды [1,2]. При отсутствии условий разрыва (т.е. когда в условиях (2) $\alpha = 1$) обратные задачи достаточно полно изучены в монографиях [3]-[6] и др.

2. Обозначим через $s(x,\lambda)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda) = 0, s'(0,\lambda) = 1$ и условиям разрыва (2). Характеристическими функциями краевых задач P_1 и P_2, нули которых совпадают собственными значениями этих задач, являются целые функции $\Delta_1(\lambda) = s(\pi,\lambda)$ и $\Delta_2(\lambda) = s'(\pi,\lambda)$ соответственно. Собственные значения $\{\lambda_n\}, \{\gamma_n\}$ краевых задач P_1 и P_2, соответственно и нормировочное число

$$\alpha_n = \int_0^\pi s^2(x,\lambda_n)dx$$

задачи P_1 обладают следующими свойствами [15].

а) Краевые задачи P_1 и P_2 имеют счетное множество собственных значений. Все собственные значения вещественны и простые.

б) Числа λ_k и γ_k, перемежаются в следующем смысле:

$$-\infty < \gamma_1 < \lambda_1 < \gamma_2 < \lambda_2 < \gamma_3 < \lambda_3 < \ldots < \gamma_k < \lambda_k < \ldots \qquad (5)$$

в) λ_k и γ_k удовлетворяют при $k \to \infty$ асимптотическим формулам

$$\sqrt{\lambda_k} = \sqrt{\lambda_k^0} + \frac{a_k}{\sqrt{\lambda_k^0}} + \frac{\varepsilon_k}{k}, \sqrt{\gamma_k} = \sqrt{\gamma_k^0} + \frac{b_k}{\sqrt{\gamma_k^0}} + \frac{\delta_k}{k}, \{\varepsilon_k\}, \{\delta_k\} \in l_2, \qquad (6)$$

где λ_k^0 и γ_k^0 нули характеристических функций P_1 и P_2 при $q(x) \equiv 0$.

г) Нормировочные числа α_k удовлетворяет асимптотическую формулу

$$\alpha_k = \alpha_k^0 + \frac{\omega_k}{k}, \omega_k \in l_2, \qquad (7)$$

где α_k^0 – нормировочные числа краевой задачи P_1 при $q(x) \equiv 0$:

$$\alpha_k^0 = \int_0^\pi s_0^2\left(x, \lambda_k^0\right)dx,$$

$$s_0(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sin \rho x}{\rho}, 0 < x < a, \\ \alpha^+ \dfrac{\sin \rho x}{\rho} + \alpha^- \dfrac{\sin \rho(2a - x)}{\rho}, a < x < \pi, \left(\lambda = \rho^2\right) \end{cases}$$

где $\alpha^{\pm} = \dfrac{1}{2}\left(\alpha \pm \dfrac{1}{\alpha}\right)$.

д) Система функций $\left\{s_0\left(x, \lambda_n\right)\right\}_{n \geq 1}$ полна в пространстве $L_2(0, \pi)$.

3. В этом пункте приводятся некоторые представления для решения $s(x, \lambda)$ и основное уравнение обратной задачи. Как устанавливается в [9], решение $s(x, \lambda)$ представимо в виде:

$$s(x,\lambda) = s_0(x,\lambda) + \int_0^x A(x,t)\frac{\sin \lambda t}{\lambda}\,dt, \tag{8}$$

где функция $A(x,t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$A(x,t) = A_0(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^x q(u)\int_{t-x+u}^{t+x-u} A(u,\xi)\,d\xi\,du, 0 < x < a, \tag{9}$$

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 1. *Если функция* $A(x,t)$ *удовлетворяет уравнениям (9), то функция* $s(x,\lambda)$, *определенная формулой (8), является решением уравнения (1), с коэффициентом*

$$q(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} A(x,x), 0 < x < a, \\ \dfrac{\alpha^+}{2} A(x,x), a < x < \pi, \end{cases} \tag{10}$$

удовлетворяющее условиям разрыва (2) *и начальным условиям* $s(0,\lambda) = 0, s'(0,\lambda) = 1$.

Представлению (8) можно дать «треугольный» вид:

$$s(x,\lambda) = s_0(x,\lambda) + \int_0^x \tilde{A}(x,t)s_0(t,\lambda)dt, \tag{11}$$

Следующая теорема позволяет свести первую обратную задачу (I), т.е. определения $q(x)$ по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}$, к решению линейного интегрального уравнения.

Теорема 2. *При каждом фиксированном* $x \in (0,\pi)$ *ядро* $\tilde{A}(x,t)$ *представления* (11) *удовлетворяет линейному интегральному уравнению*

$$\tilde{A}(x,t) + F(x,t) + \int_0^x \tilde{A}(x,\xi)F(\xi,t)d\xi = 0, 0 < t < x, \tag{12}$$

где

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{s_0(x,\lambda_n)s_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{s_0(x,\lambda_n^0)s_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\right) \tag{13}$$

Имеет место следующая теорема о разрешимости основного уравнения.

Теорема 3. *При каждом фиксированном* $x \in (0,\pi)$ *основное уравнение* (12) *имеет единственное решение* $A(x,\cdot) \in L_2(0,\pi)$.

Следствие. *Коэффициент* $q(x)$ *уравнения* (1) *однозначно определяется по спектральным данным* $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ *задачи* P_1.

4. Приведем теперь основные теоремы обратных задач (I) и (II).

Теорема I. *Для того, чтобы вещественные числа* $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ *были спектральными данными для некоторой краевой задачи вида* P_1 *с* $q(x,) \in L_2(0,\pi)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

I_1) $\lambda_k \neq \lambda_m$ *при* $k \neq m$ *и для* λ_k *справедлива асимптотика из* (6);

I_2) $\alpha_k > 0$ *и справедлива асимптотика* (7);

I_3) *решение основного уравнения* (12) *удовлетворяет условию*

$$\tilde{A}(x,x)|_{a+0} = \tilde{A}(x,x)|_{a-0}$$

При этом функция $q(x)$ *восстанавливается однозначно по* $\{\lambda_k\}$ *и* $\{\alpha_k\}$.

Теорема II. *Для того чтобы две последовательности вещественных чисел* $\{\lambda_k\}$ *и* $\{\alpha_k\}$ *были спектрами краевых задач вида* P_1 и P_2 *соответственно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

II_1) *справедливы неравенства* (5)*;*

II_2) *имеют место асимптотические формула* (6)*;*

II_3) *решение* $\tilde{A}(x,t)$ *основного уравнения* (12) *удовлетворяет условию* $\tilde{A}(x,x)|_{a+0} = \tilde{A}(x,x)|_{a-0}$, *где в* (13) *последовательность* $\{\alpha_n\}$ *имеет вид:*

$$\alpha_n = \dot{\Delta}_1(\lambda_n)\Delta_2(\lambda_n) \tag{14}$$

в котором

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= (\pi\alpha^+ + (2a-\pi)\alpha^-)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{\lambda_k^0}, \\ \Delta_2(\lambda) &= \frac{1}{\alpha}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k-\gamma}{\gamma_k^0}, \end{aligned} \tag{15}$$

При этом функция $q(x)$ *восстанавливается однозначно по* $\{\lambda_k\}$ *и* $\{\gamma_k\}$.

Библиографический список

1. Литвиненко О.И., Сошников В.И. Теория неоднородных линий передач и ее приложения в радиоэлектронике.– М.: Радио, 1964.– 536 с.

2. Lapwood F.R., Usami T. Free oscillations of the Earth. – Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1981.– 231 p.

3. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.– Киев: Наукова думка, 1977.– 332 с.

4. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля.– М.: Наука, 1984.– 240 с.

5. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. Москва: Физматлит, 2007.– 384 с.

6. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимся краевыми условиями. Москва: Изд-во Московского университета, 2009.– 182 с.

Сведения об авторах

Гусейнов Идаят Мамед оглы, профессор кафедры прикладной математики Бакинского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики и механики НАН Азербайджана. E-mail: hmhuseynov@gmail.com.

Достуев Фамил Закир оглы, докторант Института математики и механики НАН Азербайджана. E-mail: famil.turksoygw@gmail.com.

УДК 517.95

Гущина В.А.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЕЗИНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа со степенным вырождением на линии перехода в прямоугольной области приведено обоснование существования решения краевой задачи с нелокальным граничным условием. Решение построено в виде суммы ряда. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей.

Ключевые слова: уравнение типа Чаплыгина, задача Дезина, существование, ряд, сходимость, малые знаменатели.

Gushchina V.A.

EXISTENCE OF THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF DESIN FOR THE *DEGENERACY* EQUATION OF THE MIXED TYPE

For an equation of mixed elliptic-hyperbolic type with power degeneracy on the transition line in a rectangular region, the existence of a solution of a boundary value problem with a nonlocal boundary condition is proved. The solution is constructed as a sum of a series. In justifying the convergence of the series, the problem of small denominators arises.

Keywords: Chaplygin type equation, Desin problem, existence, series, convergence, small denominators.

© Гущина В.А., 2017

Рассмотрим вырождающегося уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} y)\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} - b^2 (\operatorname{sgn} y)\,|y|^m u = F(x,y) \qquad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le l, -\alpha \le y \le \beta\}$, где $m > 0,\ b \ge 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ l > 0$ – заданные действительные постоянные. Для уравнения (1) в области D и поставим задачу А.А. Дезина [1].

Задача Дезина. *Найти функцию* $u(x,y)$*, удовлетворяющую условиям:*

$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-)$;

$Lu = F(x,y), \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-$;

$$u(0,y) = u(l,y), u_x(0,y) = u_x(l,y), \quad -\alpha \le y \le \beta; \qquad (4)$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l; \qquad (5)$$

$$u_y(x,-\alpha) - \lambda u(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (6)$$

где $F(x,y),\ \varphi(x),\ \psi(x)$ *– заданные функции,* $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, λ – заданный числовой параметр.

В работе [1] показано, что метод поиска разрешимых расширений для дифференциальных операторов может быть адаптирован к оператору Лаврентьева–Бицадзе с условиями периодичности (4) и однородными условиями (5) и (6) (где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$).

Данная работа является продолжением работ [2 – 6], где была изучена задача (2) – (6) для уравнения (1) при $F(x,y) \equiv 0,\ m = 0$ и $F(x,y) \ne 0,\ m = 0,\ b = 0$.

В данной работе решение задачи (2) – (6) при $F(x,y) \equiv 0$ построено в виде суммы ряда, коэффициенты которого определяются однозначно при

$$E(n) = I_{\frac{1}{2q}}\left(p_n \beta^q\right) E_1(n) \ne 0,$$

где

$$E_1(n) = \frac{\pi}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2q}\right)} M_n - \frac{K_{\frac{1}{2q}}\left(p_n \beta^q\right)}{I_{\frac{1}{2q}}\left(p_m \beta^q\right)} J_{\frac{1}{2q}-1}\left(p_m \alpha^q\right),$$

$$\lambda_{qn} = \frac{\lambda}{\frac{1}{2q}\Gamma\left(\frac{-1}{2q}\right)}\left(\frac{2}{p_n}\right)^{\frac{1}{2q}} \frac{1}{p_n q \alpha^{q-\frac{1}{2}}},\ qp_n = \sqrt{(2\pi n)^2 + b^2},$$

$$M_n = J_{1-\frac{1}{2q}}\left(p_n\alpha^q\right) - J_{\frac{1}{2q}-1}\left(p_n\alpha^q\right) + \lambda_{qn},\ 2q = m+2,$$

$J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ – функции Бесселя, $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

При достаточно больших n выражение $E(n)$ может стать достаточно малым, в связи с этим возникает проблема «малых знаменателей». Поэтому, для обоснования существования решения задачи необходимо показать, что выражение $E_1(n)$ при больших n отделено от нуля с соответствующей асимптотикой.

Лемма 1. Если $b \ge 0, \beta > 0$ и $\alpha_{ql} = \frac{\alpha_q}{l} = \frac{p}{t}$ – рациональное число, где $p,t \in N, (p,t) = 1, (t,4) = 1$, то существуют положительные постоянные уравнение $n_0 \in N$ и C_0, такие, что для любых $n > n_0$ справедлива оценка

$$\left|\sqrt{n}E_1(n)\right| \ge C_0 > 0.$$

Лемма 2. Если $b > 0, \beta > 0$ и $\alpha_{ql} = \frac{\alpha_q}{l} = \frac{p}{t}$ – рациональное число, где $p,t \in N,\ (p,t) = 1,\ (t,4) > 1$, то существуют положительные постоянные C_0, $n_0 \in N$, такие, что при всех $n > n_0$ справедлива оценка

$$\left|n^{1+\frac{1}{2q}}E_1(n)\right| \ge C_0 > 0.$$

На основании этих лемм при некоторых условиях на граничные функции доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Если

$\varphi(x) \in C^3[0,l], \psi(x) \in C^{2+d}[0,l],\ \frac{1}{2} \le d \le 1,$

$\varphi'(l) = \varphi'(0),\ \psi(l) = \psi(0),\ \psi''(l) = \psi''(0),$ $E_1(n) \ne 0$

при $n=\overline{1,n_0}$, $1+\beta\lambda\neq 0$ и выполнены условия леммы 1, то задача (2) – (6) при $F(x,y)\equiv 0$ однозначно разрешима и это решение определяется рядом

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{l}}u_0(y)+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n(y)\cos\frac{2\pi nx}{l}+v_n(y)\sin\frac{2\pi nx}{l}\right] \qquad (7)$$

Теорема 2. Если $\varphi(x)\in C^{5+d}[0,l]$, $\psi(x)\in C^{3+d}[0,l]$, $\varphi'(l)=\varphi'(0)$, $\varphi'''(l)=\varphi'''(0)$, $\psi(l)=\psi(0)$, $\psi''(l)=\psi''(0)$ и $E_1(n)\neq 0$ при $n=\overline{1,n_0}$, $1+\beta\lambda\neq 0$ и выполнены условия леммы 2, то задача (2) – (6) при $F(x,y)\equiv 0$ однозначно разрешима и это решение определяется рядом (7), здесь

$$u_n(y)=\frac{1}{E(n)}[\varphi_n\beta^{-\frac{1}{2}}\sqrt{y}\,A_n(y)+\psi_n\sqrt{y}\,B_n(y),\ y>0,$$

$$u_n(y)=\frac{1}{E(n)}[-\varphi_n\beta^{-\frac{1}{2}}\sqrt{-y}C_n(-y)+\psi_n\sqrt{-y}\,D_n(-y)],\ y<0,$$

$$A_n(y)=C_qM_nI_{\frac{1}{2q}}\left(p_ny^q\right)-J_{\frac{1}{2q}-1}\left(p_n\alpha^q\right)K_{\frac{1}{2q}}\left(p_ny^q\right),$$

$$B_n(y)=R_nK_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q)-N_nI_{\frac{1}{2q}}\left(p_ny^q\right),$$

$$C_n(-y)=C_qM_nJ_{\frac{1}{2q}}\left(p_n(-y)^q\right)+J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n\alpha^q)\overline{Y_{\frac{1}{2q}}}(p_n(-y)^q),$$

$$D_n(-y)=N_nJ_{\frac{1}{2q}}\left(p_n(-y)^q\right)+R_nJ_{\frac{1}{2q}-1}\overline{Y_{\frac{1}{2q}}}(p_n(-y)^q),$$

$$N_n=\frac{K_{\frac{1}{2q}}\left(p_n\beta^q\right)}{p_nq\alpha^{q-\frac{1}{2}}},\ R_n=\frac{I_{\frac{1}{2q}}\left(p_n\beta^q\right)}{p_nq\alpha^{q-\frac{1}{2}}},\ C_q=\frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\pi}{2q}\right)},$$

$$\overline{Y_{\frac{1}{2q}}}\left(p_n(-y)^q\right)=C_q\left[J_{\frac{1}{2q}}\left(p_n(-y)^q\right)+J_{-\frac{1}{2q}}\left(p_n(-y)^q\right)\right].$$

Коэффициент $u_0(y)$ при $b>0$ получается из функции $u_n(y)$ при $n=0$. При $b=0$ функция имеет вид

$$u_0(y)=\varphi_0\frac{\lambda y+1}{1+\beta\lambda}+\psi_0\frac{y-\beta}{1+\beta\lambda},1+\beta\lambda\neq 0,$$

$$v_n(y)=\frac{1}{E(n)}[\overline{\varphi}_n\beta^{-\frac{1}{2}}\sqrt{y}\,A_n(y)+\overline{\psi}_n\sqrt{y}\,B_n(y),y>0,$$

$$v_n(y)=\frac{1}{E(n)}[-\overline{\varphi}_n\beta^{-\frac{1}{2}}\sqrt{-y}C_n(-y)+\overline{\psi}_n\sqrt{-y}\,D_n(-y)],\ \ y<0,$$

$$\varphi_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{2\pi nx}{l}dx,\ \ \psi_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{2\pi nx}{l}dx,$$

$$\overline{\varphi_n}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{2\pi nx}{l}dx,\ \ \overline{\psi_n}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\psi(x)\cos\frac{2\pi nx}{l}dx.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-31-00421).

Библиографический список

1. Dezin A.A. On the solvable extensions of partial differential operators // Outlines of the Joint Soviet – American Symposium on Partial Differential Equations. – 1963. – P. 65–66.

2. Сабитов К.Б., Новикова В.А. Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Известия вузов. Математика. – 2016. – № 6. – С. 61–72.

3. Сабитов К.Б., Гущина (Новикова) В.А. Задача А.А. Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева – Бицадзе // Известия вузов. Математика. – 2017. – № 3. – С. 37–50.

4. Гущина В.А. Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения смешанного эллиптико–гиперболического типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ-мат. науки. – 2016. – Т. 20. – № 1. – С. 1–11.

5. Гущина (Новикова) В.А. Задача А.А. Дезина для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Материалы V Всероссийской научно-практической конференции «Математическое моделирование процессов и систем», приуроченной к 110-летию со дня рождения акад. А.Н. Тихонова, Стерлитамак. – Часть II. – С. 198–202.

6. Гущина В.А. Критерий единственности решения задачи Дезина для уравнения смешанного типа со степенным вырождением // Вестн.СамГУ. – 2017 (в печати).

Сведения об авторе

Гущина Виолетта Александровна, аспирант Самарского государственного социально-педагогического университета.
E-mail: violetta.novikova.1991@mail.ru

УДК 004.4'236

Девицын А.О., Карамова А.И.

РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ НА МОБИЛЬНОЙ ПЛАТФОРМЕ 1С: ПРЕДПРИЯТИЕ 8.3

В работе рассматриваются подходы к разработке мобильных приложений, инструментальные средства реализации, среди которых в качестве среды разработки выбрана платформы 1С: Предприятие 8.3. Предложена кофигурация для организации мобильной работы курьера.

Ключевые слова: мобильные приложения, мобильная платформа, мобильный курьер.

Devitsyn A.O., Karamova A.I.

DEVELOPMENT OF AN APPLICATION ON MOBILE PLATFORM 1C: ENTERPRISE 8.3

Approaches to the development of mobile applications are considered in the work, implementation tools, among which, as the development environment, 1C: Enterprise 8.3 was chosen. A configuration is proposed for organizing the mobile work of the courier.

Key words: Mobile applications, mobile platform, mobile messenger.

В настоящее время все больше и больше пользователей отказываются от настольных компьютеров, выбирая взамен персональные мобильные средства. Именно они дают возможность пользователю быть на связи в любое время суток и в любом месте. Мобильные устройства имеют еще один приоритет: они являются более личностными устройствами. В них хранятся фотографии пользователя, аккаунты социальных сетей, номера его кредитных карт, с которых выполняются платежи. Некоторые приложения дают возможность планировать свой день, рационально рассчитывать время прибытия на

© Девицын А.О., Карамова А.И., 2017

важную встречу, позволяют напоминать о каких-либо событиях в жизни, ориентироваться в незнакомом месте и прочее. [1]

Разработка приложения состоит из нескольких этапов. В первую очередь формируется основная идея, и вырабатываются цели, которых приложение должно достичь. Цели могут быть как маркетинговые, так и технические. Например: привлечь новых и повысить интерес среди имеющихся пользователей, упростить процесс ведения клиента от первого знакомства до покупки и т.д., оптимизировать интерфейс для мобильных устройств, выявить основные цели клиентов, увеличить охват потенциальной аудитории.

В данной работе на основе анализа литературы, проведен обзор и сравнение существующих средств разработки. Изучены различные инструменты реализации мобильных приложений. Например, Eclipse – это проект с открытым кодом. В качестве инструмента сборки проекта выступает Ant. Ant (Another Neat Tool) – утилита для автоматизации процесса сборки программного продукта. Данное IDE легко настраивается, интегрируется с необходимыми для разработки компонентами, такими как SDK Android, NDK и Java-машиной. SDK – комплект средств разработки, который позволяет специалистам по программному обеспечению создавать приложения для определённого пакета программ, программного обеспечения базовых средств разработки, аппаратной платформы, компьютерной системы, игровых консолей, операционных систем и прочих платформ. Android NDK – это набор инструментов, которые позволяют реализовать часть вашего приложения используя такие языки как C/C++ [2]. Более серьезным инструментом является Intellij IDEA. Позволяет создавать интерфейс путем Drug-and-Drop, намного упрощает задачу и ускоряет ее выполнение. Результат можно сразу увидеть на эмулируемом устройстве. В заключении следует упомянуть среду разработки Android Studio. Это результат сотрудничества JetBrains и Google, ориентированный на разработку приложений Android. По большому счету, это та же самая IDEA, за исключением того, что в качестве сборщика используется Gradle, а не Ant. Все изменения, которые вносятся в Android Studio через некоторое время появляются в IDEA, и наоборот [3]. Google рекомендует именно Android Studio для разработки приложений.

В работе нами рассмотрены и проанализированы возможности мобильной платформы "1С: Предприятие 8.3". Помимо обычной функциональности, которая есть на платформе для персонального компьютера, мобильная платформа обеспечивает работу со специфи-

ческими возможностями, присущие только мобильным устройствам: работа со звонками и журналом звонков; работа с короткими сообщениями (SMS) и их списком; контакты; календари; геопозиционирование (без прокладки маршрутов); позволяет делать фотоснимки, а также осуществлять видео- и аудиозапись; реагировать на изменение ориентации экрана; работать с уведомлениями (локальными и PUSH, как напрямую, так и через специальный сервис-посредник); сканировать штрих- и QR-коды с помощью камеры; монетизация мобильных приложений (т.е. способ дать разработчику мобильных приложений возможности для дополнительного заработка).

При разработке основного приложения «Курьер» не ставилась задача создать конфигурацию, полностью охватывающую все реальные потребности и нюансы, возникающие в работе. В основном приложении реализуются только те функции, которые необходимы для совместной работы курьера и офиса. В офисе создаются заказы товаров и отправляются курьеру на планшет. После выполнения заказов курьером и доставки, на основании заказов создаются документы о продажах. В основном приложении доступны следующие функции:

– работа с заказами (время заказа, стоимость, адрес, звонок получателю, отображение на карте, звонок в офис, время завершения заявки);

– учет продаж товаров;

– формирование отчетов на основе данных регистров накопления.

Библиографический список

1. Астахов К. Как обеспечить мобильность рабочей среды.// Мобильные телекоммуникации. – 2015. – № 1–2 (136). – С. 26-28.

2. Бурнет Э. Привет Android! Разработка мобильных приложений СПб.: Питер, 2012. – 256 с.

3. Современные технологии разработки мобильных приложений. – URL: http://interosite.ru/articles/modern-mobile-techs (дата обращения: 15.03.2017).

Сведения об авторах

Девицын Артем Олегович, магистрант СФ БашГУ, E-mail: devitsyn.artem@gmail.com.

Карамова Альбина Ильгизовна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: alb_bai@rambler.ru.

УДК 004:373.1

Дмитриев В.Л., Каримов Р.Х., Салаватова С.С.

ХАРАКТЕРИСТИКА СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ОБРАЗОВАНИЯ В РЕСПУБЛИКЕ БАШКОРТОСТАН

В статье приводится общая характеристика состояния электронного образования в Республике Башкортостан, составленная на основе изучения официальных документов и анализа школьных сайтов.

Ключевые слова: электронное образование, Республика Башкортостан.

Dmitriev VL, Karimov R.Kh., Salavatova S.S.

CHARACTERISTIC OF THE STATE OF ELECTRONIC EDUCATION IN THE REPUBLIC OF BASHKORTOSTAN

The article gives an overview of the state of electronic education in the Republic of Bashkortostan, based on the study of official documents and the analysis of school websites.

Keywords: e-education, Republic of Bashkortostan.

Общая характеристика состояния электронного образования (далее – ЭО) в Республике Башкортостан (далее – РБ) составлена нами на основе цифровых данных, приведенных в официальных документах по республике, на основе ознакомления с доступными отчетными документами отдельных школ, а также существующих Интернет-ресурсов и школьных сайтов.

В последние годы в системе образования РБ отмечаются положительные изменения в области развития ЭО. По данным системы мониторинга ЭО республики (http://portal.wptt.su/), уровень внедрения электронного образования в РБ составляет 36%, количество организаций, использующих электронное образование – 78%. Статистика получена на основе мониторинга 1574 образовательных организаций, что составляет 57% от общего количества таких организаций.

В "Концепции развития электронного образования в РБ на период 2015-2020 годов" (далее – Концепция) приведены достаточно подробные данные об общем состоянии ЭО в республике. Остановимся на некоторых из них:

© Дмитриев В.Л.., Каримов Р.Х., Салаватова С.С., 2017

– с 2010 года действует Республиканский центр дистанционного образования детей-инвалидов на дому (структурное подразделение ГБОУ Уфимская специальная (коррекционная) общеобразовательная школа-интернат № 13 VI вида) с филиалами в городах Белорецк, Нефтекамск, Сибай, Стерлитамак, Туймазы и в Дуванском районе;

– дистанционные образовательные технологии (ДОТ) применяются в сфере среднего профессионального образования;

– на конец 2013-2014 учебного года 185 школ (12 %) вели инновационную деятельность в каком-либо из направлений ЭО;

– согласно данным рейтинга общеобразовательных организаций в области ЭО, проведенного в 2014 году, 33454 учителя (94 %) обладают компьютерной грамотностью, курсы повышения квалификации в сфере информационно-коммуникационных технологий – не менее 72 часов – прошли 13190 педагогов (33 %), не менее 108 часов – 3997 (10 %), из них в дистанционной форме – 6795 (17 %);

– на начало 2014-2015 учебного года в общеобразовательных организациях использовался 56721 персональный компьютер, в том числе 26298 ноутбуков (на основе этих данных Концепции легко оценить среднее количество компьютеров, приходящихся на одну школу нашей Республики: 56721 : 1463 = 38,7 (шт.));

– с 2013 года ежегодно проводится республиканский форум "Электронная школа", по итогам которого определяют 20 лучших школ, призванных стать "точками роста" в сфере ЭО;

– создание 20 января 2014 года Ассоциации образовательных организаций "Электронное образование Республики Башкортостан" (http://elearningrb.ru/), призванной обеспечить выполнение мероприятий по созданию индустрии в сфере информационных технологий региона, в состав которой вошли вузы и ряд колледжей и общеобразовательных школ нашей республики.

Прошедший 2016 год также отмечен рядом мероприятий, ознаменованных высокими оценками со стороны авторитетных сообществ и организаций: это получение Управлением образования г. Уфы медали по итогам работы Московского международного салона образования (13.04.16–16.04.16 г.) (http://mmco-expo.ru/2016/04/17/mmso-2016-itogi/), которые были вручены лишь пяти регионам РФ; это и включение города Уфа в Глобальную сеть обучающихся городов ЮНЕСКО (ГСОГ), это и проведение I Республиканского форума «Образование будущего» (http://forum.amk.ag/#) и Открытой молодежной робототехнической площадки «Робофест-2016» и др.

Ассоциацией инновационных регионов России (http://i-regions.org/), дважды в год проводится рейтинг инновационных регионов для целей мониторинга и управления. Рейтинг инновационных регионов представляет актуальные результаты инновационного развития всех субъектов Российской Федерации. В рейтинг 2016 года входят 29 индикаторов.

Рисунок 1 показывает сравнение относительных значений показателей РБ в рейтингах 2016 г. (жирная линия – показатели по РБ, тонкая линия – средние показатели по РФ) и 2015 г. (закрашенная область), где отмечены следующие показатели рейтинга: I – Научные исследования и разработки; II – Инновационная деятельность; III – Социально-экономические условия инновационной деятельности; IV – Инновационная активность региона. По результатам рейтинга, наша Республика занимает 7 место.

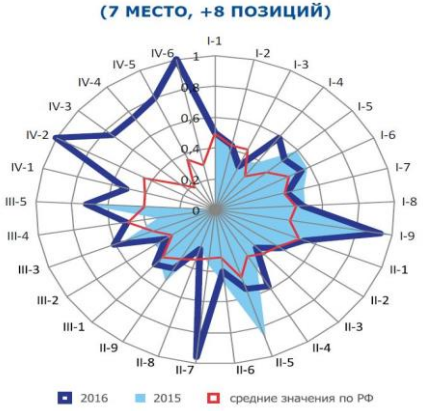


Рис. 1. Сравнение относительных значений показателей РБ в рейтингах 2016 г. и 2015 г.

Ниже на рис. 2 показаны сильные и слабые стороны инновационного развития РБ, составленные Ассоциацией инновационных регионов России. Как видно из этого рисунка, количество показателей "сильной стороны" превышает "слабые стороны".

СИЛЬНЫЕ СТОРОНЫ	СЛАБЫЕ СТОРОНЫ
I-5 Число патентных заявок на изобретения, поданных в Роспатент национальными заявителями, в расчете на миллион человек экономически активного населения	I-3 Численность занятых с высшим профессиональным образованием на 100 человек населения в трудоспособном возрасте
I-6 Число статей, опубликованных в журналах, индексируемых в Web of Science, в расчете на 100 исследователей	II-8 Число разработанных передовых производственных технологий в расчете на миллион человек экономически активного населения
I-9 Удельный вес средств организаций предпринимательского сектора в общем объеме внутренних затрат на исследования и разработки, %	
II-7 Объем поступлений от экспорта технологий в расчете на 1 тыс. руб. ВРП	
III-5 Удельный вес организаций, использовавших Интернет, в общем числе обследованных организаций, %	
IV блок «Инновационная активность региона»	

Рис. 2. Сильные и слабые стороны инновационного развития РБ

Приведенные выше данные, приведенные в различных документах, отмеченные достижения и проводимые на уровне Республики и муниципалитетов мероприятия показывают, что в РБ имеется достаточно богатый потенциал в области развития ЭО.

Однако, несмотря на достигнутые успехи, проблемы в развитии ЭО остаются актуальными. Ряд этих проблем, касающихся нашей Республики, приведен в Концепции:

– стереотипное понимание ЭО как чего-то уступающего по качеству традиционным подходам в образовании;

– недостаточное понимание того, что вложения должны быть сделаны, прежде всего, в подготовку специалистов, разработку технологий и создание виртуального пространства взаимодействия в области ЭО, а не в реальные активы;

– отсутствие зачастую управленческой воли (формулирования целей, постановки задач и концентрации ресурсов на их достижении всех заинтересованных участников образовательного процесса: государства, образовательных организаций, общественности).

Кроме того отметим, что изучив около 600 сайтов общеобразовательных учреждений РБ, мы обнаружили, что часть из них находится в неудовлетворительном состоянии. К основным замечаниям мы отнесли следующие:

– несоответствие указанной на сайте информации действительности (устаревшая информация, нерабочие ссылки и т.д.);

– оформление сайта не соответствует современным стандартам, практически полное отсутствие дизайна, использованы давно устаревшие технологии создания сайтов;

– отсутствие показателей мониторинга внедрения ЭО;

– на сайтах отдельных общеобразовательных учреждений присутствует реклама.

Необходимо принять во внимание, что ЭО подразумевает активное использование Интернет-ресурсов, а значит, необходимо обеспечить качественную интернет-связь. Однако, к примеру, доклад Ф.Х. Миназова «Развитие электронного образования в образовательных организациях РБ» (Всероссийский семинар-совещание «Реализация федеральных государственных образовательных стандартов общего образования: управленческий аспект с учетом этнокультурных и национальных особенностей», 27-28 октября 2016 г., г. Уфа) выделяет определенные проблемы, связанные со скоростью доступа к сети Интернет в школах. Так, 14 % школ вообще не имеют доступа к сети Интернет, 18% имеют скорость подключения менее 1 Мбит/с, 38 % – менее 2 Мбит/с, и лишь 30% – более 2 Мбит/с.

Согласно результатам опроса «Удовлетворенность населения качеством телекоммуникационных услуг в РБ», проведенного в рамках проекта «Голос РБ» (https://golos.openrepublic.ru/polls/33/), при ответе на вопрос «Как Вы оцениваете качество интернет-связи (покрытие, стабильность работы, скорость) на территории РБ?» 30% респондентов выбрали вариант «плохо», 20 % – вариант «нейтрально» и 50 % выбрали варианты «хорошо» и «отлично». В опросе приняли участие 900 человек.

Таким образом, проблема качества и доступности интернет-связи в республике в настоящее время стоит достаточно остро, и ее необходимо решать.

Существенной проблемой реализации и препятствием развития ЭО является несогласованность задач, решаемых общеобразовательной организацией и задач, решаемых в электронной образовательной среде (платформе). Все существующие платформы для реализации электронного обучения на данный момент можно рассматривать только как возможность организации дополнительного образования в электронном формате или же использовать в качестве некоторого дополнения процесса обучения (аттестации) в традиционной форме (существующие электронные информационно-образовательные среды

не адаптированы под существующий учебный процесс в школе, и только лишь частично решают проблему).

Имеются и проблемы, связанные с электронным образовательным контентом:

– образовательный контент не способен надолго удержать интерес учащихся, а зачастую даже вызывает отторжение с первого знакомства;

– однообразность форм представляемых учебных материалов, бедность визуального ряда, повторяющиеся задания, отсутствие игровых механик, приводят к недостаточной мотивации обучающихся;

– в большинстве случаев используется бесплатная зарубежная система поддержки дистанционного обучения «Moodle», которая не обладает достаточной гибкостью для создания действительно интерактивных и эффективных электронных курсов.

Работа подготовлена в рамках выполнения проекта "Разработка и реализация модели геймифицированной образовательной платформы «Электронная игровая школа» – ePlaySchool". Проект 06-5 от 15.12. 2016 г.

Сведения об авторах

Дмитриев Владислав Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: admwell@yandex.ru.

Каримов Руслан Халикович, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: ruslan7k7@mail.ru.

Салаватова Самира Салиховна, кандидат педагогических наук, профессор СФ БашГУ. E-mail: salavatova@rambler.ru.

УДК: 004.89

Дмитриев А.Н., Штенников Д.Г.

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ФОРМИРОВАНИЯ РЕЧИ ДЛЯ ЧАТ-БОТОВ

В работе рассмотрены методы и алгоритмы формирования речи для чат-ботов, указаны положительные и отрицательные стороны рассматриваемых методов, а так же предложен план дальнейшего исследования.

Ключевые слова: чат-бот, язык разметки искусственного интеллекта, AIML, нейронные сети.

© Дмитриев В.Л., Штенников Д.Г., 2017

Dmitriev A.N., Shtennikov D.G.

MODERN METHODS AND ALGORITHMS FOR FORMING SPEECH FOR CHATTERBOTS

In this work viewed methods and algorithms of speech formation for chatbots, positive and negative aspects of the viewed methods, and proposed a plan for further researchs.

Key words: chatbot, artificial intelligence markup language, AIML, neural networks.

В современном обществе все больше и больше прибегают к использованию чат-ботов в областях, где ранее требовалось человеческое общение. Виртуальные собеседники уже сейчас используются во многих областях современного общества. Чат-боты применяются как в области развлечений, так и в бизнесе. Наиболее часто их можно встретить в таких областях, как продажи, обучение, деловые коммуникации, техническая поддержка и в области развлечений. Таким образом, использование чат-ботов позволяет не только сократить расходы, которые бы были затрачены на человека, выполняющего те же действия, но и повысить эффективность выполнения этих действий.

Существуют несколько основных методов для формирования речи для чат-ботов. В ходе данной статьи будут рассмотрены наиболее популярные из них [1]. Выбор какого-то определенного метода зависит от целей, которые ставятся перед созданием чат-бота, так как разные методы рассчитаны на какие-то определенные задачи.

Можно назвать три основных метода формирования речи для чат ботов. Наиболее простым и примитивным является метод, основанный на шаблонах [2]. Данный метод подразумевает использование щаблонов ответов, которые предоставляются по определенным ключевым словам, содержащимся в тексте вопроса. Так же существуют обучаемые чат-боты, использующие шаблоны. Виртуальные собеседники, использующие такой метод работают аналогично чат-ботам, использующих шаблоны, но способны обучаться и даже создавать новые шаблоны ответов. Однако такие чат-боты ограничены алгоритмами, описывающих обучение бота. И наиболее интересный из видов виртуальных собеседников – чат-бот на нейронной сети.

В данной статье речь пойдет преимущественно про чат-ботов на основе шаблонов и на нейронных сетях.

Для описания шаблонов вопросов и ответов для простейшего бота зачастую используется язык разметки искусственного интеллекта

AIML. Структура языка можно продемонстрировать на следующей структуре языка:

```
<aiml>
<category>
    <pattern>Вопрос</pattern>
        <template>
        <random>
            <li>Ответ 1</li>
            <li>Ответ 2</li>
        </random>
    </template>
</category>
</aiml>
```

Рис. 1. Простейшая структура AIML

На рис. 1 предоставлен простейший пример разметки шаблона на языке AIML. Под тегом category находятся теги pattern и template, в которых и хранится шаблон вопроса и ответов к нему. Тег random позволяет указать несколько вариантов ответов к заданному вопросу, которые интерпретатор выбирает случайным образом. Тегов pattern может быть несколько – таким образом оформляются разные варианты вопросов, на которые дается один и тот же ответ.

Данный язык предоставляет так же возможность хранить информацию об истории диалога, предшествующему данному вопросу. Это осуществляется через тег <history>. А так же позволяет хранить информацию о теме разговора через тег <theme>. Данные теги позволяют улучшить качество имитации общения чат-ботом.

Однако виртуальный собеседник будет ограничен имеющейся у него базой знаний и описывать ее, если в нее входит большое количество вопросов является наибольшей проблемой при создании чат-бота такого вида. Размер базы знаний будет сказываться на времени реакции чат-бота, что так же является проблемой данного метода.

Последнее время все больше и больше получают распространение обучаемые системы на нейронных сетях. Ввиду того, что системы на нейронных сетях способны к обучению, предсказанию, классификации и распознаванию, то можно заключить, что их применение в области виртуальных собеседников очень перспективно.

В данной статье будет рассмотрен виртуальный собеседник с использованием рекуррентной нейронной сети, так как данная модель способна хранить, обобщать и прогнозировать различные последовательности диалогов.

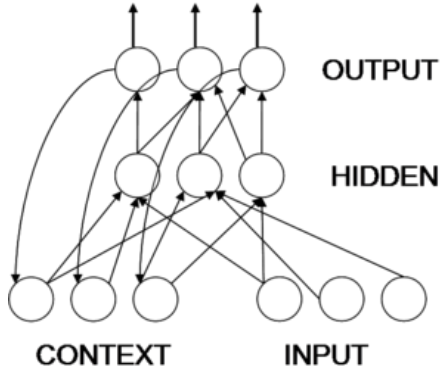


Рис. 2. Общий вид структуры рекуррентной нейронной сети

В данном случае входящее сообщение поступает на группу нейронов INPUT. На группе нейронов CONTEXT изначально нулевой сигнал. Далее сигнал переходит в скрытый слой нейронов HIDDEN, откуда преображенный сигнал переходит на нейроны выходного слоя Out. Копия сигналов из OUT возвращается на группу CONTEXT и далее присоединяется к новым входящим сигналам IN.

Однако для обучения нейронной сети требуется большой объем диалогов, чтобы нейронная сеть могла прогнозировать ответы на вопросы, которые отсутствуют в базе знаний.

Таким образом, можно сделать вывод, что отдельные виды ботов хорошо подходят только для каких-то определенных типов задач. И еще нет таких ботов, которые бы справлялись с большинством задач без каких-то доработок и улучшений, в своем чистом виде. Отсюда можно предположить, что наиболее универсальным методом будет метод, который бы комбинировал как шаблоны, так и нейронные сети, которые бы на основе шаблонов и на ходе диалога могли бы обучиться отвечать на вопросы, выходящие за границы ограничений базы знаний шаблонов. Так же можно реализовать обучение некоторому методу выбора варианта ответа из шаблона, который бы лучше подходил контексту диалога, который бы сократил время работы

На основе этого утверждения и будет строиться дальнейшее исследование, а именно, построение некоего комбинированного алгоритма, совмещающего как работу с шаблонами, так и нейронную сеть, с помощью которого можно будет совместить возможности и избавиться от отрицательных сторон отдельных методов

Библиографический список

1. Алгоритмы чат бота на базе рекуррентной нейронной сети и расширения языка AIML / Хабрахабр [Электронный ресурс] // Режим доступа: https://habrahabr.ru/post/304284/

2. Провотар А.И., Клочко К.А. Особенности и проблемы виртуального общения с помощью чат-ботов // Научные труды Винницкого национального технического университета, 2013. – № 3. – С. 2.

3. Chatbot на нейронных сетях / Блог компании MeanoTek / Хабрахабр [Электронный ресурс] // Режим доступа: https://habrahabr.ru/company/meanotek/blog/256987/

Сведения об авторах

Дмитриев Владислав Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: admwell@yandex.ru.

Штенников Дмитрий Геннадьевич, кандидат технических наук, доцент Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики. E-mail: justeye@yandex.ru.

УДК 539.3

Дуйшеналиев Т.Б., Хроматов В.Е.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ЛИНЕЙНЫМ ТЕНЗОРОМ КОШИ

В деформационном движении, т.е. в движении частиц тела относительно друг друга, соотношения между тензорами напряжения и деформации являются определяющими такое движение законами. В работе доказывается, что компоненты деформации линейно выражаются через градиенты перемещений при любых их величинах.

Ключевые слова: твердое тело, упругость, деформации, перемещения, тензор Коши.

Duishenaliev T.B., KhromatovV.E.

MODELING OF FINITE DEFORMATIONS BY A LINEAR CAUCHY TENSOR

In deformation motion, i.e. in the motion of body particles relative to each other, the relationship between the strain and deformation tensors is the determining laws for such motions. In this work it is proved that the

© Дуйшеналиев Т.Б., Хроматов В.Е., 2017

deformation components are linearly expressed through the displacement gradients at any their values.

Keywords: solid body, elasticity, deformation, displacement, Cauchy tensor.

Пусть в области V (рис. 2) задан тензор Коши $\varepsilon_{ij}(x)$. Функции $\varepsilon_{ij}(x)$ и их частные производные до второго порядка непрерывны.

$$du_i = u_{i,j}dx_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})dx_j, \tag{1}$$

где $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),\ \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$.

Пусть n_i - направляющие косинусы направления вектора dx_i, $dx = (dx_i dx_i)^{0.5}$ - модуль этого вектора. Проекция du_i на направление dx_i

$$du_i n_i = \varepsilon_{ij} n_i dx_j = \varepsilon\, dx, \tag{2}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{ij} n_i n_j$ - деформация удлинения в направлении вектора dx_i.

Представим вектор (1) в виде

$$du_i = \varepsilon\, dx_i + (\varepsilon_{ij} - \varepsilon\, \delta_{ij})\, dx_j + \omega_{ij}\, dx_j \tag{3}$$

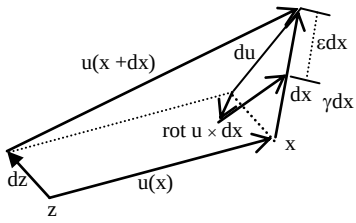


Рис. 1. Разложение вектора относительного перемещения

Как показано на рис.1, выражение (3) разлагает вектор относительного перемещения на векторы:

- удлинения в направлении вектора dx_i - $\varepsilon\, dx_i$,
- сдвига - $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\, \delta_{ij})\, dx_j$,
- вращения - $\omega_{ij}\, dx_j$.

Квадрат длины вектора сдвига

$$(\varepsilon_{ki} - \varepsilon\,\delta_{ki})(\varepsilon_{kj} - \varepsilon\,\delta_{kj})\,dx_i\,dx_j = (\varepsilon_{ki}\,\varepsilon_{kj}\,n_i\,n_j - \varepsilon^2)dx^2 = \gamma^2\,dx^2\,, \qquad (4)$$

где $\gamma = (\varepsilon_{ki}\,\varepsilon_{kj}\,n_i\,n_j - \varepsilon^2)^{.5}$ - относительная деформация сдвига.

Векторы $z_i = x_i - u_i(x),\ x_i \in V$ и $z_i = x_i - u_i(x),\ x_i \in S$ преобразуют область V и ее поверхность S в область V_0, ограниченную поверхностью S_0 (рис. 2).

Элементарный вектор dx_i области V преобразуется в элементарный вектор dz_i области V_0 (рис. 2).

$$dz_i = dx_i - du_i(x) \qquad (5)$$

Возводим обе части этого уравнения в квадрат и представим результат в виде

$$dx^2 - dz^2 = (2\,\varepsilon_{ij} - u_{k,i}\,u_{k,j})dx_i dx_i\,. \qquad (6)$$

Это выражение напишем в виде

$$dx^2 - dz^2 = (2\,\varepsilon - (\varepsilon^2 - \gamma^2) - (2\,\omega_{kj}\,\varepsilon_{ki} + \omega_{ki}\,\omega_{kj})\,n_i\,n_j)\,dx^2\,. \qquad (7)$$

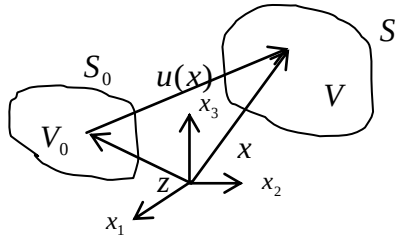


Рис.2. Преобразование области V в область V_0

Вводя тензор

$$a_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}u_{k,i}\,u_{k,j}\,, \qquad (8)$$

выражение (6) напишем еще в виде

$$dx^2 - dz^2 = 2\,a_{ij}\,n_i\,n_j\,dx^2\,. \qquad (9)$$

Тензор Альманси (8) ввел в механику деформируемого тела следующее воззрение. Если величина произведения градиентов $u_{k,i}\,u_{k,j}$ пренебрежимо мала по сравнению с величиной градиента ε_{ij}, то деформированное состояние можно характеризовать элементами тензора Коши. В противном случае, деформации должны представ-

ляться элементами тензора Альманси. В соответствии с этим, стали называть ε_{ij} тензором малых и бесконечно малых деформаций, a_{ij} – тензором конечных деформаций. Появились понятия о геометрической линейности и нелинейности преобразований, которые создали линейную и нелинейную механику деформируемого тела. Нелинейная механика сложна, ее проблемы не имеют строгого аналитического решения. А линейная механика должна оговаривать, что все ее решения верны только в области малых деформаций.

Однако это воззрение некорректно. Разность квадратов $dx^2 - dz^2$ при любых величинах произведения градиентов $u_{k,i}\, u_{k,j}$ определяется только элементами тензора Коши ε_{ij}. Покажем это сначала для не имеющего вихря поля перемещений

$$\omega_{ij}(x) = 0,\ x_i \in V. \tag{10}$$

При таком поле разность квадратов (7)

$$dx^2 - dz^2 = (2\,\varepsilon - (\varepsilon^2 - \gamma^2))\, dx^2, \tag{11}$$

является функцией только элементов тензора Коши. В выражениях (2) и (4) нет ограничений на величины ε_{ij}.

Разность $dx^2 - dz^2$, как некая данная величина, не различает виды деформирования. Для нее безразлично то, что ее обусловило - линейное удлинение или сдвиг, или и то, и другое. Это обстоятельство вынудило дополнить уравнение (9) понятием относительной деформации удлинения

$$\lambda = \frac{dx - dz}{dx} \tag{12}$$

или $dz = (1 - \lambda)\, dx$.

Возведем обе части этого равенства в квадрат и напишем в виде

$$dx^2 - dz^2 = (2\lambda - \lambda^2)\, dx^2. \tag{13}$$

Приравнивая правые части (8) и (13), и решая относительно λ, находим

$$\lambda = 1 - (1 - 2\, a_{ij}\, n_i\, n_j)^{0.5} \tag{14}$$

Здесь надо обратить внимание на следующее обстоятельство. Скалярное равенство (12) допускает толкование, которое приведено на рис. 3. Вектор dx_i имеет ту же ориентировку, что и вектор dz_i.

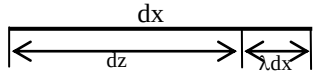


Рис. 3. Графическое представление скалярного произведения (7)

Они связаны векторным равенством:

$$dz_i = (1-\lambda)\,dx_i\,. \tag{15}$$

Возводя в квадрат обе части, приходим к уравнению (13). С другой стороны, эту же разность можно выразить в элементах тензора Коши. Как следует из равенства (15), направление вектора dx_i является главным направлением. Для этого направления $\gamma = 0$, и разность квадратов (11) примет вид

$$dx^2 - dz^2 = (2\,\varepsilon - \varepsilon^2)\,dx^2\,. \tag{16}$$

Приравнивая правые части уравнений (13) и (16), приходим к равенству

$$2\,\lambda - \lambda^2 = 2\,\varepsilon - \varepsilon^2\ . \tag{17}$$

Следующее отсюда равенство $\lambda = \varepsilon_{ij} n_i n_j$ не нуждается в оговорке на величины ε_{ij}.

Тензор Коши является полной характеристикой деформированного состояния при любых уровнях деформации и в общем случае вихревого поля.

Проинтегрируем выражение (1) по какой-то линии ℓ, лежащей в области *V* и соединяющей начальную точку x^0 с переменной точкой x.

$$\int_{x^0}^{x} du_i = \int_{\ell} (\varepsilon_{ij}(y) + \omega_{ij}(y))\,dy_j\ \ . \tag{18}$$

Интегрирование, в котором использовано легко выводимое соотношение $\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{kj,i}$ приводит

$$u_i(x) = u_i(x^0) + \omega_{ij}(x^0)(x_j - x_j^0) + \int_{\ell} (\varepsilon_{ik}(y) + (x_j - y_j)\,(\varepsilon_{ki,j}(y) - \varepsilon_{kj,i}(y)))dy_k \tag{19}$$

В выражении (18) слева стоит полный дифференциал. В виду этого, подынтегральное выражение интеграла в правой части также должно быть полным дифференциалом. Независимость этого интеграла от пути интегрирования приводит к соотношению [1]

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \tag{20}$$

Таким образом, если элементы тензора Коши удовлетворяют условию (20), то выражение (19) можно написать в виде

$$u_i(x) = u_i(x^0) + \omega_{ij}(x^0)(x_j - x_j^0) + \int_{x^0}^{x} (\varepsilon_{ik}(y) + (x_j - y_j)(\varepsilon_{ki,j}(y) - \varepsilon_{kj,i}(y)))dy_k \cdot \quad (21)$$

Здесь функции $u_i(x)$ определяются только компонентами тензора Коши. На величины элементов этого тензора не сделаны ограничения. Следовательно, разность квадратов (6) определяется только компонентами тензора Коши при любых уровнях деформаций. Компоненты тензора деформации линейно выражаются через градиенты перемещений при любых их величинах. Это позволяет сделать вывод, что тензор Коши является полной характеристикой деформированного состояния на любых уровнях деформации.

Библиографический список

1. Дуйшеналиев Т.Б. Определение функций перемещений по элементам тензора Коши // Известия НАН КР, Бишкек, 2012.– № 2.– С. 71-76.

Сведения об авторах

Дуйшеналиев Туратбек Болотбекович, доктор физико математических наук, профессор КГТУ им. И.Раззакова, г. Бишкек, E-mail: duishenaliev@mail.ru.

Хроматов Василий Ефимович, кандидат технических наук, профессор НИУ «МЭИ», г. Москва. E-mail: Khromatovvy@mpei.ru.

УДК 519.245:678.7

Ефимов А.М., Коледина К.Ф., Коледин С.Н.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ПРОВЕДЕНИЯ КАТАЛИТИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СПИРТОВ С ДИМЕТИЛКАРБОНАТОМ

В работе рассматривается применение принципа максимума Понтрягина к задаче определения оптимальных условий проведения сложной реакции и ее решение с использованием средств Wolfram Mathematica.

© Ефимов А.М., Коледина К.Ф., Коледин С.Н., 2017

Ключевые слова: оптимальное управление, кинетическая модель, реакция спиртов с диметилкарбонатом, зеленая химия, Wolfram Mathematica.

Efimov A.M., Koledina K.F., Koledin S.N.

DETERMINATION OF OPTIMUM CONDITIONS OF CONDUCTING THE CATALYTIC REACTION OF INTERACTION OF ALCOHOLS WITH DIMETHYL CIRCONATE

The paper considers the application of the Pontryagin maximum principle to the problem of determining the optimal conditions for carrying out a complex reaction and its solution using Wolfram Mathematica.

Keywords: optimal control, kinetic model, reaction of alcohols with dimethyl carbonate, green chemistry, Wolfram Mathematica.

Основой анализа химических реакций является кинетическая модель, содержащая в себе фундаментальные знания о реакции – детальный механизм химических превращений, кинетические параметры, некоторые физико-химические выводы по реакции [3]. Кинетическая модель лежит в основе последующей оптимизационной задачи, которая представляет собой некоторую теоретическую оптимизацию, определение самых лучших в некотором смысле условий, не принимая во внимание возможность их реализации [4]. Актуальным становится применение математических методов теории управления в задачах оптимизации сложных реакций.

В работе рассматривается применение принципа максимума Понтрягина к задаче определения оптимальных условий проведения сложной реакции. Объектом исследования является реакция диметилкарбоната (ДМК) со спиртами в присутствии октакарбонилдикобальта. Реакция относится к классу «зеленой» химии. Продуктами реакции являются метиловые эфиры спиртов и метилкарбонаты, применяемые в качестве растворителей, интермедиатов синтеза лекарственных препаратов, гербицидов, антифризов и т.д. Схема превращений реакции и соответствующие кинетические уравнения приведены в таблице 1.

Таблица 1

Схема превращений и кинетические уравнения реакции диметилкарбоната со спиртами в присутствии октакарбонилдикобальта

N	Стадии	Кинетические уравнения
1	X3+ X1 → X9+ X12+ 4 X8	w1=k1*x3*x1
2	X12+ X2→ X13 + X6 + X11	w2=k2*x2*x12;
3	X12+ X2 ↔ X14+ X11	w3=k3*x2*x12-k8*x11*x14
4	X14+ X1 → X10+ X6 + X4	w4= k4*x1*x14
5	X14+ X1 → X5 + X10	w5=k5*x1*x14
6	X13+ X1 → X4 + X10	w6=k6*x1*x13
7	X10+ X11 → X7 + X12	w7= k7*x10*x11

Здесь X1 – ROH, X2 – (MeO)2CO, X3 – Co2(CO)8 – исходные реагенты; X4 – ROMe, X5- ROCO2Me, X6 – CO2, X7 – MeOH – продукты реакции (X4 и X5 – целевые); X8 – CO , X9 – Co2+(ROH), X10 – HCo(CO)4, X11 – MeO, X12 – Co(CO)4 – промежуточные продукты; X13 – Me+[Co(CO)4-], X14 – Co(CO)4CO2Me.

Детальная кинетическая модель реакции описана в работе [6]. На основе кинетической модели необходимо определить оптимальную температуру реакции ДМК со спиртами.

Рассмотрим задачу нахождения оптимальной температуры рассматриваемой реакции как задачу оптимального управления.

Задача может быть формализована следующим образом

$$B(x(\cdot),u) = \int_0^{tMax} f(t,x(t),u)\ dt \to min, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t,x(t),u)\ \forall t \in [0,tMax], u \in U, x(0) = x^0, \quad (2)$$

где фазовая переменная $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{14}(t)\right)^T \in PC^1([0,tMax])$; вектор-функция $\varphi(t) = (-w1 - w4 - w5 - w6, -w2 - w3, -w1, w6 + w4, w5, w2 + w4, w7, 4w1, w5 + w6 - w7, w2 + w3 - w7, w1 - w2 - w3 + w7, w2 - w6, w3 - w4 - w5)$;

$w1 = k_1 x_1(t) x_3(t)$, $w2 = k_2 x_2(t) x_{12}(t)$,

$w3 = k_3 x_2(t) x_{12}(t) - k_8 x_{11}(t) x_{14}(t)$, $w4 = k_4 x_1(t) x_{14}(t)$,

$w5 = k_5 x_1(t) x_{14}(t)$, $w6 = k_6 x_1(t) x_{13}(t)$, $w7 = k_7 x_{10}(t) x_{11}(t)$,

$k_j = k_{j0} e^{-\frac{E_{j0}}{RT}}\ \forall j = 1, \dots, 8$ (R – универсальная газовая постоянная, T – температура (K)); под управлением u будем понимать $u = -\frac{1}{T}$,

область изменения которой – $U = [-\frac{1}{Ta}, -\frac{1}{Tb}]$; подинтегральная функция в целевом функционале (1) представляет собой критерий рентабельности процесса [5] и имеет вид

$$f(t, x(t), u) = \frac{-0.1454\,x_4(t) - 0.8025\,x_5(t)}{0.00043\,x_1^0 + 0.000784\,x_2^0 + 0.0514\,x_3^0 + 0.00018t + 0.01}.$$

Согласно принципу максимума Понтрягина (в лагранжевой форме) [1, 2], если $(\hat{x}(\cdot), \hat{u})$ – оптимальный управляемый процесс в задаче (1)-(2), то выполняется условие оптимальности по u

$$f(t, \hat{x}(t), u) - p(t)\,\varphi(t, \hat{x}(t), u) \geq f(t, \hat{x}(t), \hat{u}) - p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u})\ \forall t \in [0, tMax], \forall u \in U, \quad (3)$$

где p – единственное решение дифференциального уравнения

$$\dot{p}(t) = f_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}) - p(t)\varphi_x(t, \hat{x}(t), \hat{u})\ \forall t \in [0, tMax] \quad (4)$$

с краевым условием

$$p(tMax) = 0. \quad (5)$$

Указанную задачу будем решать численно. Основным отличием численных методов решения систем дифференциальных уравнением является то, что решение – это табличная функция, для нахождения которой необходимо параметрам системы придавать какие-то численные значения. В системе компьютерной математики Wolfram Mathematica начиная с версии 9.0 наряду с функцией NDSolve, использующейся для нахождения численных решений дифференциальных уравнений, была введена функция ParametricNDSolve ([8]), позволяющая находить численные решения, которые зависят от параметра. Результат работы функции ParametricNDSolve – это набор численных данных и методов их обработки – что позволяет находить численное решение, зависящее от параметра.

Задачу (1)-(2) будем решать при следующих исходных данных: вектор $x^0 = (2.16, 8.66, 0.065, 0, \ldots, 0)^T$; $\mathrm{tMax} = 100$; $\mathrm{Ta} = 130°\mathrm{C}, \mathrm{Tb} = 220°\mathrm{C}$; а значения k_{j0} и E_{j0} $\forall j = 1, \ldots, 8$ приведены в работе [6].

Учитывая возможную жесткость систем (2) и (4)-(5), свойственную задачам химической кинетики (см. например [3]), в параметрах соответствующих функций ParametricNDSolve укажем: $\mathrm{Method} \rightarrow \{\text{«StiffnessSwitching»}, \text{«NonstiffTest»} \rightarrow \mathrm{False}\}$. Учитывая физико-химические свойства решений систем (2) и (4)-(5), описанные в работе [6], при построении решения указанных систем ограничимся третьим порядком интерполяции. Для нахождения управления u, удовлетворяющего принципу оптимальности (3), построим соответству-

ющий функционал, подставим в него решения систем (2) и (4)-(5), и воспользуемся функцией NMinimize. В параметрах NMinimize укажем: Method → «DifferentialEvolution», этот метод показал наилучшие результаты на тестовых задачах, для которых было известно решение систем (2) и (4)-(5) в явном виде.

Результат расчетов: $\hat{u} = -0.0020277805941397143$, что соответствует $\text{Топт} = 220°\text{C}$. Полученный результат согласуется с экспериментальными данными (см. [7]).

На рис. 1 и рис. 2 проиллюстрировано поведение функции $f(t, \hat{x}(t), u)$ (критерий рентабельности процесса) и целевого функционала $B(\hat{x}(\cdot), u) = \int_0^{tMax} f(t, \hat{x}(t), u)\, dt$, откуда также следует, что оптимум достигается при максимальной температуре.

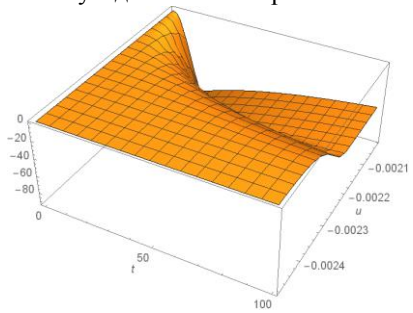


Рис. 1. График функции $f(t, \hat{x}(t), u)$.

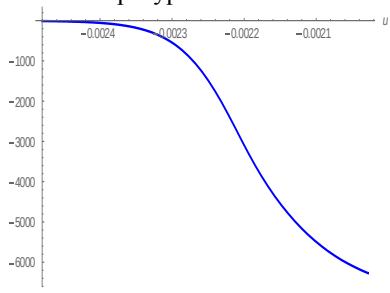


Рис. 2. График $B(\hat{x}(\cdot), u) = \int_0^{tMax} f(t, \hat{x}(t), u)\, dt$

Библиографический список

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2. Галеев Э.М. Оптимизация. М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
3. Губайдуллин И.М., Коледина К.Ф., Спивак С.И. Структурная и параметрическая идентификация кинетических моделей химических реакций с участием металлоорганических соединений на основе информационно-вычислительной аналитической системы. // Химическая промышленность сегодня, 2014.– №11.– С. 18-27.
4. Коледин С.Н., Коледина К.Ф. Оптимальное управление и чувствительность оптимума в задачах химической кинетики // Журнал СВМО, 2016.– Т. 18.– № 3. – С. 137-144.

5. Коледин С.Н., Коледина К.Ф., Губайдуллин И.М., Спивак С.И. Определение оптимальных условий каталитических процессов на основе экономических критериев // Химическая промышленность сегодня, 2016.– № 10. – С. 24-35.

6. Коледина К.Ф., Коледин С.Н., Щаднева Н.А., Губайдуллин И.М. Кинетика и механизм каталитической реакции спиртов с диметилкарбонатом // Журнал физической химии, 2017.– Т. 91.– № 3.– С. 422–428.

7. Хуснутдинов Р.И., Щаднева Н.А., Маякова Ю.Ю. Синтез алкилметиловых эфиров и алкилметилкарбонатов при взаимодействии спиртов с диметилкарбонатом в присутствии комплексов W и Co. // Журнал органической химии, 2014.– Т. 50. – Вып. 6.– С. 808-813.

8. Wolfram Language & System Documentation Center, http://reference.wolfram.com/language/

Сведения об авторах

Ефимов Андрей Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического моделирования БашГУ. E-mail: AndreyEfimov67 @yandex.ru.

Коледина Камила Феликсовна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института нефтехимии и катализа РАН, доцент кафедры информатики и информационно-коммуникационных технологий УГНТУ. E-mail: koledinakamila@mail.ru.

Коледин Сергей Николаевич, аспирант Института нефтехимии и катализа РАН, старший преподаватель кафедры математики УГНТУ. E-mail: koledinsrg@gmail.com.

УДК 517.984

Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Коныркулжаева М.Н.

СВЕРТОЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФАХ

В работе изучаются резольвенты линейных дифференциальных операторов на графах. Выведена формула свертки, порождаемой краевой задачей для дифференциального уравнения второго порядка на графе.

© Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Коныркулжаева М.Н., 2017

Ключевые слова: ориентированный граф, максимальный оператор, корректное сужение оператора, граничные формы, сверточное представление резольвенты.

Zhapsarbayeva L.K., Kanguzhin B.E., Konyrkulzhayeva M.N.

THE CONVOLUTION REPRESENTATION OF THE RESOLVENT OF DIFFERENTIAL OPERATORS ON THE GRAPHS

In this paper we study the resolvents of linear differential operators on graphs. A convolution formula generated by the boundary value problem for a second-order differential equation on a graph is derived.

Key words: oriented graph, maximal operator, correct restriction of the operator, boundary forms, convolution representation of the resolvent.

1. Введение

Работа посвящена линейным дифференциальным операторам на графах и сверточному представлению их резольвент. Дифференциальные операторы на многообразиях типа сети изучались в работах Ю.В. Покорного и его учеников [7-12]. Из последних публикаций, посвященных теории обратных задач на графах, отметим работы [2, 3, 6, 14].

В данной статье приводится постановка краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка на графе, доказывается корректность постановки рассматриваемой задачи. Выведена формула свертки, порождаемой краевой задачей для дифференциального уравнения второго порядка на графе. Показано, что резольвента оператора, соответствующего краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка на графе, имеет сверточное представление.

Перечисленные результаты являются новыми, ранее подобные выводы и положения были известны для операторов на отрезке или оси.

2. Основные понятия

Пусть задан ориентированный граф $\Im = \{V, \varepsilon\}$, где V – множество вершин и ε – множество дуг. Количество вершин графа V обозначим через N, а сами вершины будем нумеровать $1,\ldots,N$. Граничные вершины обозначим через Γ, вершин из множества $I = V \setminus \Gamma$ называем внутренними точками. Дуга $e = [i, j]$ соединяет вершины i и j, направлена от i к j. Множество входящих дуг к вершине i

обозначим через V_i^+, а множество выходящих дуг из вершины i обозначим через V_i^-. Считаем, что граф не имеет петель и не делит плоскость на несвязанные области, т.е. количество граней равняется 1. Для таких графов известна формула Эйлера [13]:

$$N = |\varepsilon| + 1 \tag{1}$$

На каждой дуге e из E определено дифференциальное выражение:

$$\Lambda_e \psi_e(x_e) \equiv -\frac{d^2}{dx_e^2}\psi_e + u_e(x_e)\psi_e(x_e) = f_e(x_e),\ 0 < x_e < 1. \tag{2}$$

Потребуем, чтобы во внутренней вершине $i \in I$ выполнялись условия непрерывности:

$$\begin{aligned} &\psi_{[i,j]}(0) = \beta_i, \text{ при } j \in V_i^+ \\ &\psi_{[k,i]}(1) = \beta_i, \text{при } k \in V_i^-, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\beta_i -$ некоторые неизвестные константы.

Так же потребуем, чтобы во внутренней вершине $i \in I$ выполнялось условие сохранения баланса потока:

$$\sum_{j \in V_i^+} \psi'_{[i,j]}(0) = \sum_{k \in V_i^-} \psi'_{[k,i]}(1). \tag{4}$$

Заметим, что законы (3), (4) известны в электротехнике как законы Кирхгофа [1].

Пусть $\chi = \sum_{s \in \Gamma}(|V^+(s)| + |V^-(s)|)$. В граничных вершинах потребуем выполнение краевых условии при $r = 1, \ldots, \chi$

$$U_r(\Psi(X)) = \sum_{s \in \Gamma} \left\{ \sum_{k \in V^-(s)} \left(a_{sk}^{(r)} \psi_{[k,s]}(1) + b_{sk}^{(r)} \psi'_{[k,s]}(1) \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i \in V^+(s)} \left(c_{is}^{(r)} \psi_{[s,i]}(0) + d_{is}^{(r)} \psi'_{[s,i]}(0) \right) \right\} = 0,$$

где $a_{sk}^{(r)}, b_{sk}^{(r)}, c_{is}^{(r)}, d_{is}^{(r)} -$ некоторые числа.

Теорема 1. Если набор $\{U_t, t = 1, \ldots, \chi\}$ краевых форм линейно независим, то краевая задача (2), (3), (4) корректно поставлена в пространстве $L_2(\Im)$.

3. Резольвента корректного сужения дифференциального оператора на графе с гладкой областью определения

Рассмотрим пространство $L_2(\Im) := \underset{e\in \mathrm{E}}{\otimes} L_2(e)$ с элементами $[\psi_e(x_e), e\in\varepsilon]^T =: \vec{\Psi}(\vec{X})$, где $\vec{X} = (x_e, e\in\varepsilon)$ и $\otimes$ – декартово произведение подпространств.

Оператор B с областью определения $D(B) = L_2(\Im)$ и задаваемый линейными дифференциальными выражениями и условиями во внутренних точках

$$B\vec{\Psi}(\vec{X}) := [\Lambda_e\psi_e(x_e) := -\frac{d^2}{dx_e^2}\psi_e(x_e) + u_e(x_e)\psi_e(x_e), e\in E, i\in \mathrm{I}:$$

$$\psi_{[i,j]}(0) = \beta_i, \psi_{[k,i]}(1) = \beta_i,\ j\in V_i^+, k\in V_i^-,$$

$$\sum_{j\in V_i^+} \psi'_{[i,j]}(0) = \sum_{k\in V_i^-} \psi'_{[k,i]}(1)]^T$$

назовем максимальным оператором.

Заметим, что ядро $Ker B = \{\vec{\Psi}(\vec{X})\in D(B): B\vec{\Psi}(\vec{X}) = 0\}$, и оно имеет конечную размерность $\dim Ker B = \chi.$

Оператор Λ, соответствующий краевой задаче (2), (3), (4), является корректным сужением максимального оператора B.

Набор линейных граничных форм $\{U_t, t = 1,\ldots,\chi\}$ представляет линейно независимую систему функционалов в подпространстве $Ker B$ размерности χ. Тогда в пространстве $Ker B$ найдется [5] единственная система функции $\{\vec{\Psi}_t(\vec{X})), t = 1,\ldots,\chi\}$, подчиненная условиям

$$U_r(\vec{\Psi}_t(\vec{X})) = \delta_{rt},\ \text{где}\ \delta_{rt} = \begin{cases} 0, r\neq t \\ 1, r = t. \end{cases}$$

Система функции $\{\vec{\Psi}_t(\vec{X})\}$ называется биортогональной в подпространстве $Ker B$ к системе линейных функционалов $\{U_r\}$.

Обозначим через Λ_0 сужение максимального оператора B с областью определения

$$D(\Lambda_0) = \{\vec{\Psi}(\vec{X})\in W_2^2(\Im): U^0{}_r(\vec{\Psi}(\vec{X})) = 0, r = 1,\ldots,\chi\},$$

где набор граничных форм $\{U^0{}_t, t=1,\dots,\chi\}$ получается из набора $\{U_t, t=1,\dots,\chi\}$, если все $c_{is}^{(r)}$, $d_{is}^{(r)}$ равны нулю.

Теперь сформулируем основной результат.

Теорема 2. Справедливо следующее представление обратного оператора Λ

$$\Lambda^{-1}F(X)=\Lambda_0^{-1}F(X)-\sum_{t=1}^{\chi}\Psi_t(X)\,U_t(\Lambda_0^{-1}F)$$

для $\forall\, F(X)\in L_2(\Im)$, где система функции $\{\Psi_t(X)\}$ является биортогональной в подпространстве $KerB$ к системе линейных функционалов $\{U_r\}$.

Теорема 3. При комплексных значениях μ справедливо следующее представление резольвенты оператора Λ

$$(\Lambda-\mu I)^{-1}F(X)=(\Lambda_0-\mu I)^{-1}F(X)-$$

$$-\sum_{t=1}^{\chi}(\Lambda-\mu I)^{-1}\,\Psi_t(X)\,U_t((\Lambda_0-\mu I)^{-1}F).$$

Далее, повторяя рассуждения работы [4], из теоремы 3 получаем сверточное представление резольвенты оператора Λ.

Библиографический список

1. Афанасьева Н.А., Булот Л.П. Электротехника и электроника. Учебное пособие. – СПб.: СПбГУН и П.Т., 2010. – 181 с.

2. Belishev M.I. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC methods // Inverse problems, 2004. – Vol. 35, № 10. – P. 4069-4088.

3. Carlson R. Inverse eigenvalue problems on directed graphs // Trans. Amer. Math. Soc., 1999. – Vol. 351. – P. 101-121.

4. Кангужин Б.Е., Токмагамбетов Н.Е. Свертка, преобразование Фурье и пространства Соболева, порождаемые нелокальной задачей Ионкина // Уфим. матем.ж., 2015. – Т. 7.– № 4. – С. 80-92.

5. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

6. Kurasov P., Stenberg F. On the inverse scattering problem on branching graphs // J. Phys. A. Math. Gen., 2002. – Vol. 20. – P. 647-672.

7. Покорный Ю.В. О спектре некоторых задач на графах// Успехи мат. науки, 1987. – Т. 42.– № 4. – С. 128-129.

8. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. О краевой задаче на графе// Дифференциальные уравнения, 1988. – Т. 24. – С. 701-703.

9. Покорный Ю.В., Приядиев В.Л., Аль-Обейд А. Об осциляционных свойствах спектра краевой задачи на графе // Матем. заметки, 1996. – Т. 60.– № 3. – С. 468-469.

10. Покорный Ю.В., Приядиев В.Л. Некоторые проблемы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственных сетях // Успехи мат. науки, 2004. – Т. 59.– № 6. – С. 115-150.

11. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Приядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 272 с.

12. Прасолов В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. – М.: МЦНМО, 2004. – 345 с.

13. Юрко В.А. О восстановлении операторов Штурма-Лиувилля на графах // Мат. заметки., 2006. – Т. 79.– № 4. – С. 619-630.

Сведение об авторах

Кангужин Балтабек Есматович, доктор физико-математических наук, профессор КазНУ им. аль-Фараби. E-mail: kanbalta@mail.ru.

Коныркулжаева Марал Нурлановна, докторант КазНУ им. аль-Фараби. E-mail: maralkulzha@gmail.com.

Жапсарбаева Ляйля Курмантаевна, кандидат физико-математических наук, PhD, КазНУ им. аль-Фараби. E-mail: leylazhk67@gmail.com.

УДК 517.9

Жибер А.В., Тошмуродова Д.Р.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА ЛИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ II

В работе найдены размерности X ,Y – характеристических колец Ли гиперболических систем уравнений, порожденных уравнением Пенлеве II.

Ключевые слова: характеристическое кольцо Ли, размерность, уравнение Пенлеве II, базис, коммутаторы.

© Жибер А.В., Тошмуродова Д.Р., 2017

Zhiber A.V., Toshmurodova D.R.

CHARACTERISTIC LIE RINGS OF HYPERBOLIC SYSTEMS OF EQUATIONS GENERATED BY THE PAINLEVÉ II EQUATION

We have found the dimensions X, Y of characteristic Lie rings of hyperbolic systems of equations generated by the Painlevé II equation .

Key words: characteristic Lie ring, dimension, Painlevé II equation, basis, commutators.

Уравнения Пенлеве – общее название группы из шести обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения Пенлеве возникли в работах П. Пенлеве и его учеников как решение проблемы классификации обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u^{(n)} = R\left(y, u, u'..u^{(n-1)}\right),$$

где правая часть R голоморфна по y в некоторой области $D \subset C$ и рациональна по $u, u'..u^{(n-1)}$. Здесь аргумент y и искомая функция $u(y)$ принимают комплексные значения. Если $u(y)$ есть решение, то оно как функция комплексного переменного может иметь как однозначные особые точки, такие как полюса, существенно особые, так и многозначные особые точки, или критические точки ветвления, локализация которых на комплексной плоскости в общем случае определяется начальными условиями.

Решения уравнений Пенлеве обладают свойством Пенлеве: не имеют других подвижных особенностей, кроме полюсов. Так, решения уравнений Пенлеве I-V не имеют вообще никаких особенностей кроме полюсов; решения уравнения Пенлеве V имеют неподвижные логарифмические точки ветвления при $y = 0$ и $y = \infty$, а решения уравнения Пенлеве VI при $y = 0$, $y = 1$ и $y = \infty$.

Уравнения Пенлеве принято записывать в следующем виде:

1. $u^{IV} = 6u^2 + y$
2. $u^{IV} = 2u^3 + yu + \alpha$
3. $u^{IV} = \dfrac{(u')^2}{u} + \left(\alpha u^2 + b\right)e^y + \left(cu^3 + \dfrac{d}{u}\right)e^{2y}$, $|b| + |d| \neq 0$

4. $u^{IV} = \frac{1}{2}\frac{(u')^2}{u} + \frac{3}{2}u^3 + 4yu^2 + 2\left(y^2 - \alpha\right)u + \frac{\beta}{u}$

5. $u^{IV} = (u')^2\left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{u-1}\right) - \frac{u'}{y} + \frac{(u-1)^2}{y^2}\left(\alpha u + \frac{\beta}{u}\right) + \gamma\frac{u}{y} + \delta\frac{u(u+1)}{u-1}$

6. $u^{IV} = \frac{(u')^2}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-y}\right) - u'\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{u-y}\right) +$

$$+ \frac{u(u-1)(u-y)}{y^2(y-1)^2}\left[\alpha + \beta\frac{y}{u^2} + \gamma\frac{y-1}{(u-1)^2} + \delta\frac{u(u-1)}{(u-y)^2}\right]$$

Уравнения Пенлеве имеют приложения в важных математических проблемах: прямая и обратная задача Римана, деформация линейных дифференциальных систем, геометрия поверхностей, ортогональные полиномы и др. Уравнения Пенлеве широко используются в точно решаемых моделях статистической физики и квантовой теории поля. Уравнения Пенлеве играют решающую роль в асимптотическом анализе связанных с ним эволюционных уравнений в частных производных.

В данной работе рассматриваются гиперболические системы уравнений

$$\begin{cases} u_{xy} = v_x \\ v_{xy} = 6u^2u_x + yu_x \end{cases}, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} u_{xy} = v_x \\ v_{xy} = 2u_x^3 + yu_x + \alpha \end{cases} \qquad (2)$$

порожденные уравнением Пенлеве II $u_{yy} = 2u^3 + yu + \alpha$.

Для гиперболической системы (1) рассмотрены X и Y – характеристические кольца Ли. Доказано, что Y – характеристическое кольцо Ли системы уравнений (1) конечномерно и его размерность равна 4. Операторы Y_1, Y_2, Y_{13}, Y_{23} образуют базис Y – характеристического кольца Ли, где $Y_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}$, $Y_2 = \frac{\partial}{\partial v_1}$,

$$Y_{13}=\frac{\partial}{\partial u}+\left(6u^2+y\right)\frac{\partial}{\partial v_1}+\left(6u^2+y\right)\frac{\partial}{\partial v_2}+\left(12u\bar{u}_1+1\right)\frac{\partial}{\partial v_1}+\left(12u\bar{u}_1+1\right)\frac{\partial}{\partial v_3}+$$

$$+\left(12\bar{u}_1^2+12u\bar{u}_2+6u^2\left(6u^2+y\right)+y\left(6u^2+y\right)\right)\frac{\partial}{\partial v_3}+\cdots,$$

$$Y_{23}=\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial v_1}+\left(6u^2+y\right)\frac{\partial}{\partial v_2}+\left(6u^2+y\right)\frac{\partial}{\partial v_3}+\left(24u\bar{u}_1+2\right)\frac{\partial}{\partial v_3}+\cdots$$

X – характеристическое кольцо Ли системы уравнений (1) – кольцо медленного роста .

$\dim L_1=3,\ \dim L_2=1,\ \dim L_3=2,\ \dim L_4=2,\ \dim L_3=3$, где

$L_1=L_1\left(X_1,X_2,X_3\right),\ L_2=L_2\left(X_1,X_2,X_3,X_{13}\right),$

$L_3=L_3\left(X_1,X_2,X_3,X_{13},X_{113},X_{313}\right),$

$L_4=L_4\left(X_1,X_2,X_3,X_{13},X_{113},X_{313},X_{1313},X_{3313}\right),$

$L_5=L_5\left(X_1,X_2,X_3,X_{13},X_{113},X_{313},X_{1313},X_{3313},X_{13313},X_{31313},X_{33313}\right).$

Для гиперболической системы (2) доказано, что X – характеристическое кольцо Ли конечномерно и его размерность равна 3. Операторы X_1,X_2,X_3 образуют базис X – характеристического кольца Ли, где $X_1=\frac{\partial}{\partial u},\ X_2=\frac{\partial}{\partial v},$

$$X_3=\frac{\partial}{\partial y}+v_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\left(2u_1^3+yu_1+\alpha\right)\frac{\partial}{\partial v_1}+v_2\frac{\partial}{\partial u_2}+\left(6u_1^2u_2+yu_2\right)\frac{\partial}{\partial v_2}+\cdots$$

Y – характеристическое кольцо Ли системы (2) порождается операторами $Y_1=\frac{\partial}{\partial u_1},Y_2=\frac{\partial}{\partial v_1},$

$$Y_3=\frac{\partial}{\partial x}+u_1\frac{\partial}{\partial u}+v_1\frac{\partial}{\partial p_1}+\left(P_1+\cdots\right)\frac{\partial}{\partial p_2}+\left(P_2+\cdots\right)\frac{\partial}{\partial p_3}+\cdots+P_{4n-1}\frac{\partial}{\partial p_{4n}}+$$

$$+P_{4n}\frac{\partial}{\partial p_{4n+1}}+P_{4n+1}\frac{\partial}{\partial p_{4n+2}}+P_{4n+2}\frac{\partial}{\partial p_{4n+3}}+\cdots,$$

где P_n - полином степени $n+2$ переменных u_1,v_1. Обозначим через L_n пространство коммутаторов длины n. Справедливо следующее утверждение:

Теорема. Размерность линейного пространства коммутаторов $\dim L_n = n$, $n = 2,3,\ldots$, а базис порождается векторными полями $L_{11..13}, L_{21..13}, \ldots, L_{22..23}$. Из теоремы следует, что $2n \le \dim \sum_{i=2}^{n} (L_i) \le 2+3+\cdots+n$.

Библиографический список

1. O.S. Kostrigina, A.V. Zhiber. Darboux – integrable two – component nonlinear hyperbolic systems of equations // J. Math. Phys. 52, 033503 (2011); doi:10.1063/1.3559134 (32 pages).

2. Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б. Характеристические кольца Ли и интегрируемые модели математической физики // Уфимский математический журнал. – 2012 – Т. 4. – № 3. – С. 17–85.

Сведения об авторах

Жибер Анатолий Васильевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИМ с ВЦ УНЦ РАН.
E-mail: zhiber@mail.ru

Тошмуродова Диана Рустамовна, аспирант БашГУ.
E-mail: dia9912@yandex.ru

УДК 517.95 + 517.984

Зайнуллин Р.Р.

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В работе исследована спектральная задача, которая возникла при решении начально-граничной задачи для уравнения колебания балки, один конец которой наглухо закреплен, а другой свободен. Система собственных функций построена в явном виде и показано, что она полна и ортонормированна в пространстве квадратично-суммируемых функций.

© Зайнуллин Р.Р., 2017

Ключевые слова: дифференциальный оператор четвертого порядка, спектральная задача, собственные значения, собственные функции, полнота.

Zainullin R.R

ON ONE SPECTRAL PROBLEM FOR THE FOURTH ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR

In this paper, we investigate the spectral problem that arose when solving the initial boundary value problem for the beam oscillation equation, one end of which is tightly fixed and the other end is free. The system of eigenfunctions is constructed in an explicit form and is shown to be complete and orthonormal in the space of quadratically-summable functions.

Keywords: differential operator of the fourth order, spectral problem, eigenvalues, eigenfunctions, completeness.

Рассмотрим спектральную задачу

$$X^{IV}(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<l, \tag{1}$$

$$X(0)=X'(0)=X''(l)=X'''(l)=0, \tag{2}$$

которая получается при разделении переменных $u(x,t)=X(x)T(t)$ в уравнении

$$Lu\equiv u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0 \tag{3}$$

с граничными условиями

$$u(0,t)=u_x(0,t)=u_{xx}(l,t)=u_{xxx}(l,t)=0,\ 0\le t\le T, \tag{4}$$

описывающее изгибные колебания балки, один конец которой $x=0$ наглухо закреплен, а другой $x=l$ свободен.

К данному уравнению приходят при расчете стабильности крутящихся валов, а также при изучении вибрации кораблей [1],[2].

Если введем дифференциальный оператор L, определенный производной X^{IV} на множестве функций $C^4(0,l)\cap C^3[0,l]$, удовлетворяющим граничным условиям (2), то он снова является самосопряженным и положительным. Отсюда следует, что все собственные значения являются неотрицательными и собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональными.

При этом система собственных функций полна в пространстве $L_2[0,l]$ [3].

Собственные функции задачи (1) и (2) определяются по формуле:

$$X_n(n)=\frac{\sin d_n l}{1-\cos d_n l}(\operatorname{ch} d_n x-\cos d_n x)+\operatorname{sh} d_n x-\sin d_n x=$$

$$=\frac{2\operatorname{ch}\left(\frac{d_n l}{2}\right)\operatorname{sh} d_n\left(x-\frac{l}{2}\right)}{1+\operatorname{ch} d_n l}-\frac{2\sin\left(\frac{d_n l}{2}\right)\cos d_n\left(x-\frac{l}{2}\right)}{1-\cos d_n l}=$$

$$=a_n \operatorname{sh} d_n\left(x-\frac{l}{2}\right)-b_n \cos d_n\left(x-\frac{l}{2}\right), \qquad (5)$$

где d_n находятся как корни уравнения

$$\operatorname{ch} d_n l\cos d_n l=-1,\ n=1,2,\ldots,$$

для которых имеет место асимптотическая формула

$$d_n l=\frac{\pi}{2l}(2n-1).$$

Норма $\|X_n(x)\|$ собственных функций (5):

$$\|X_n(x)\|=\left(\int_0^l X_n^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{l}\left|\operatorname{ctg}\frac{d_n l}{2}\right|. \qquad (6)$$

На основании (5) и (6) ортонормируем систему:

$$W_n(x)=\frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|},$$

которую в дальнейшем на основании работ [3–7] будем использовать при построении решения задачи Коши для уравнения (3) с граничными условиями (4).

Библиографический список

1. Крылов А.Н. Вибрация судов.– М.: Гостехиздат, 2012.– 447 с.
2. Рэлей Л. Теория звука. Т. 1.– М.: Гостехиздат, 1955. – 503 с.
3. Неймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы.– М.: Наука. 1969. – 528 с.

4. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки // Математические методы и модели в строительстве, архитектуре и дизайне: сборник статей.– Самара.– 2015. – С. 34–42.

5. Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. уравнения. 2017. – Т. 53. – № 1. – С. 89–100.

6. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами. // Вестн. Сам.гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. – Т. 19. – № 2.– С. 311–324.

7. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики.– М.: Физматлит, 2013. – 352 с.

Сведения об авторе

Зайнуллин Рафаэль Рафкатович, студент группы МИ-41 факультета математики и информационных технологий СФ БашГУ. Науч. рук. д.ф.-м.н., проф. Сабитов Камиль Басирович.
E-mail: rafaelzainullin@gmail.com

УДК 517.95

Зайнуллов А.Р.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОТЫСКАНИЮ СОМНОЖИТЕЛЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ВРЕМЕНИ

В работе изучаются начально-граничная задача и на ее основе обратная задача по определению сомножителя правой части телеграфного уравнения, зависящего от времени. Решение этих задач построено в виде суммы ряда. Доказаны теоремы единственности и существования решения задач.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, начально-граничная задача, обратная задача, ряд, интегральное уравнение, единственность, существование.

© Зайнуллов А.Р., 2017

Zaynullov A.R.

INVERSE PROBLEM OF FINDING THE TIME-DEPENDENDING FACTORS OF THE RIGHT PART OF THE TELEGRAPH EQUATION

In this paper we study the initial-boundary value problem and on its basis the inverse problem about the determination of the factor of the right-hand side of the telegraph equation that depends on time. The solution of these problems is constructed in the form of a sum of a series. The uniqueness and existence theorems for the solution of problems are proved.

Key words: telegraph equation, initial-boundary value problem, inverse problem, series, integral equation, uniqueness, existence.

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} - u_{tt} - b^2 u = F(x,t) \tag{1}$$

в прямоугольной области

$$Q = \{(x,t) \mid 0 < x < l, 0 < t < T\},$$

где $b \geq 0$, $l > 0$, $T > 0$ – заданные действительные числа.

Поставим следующие задачи.

Задача 1. *Найти функцию* $u(x,t)$*, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q); \tag{2}$$

$$Lu(x,t) = F(x,t),\ (x,t) \in Q; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t \in [0,T]; \tag{4}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,l],\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in [0,l], \tag{5}$$

где $F(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$.

Пусть $F(x,t) = f(x)g(t)$.

Задача 2. *Найти функции* $u(x,t)$ *и* $g(t)$*, удовлетворяющие условиям (2) – (5) и*

$$g(t) \in C[0,T]; \tag{6}$$

$$u(x_0,t) = h(t),\ 0 \leq t \leq T,\ 0 < x_0 < l, \tag{7}$$

здесь $f(x)$, $h(t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные функции, x_0 – заданная точка из $(0,l)$.

Отметим, что аналогичная обратная задача изучена для уравнения теплопроводности [1] – [3] и для уравнений смешанного параболо–гиперболического типа в работах [4] – [7].

Решение прямой задачи 1 определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \tag{8}$$

где

$$u_k(t) = \varphi_k \cos\lambda_k t + \frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^t F_k(s)\sin[\lambda_k(t-s)]ds, \tag{9}$$

$$\varphi_k = \int_0^l \varphi(x)X_k(x)dx,\ \psi_k = \int_0^l \psi(x)X_k(x)dx,\ F_k(t) = \int_0^l F(x,t)X_k(x)dx,\ t\in[0,T],$$

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_k x,\ \lambda_k = \sqrt{b^2+\mu_k^2},\ \mu_k = \frac{\pi k}{l},\ k\in\mathbb{N}.$$

Следуя работам [8], [9], нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $\varphi(x)\in C^3[0,l]$, $\psi(x)\in C^2[0,l]$, $F(x,t)\in C(\overline{Q})\cap C_x^2(\overline{Q})$, *и* $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, $\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$, $\psi(0)=\psi(l)=0$, $F(0,t)=F(0,l)=0$, $t\in[0,T]$, *то существует единственное решение прямой задачи 1, и оно определяется в виде суммы ряда (8) с коэффициентами (9).*

Теперь на основании формулы (8) решения прямой задачи 1 изучим обратную задачу 2. В силу теоремы 1 функции $f(x)$ и $g(t)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$f(x)\in C^2[0,l],\ f(0)=f(l)=0;\ g(t)\in C[0,T].$$

При этом функции (9) принимают вид:

$$u_k(t) = \varphi_k\cos\lambda_k t + \frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t + f_k g_k(t), \tag{10}$$

$$F_k(t) = g(t)f_k,\ f_k = \int_0^l f(x)X_k(x)dx,$$

где

$$g_k(t) = \frac{1}{\lambda_k}\int_0^t g(s)\sin(\lambda_k(t-s))ds.$$

Удовлетворим функцию (8) граничному условию (7):

$$u(x_0,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x_0) = h(t),\ 0 \le t \le T. \tag{11}$$

Подставляя (10) в (11), получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t g(s)K(t,s)ds = \tilde{h}(t),\ 0 \le t \le T,$$

где

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k}\sin\left[\lambda_k(t-s)\right]X_k(x_0), \tag{12}$$

$$\tilde{h}(t) = h(t) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k \cos\lambda_k t - \frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t\right)X_k(x_0).$$

Дифференцируя уравнение (12) по t, имеем

$$K(t,t)g(t) + \int_0^t g(s)\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}ds = \tilde{h}'(t). \tag{13}$$

Из (12) видим, что $K(t,t) \equiv 0$. Тогда еще раз дифференцируя уравнение (13) по t, получим

$$\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\Big|_{s=t}\ g(t) + \int_0^t g(s)\frac{\partial^2 K(t,s)}{\partial t^2}ds = \tilde{h}''(t). \tag{14}$$

Теперь из (12) вычислим

$$\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\Big|_{s=t} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x_0) = f(x_0).$$

Отсюда видно, что если $f(x_0) \neq 0$, то уравнение (14) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью при условии $g(t) \in C^2[0,T]$. Следовательно, интегральное уравнение (14) имеем единственное решение $g(t)$ в классе $C[0,T]$ и приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1, *функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям (10),* $g(t) \in C^2[0,T]$, $h(0) = \varphi(x_0)$, $h'(0) = \psi(x_0)$. *Тогда, если* $f(x_0) \neq 0$, *то задача* 2 *имеет единственное решение, которое определяется по формуле (8), в которой функция* $g(t)$ *находится из интегрального уравнения (14).*

Теперь выясним насколько существенно условие $f(x_0) \neq 0$ в теореме 2. Пусть для некоторых $k = m$:

$$\sin \lambda_m x_0 = 0.$$

Тогда для функции $f(x) = \sin \lambda_m x$ при любой функции $g(t) \in C[0,T]$ существует ненулевое решение задачи 2 (где $\varphi(x) = \psi(x) = 0$)

$$u(x,t) = \frac{\sin \lambda_m x}{\lambda_m} \int_0^t g(s) \sin\left[\lambda_m (t-s)\right] ds.$$

Библиографический список

1. Зайнуллов А.Р. Обратные задачи для уравнения теплопроводности // Вестник СамГУ, 2015. – № 6 (128). – С. 62-75.

2. Зайнуллов А.Р. Обратная задача для двумерного уравнения теплопроводности по отысканию начального распределения // Вестник СГТУ. Серия «Физико-математические науки», 2015. – Т. 19, № 4. – С. 667-679.

3. Зайнуллов А.Р. Об одной обратной задаче для двумерного уравнения теплопроводности // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика, 2016. – С. 50-59.

4. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Матем. заметки, 2010. – Т. 87.– № 6. – С. 907-918.

5. Сидоров С.Н. Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного параболо–гиперболического типа // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика, 2014. – Т. 36.– № 19 (190). – С. 91-104.

6. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Известия вузов. Математика, 2015. – № 1. – С.46-59.

7. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. – М.: Наука, 2016. – 272 с.

8. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с.

9. Сабитов К.Б., Зайнуллов А.Р. Обратные задачи по определению начальных условий в смешанной задаче для телеграфного уравнения // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 2017. – Т. 141. – С. 107-130.

Сведения об авторах

Зайнуллов Артур Рашитович, аспирант кафедры математического анализа СФ БашГУ. E-mail: arturzayn@mail.ru.

УДК 517.95

Зайцева Н.В.

ЗАДАЧА ТИПА КЕЛДЫША ДЛЯ B-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА

Для гиперболического уравнения с оператором Бесселя поставлена краевая задача с интегральным нелокальным условием второго рода в прямоугольной области. Решение построено в явном виде в виде ряда Фурье-Бесселя и приведено обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, оператор Бесселя, нелокальное интегральное условие, ряд.

Zaitseva N.V.

KELDYSH TYPE PROBLEM FOR B- HYPERBOLIC EQUATION WITH INTEGRAL BOUNDARY VALUE CONDITION OF THE SECOND KIND

We consider a boundary value problem for a hyperbolic equation with Bessel differential operator in a rectangular domain with integral nonlocal boundary value condition of the second kind. The solution of the problem is obtained in explicit form. The solution is obtained in the form of

© Зайцева Н.В., 2017

the Fourier-Bessel series. Its convergence is proved in the class of regular solutions.

Key words: hyperbolic equation, Bessel differential operator, nonlocal boundary value condition, Fourier-Bessel series.

Рассмотрим в прямоугольной области

$$D=\{(x,t) \mid 0 < x < l,\ 0 < t < T\},$$

где $l,T > 0$ – заданные действительные числа, гиперболическое уравнение с оператором Бесселя, которое по терминологии И.А. Киприянова [1] будем называть *B*-гиперболическим уравнением

$$T_B u(x,t) \equiv u_{tt} - x^{-k} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right) = 0, \tag{1}$$

где $k \geq 1$ – заданное действительное число.

Постановка задачи. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,t) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D), \tag{2}$$

$$T_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{4}$$

$$u_x(l,t) + \int_0^l u(x,t) x^k dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

В силу результатом работ М.В. Келдыша [2], С.П. Пулькина [3] для *B*-эллиптического уравнения

$$u_{tt} + x^{-k} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right) = 0$$

при $k \geq 1$ отрезок $x = 0$ освобождается от граничного условия Дирихле. В работах С.П. Пулькина [3], К.Б. Сабитова [4, с.68] показано, что справедливо условие

$$u_x(0,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{6}$$

Это же условие справедливо и для уравнения (1), что нетрудно показать, разделяя переменные.

Интегральное условие (5) будем называть, согласно терминологии Л.С. Пулькиной [5], интегральным условием второго рода. Ранее нами была исследована [6] при значении параметра $k \geq 1$ начально-граничная задача (2) – (4) с интегральным условием первого рода

$$\int_0^l u(x,t)\,x^k\,dx = A = const, \quad 0 \le t \le T .$$

Решение задачи (2) – (5) построено в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{7}$$

где

$$X_n(x) = \frac{1}{\left\| \tilde{\tilde{X}}_n \right\|_{L_2,\rho(0,1)}} \tilde{\tilde{X}}_n(x),$$

$$\tilde{\tilde{X}}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in N ,$$

здесь $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка $\nu = \dfrac{k-1}{2}$, собственные значения μ_n определяются как нули уравнения

$$J_{\frac{k+1}{2}}(\mu) = 0, \quad \mu = \lambda l ,$$

$$\left\| \tilde{\tilde{X}}_n \right\|^2_{L_2,\rho(0,1)} = \int_0^l \rho(x)\, \tilde{\tilde{X}}_n^{\,2}(x)dx, \quad \rho(x) = x^k ,$$

$$u_n(t) = \varphi_n \cos\lambda_n t + \frac{\psi_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n t +$$

$$+ \frac{\varphi'(l)}{\lambda_n^2 - l^k} l^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x)\left(\cos\sqrt{l^k}\,t - \cos\lambda_n\right) +$$

$$+ \frac{\psi'(l)}{\lambda_n^2 - l^k} l^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x)\left(l^{-\frac{k}{2}}\sin\sqrt{l^k}\,t - \frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n\right),$$

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x)\,x^k\,X_n(x)dx, \quad \psi_n = \int_0^l \psi(x)\,x^k\,X_n(x)dx .$$

Методом интегральных тождеств доказана

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2) – (5), то оно единственно.*

Методом спектрального анализа [7] – [9] доказаны следующие утверждения:

Лемма 1. *Если функция* $\varphi(x) \in C^2[0,l]$ *и существует производная* $\varphi'''(x)$, *имеющая конечное изменение на* $[0,l]$, *функция* $\psi(x) \in C^1[0,l]$ *и существует производная* $\psi''(x)$, *имеющая конечное изменение на* $[0,l]$ *и*

$$\varphi'(0) = \varphi''(0) = \psi'(0) = \varphi'(l) = \psi'(l) = 0,$$

то выполняются оценки

$$|\varphi_n| \le \frac{C_1}{n^4}, \quad |\psi_n| \le \frac{C_2}{n^3}$$

где C_i *- положительные постоянные.*

Теорема 2. *Если функции* $\varphi(x), \psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 1, то существует единственное решение задачи (2) – (5), определяемое рядом (7), при этом сумма ряда* $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.

Теорема 3. *Для решения задачи (2) – (5) справедлива оценка*

$$\|u\|_{L_2,\rho(0,1)} \le C_3\left(\|\varphi\|_{L_2,\rho(0,1)} + \|\psi\|_{L_2,\rho(0,1)}\right),$$

где

$$\|f\|^2_{L_2,\rho(0,1)} = \int_0^l \rho(x)|f(x)|^2\,dx, \quad \rho(x) = x^k.$$

Библиографический список

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 208 с.

2. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // ДАН. – 1951. – Т. 77. – № 2. – С. 181–183.

3. Пулькин С.П. О единственности решения задачи Геллерстедта // Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 6 (19). – С. 214–225.

4. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. – М.: Физматлит, 2014. – 304 с.

5. Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральным условием для гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 7. – С. 887–892.

6. Zaitseva N.V. Keldysh type problem for B-hyperbolic equation with integral boundary value condition of the first kind // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38. – № 1. – PP. 162-169. DOI: 10.1134/S199508021701022X

7. Сабитов К.Б. Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46. – № 10. – С. 1468–1478.

8. Сабитов К.Б. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. – 2011. – Т. 89. – Вып. 4. – С. 596–602.

9. Сабитова Ю.К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Матем. заметки. – 2015. – Т. 98. – № 3. – С. 393–406.

Сведения об авторе

Зайцева Наталья Владимировна, ассистент кафедры высшей математики и математического моделирования Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета.
E-mail: n.v.zaiceva@yandex.ru

УДК 534

Зарипов Д.М.

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДОВ

Рассмотрен нелинейный изгиб пролета горизонтального трубопровода на двух опорах под воздействием ударного давления во внутренней жидкости. Решение нелинейного уравнения задачи получено численным методом. Приводится сравнение результатов в линейной и нелинейной постановках. Показано, что в нелинейном случае возникает колебательный режим движения трубопровода, в отличии от линейного случая, когда происходит экспоненциальный рост амплитуды прогиба трубопровода.

Ключевые слова: трубопровод, ударное давление, колебания.

© Зарипов Д.М., 2017

Zaripov D.M.

NONLINEAR OSCILLATIONS OF PIPELINES

A nonlinear bending of the span of a horizontal pipeline on two supports is considered under the influence of impact pressure in the internal fluid, taking into account the effect of the longitudinal force on the bending. The solution of the nonlinear equation of the problem is obtained by a numerical method. Comparison of results in linear and non-linear statements is given. It is shown that in the nonlinear case, the oscillatory regime of the pipeline movement arises, in contrast to the linear case when the exponential growth of the deflection amplitude of the pipeline occurs.

Keywords: pipeline, impact pressure, oscillations.

Введение. Вопросы статики и динамики трубопроводов рассмотрены во многих изданиях. Например, в [1-3] определено влияние внутреннего перепада давления в трубе на ее статический и динамический изгиб, экспериментальное изучение которого дано в [3]. Самовозбуждение периодических и хаотических колебаний при стоячих и бегущих волнах давления в транспортируемой жидкости рассмотрено в [4, 5] и последующих работах. Для изучения этих режимов колебаний нужно исходить из нелинейных соотношений. В частности, в работе [5] найдено критическое значение внутреннего давления p_*, при превышении которого происходит потеря устойчивости статического положения равновесия трубопровода и при периодическом возбуждении волн давления могут возникать сложные колебания, в том числе и хаотические.

Экпериментальное исследование ударной волны в жидкости проводилось в работе [6]. Функция давления p в воде берется из этой работы.

Исследование динамической реакции и напряженно-деформированного состояния трубопровода при действии внутренней ударной волны приведено в работе [7].

Целью исследования в работе [8] является моделирование гидродинамического удара в трубопроводе вязкоупругими опорами в осевом направлении. Вязкоупругие материалы опор были описаны с использованием обобщенной модели Кельвина-Фойгта. Уравнения движения жидкости были решены методом характеристик, а уравнение колебаний трубы было решено с использованием метода конечных элементов. Использовались различные граничные условия в осевом направлении: полностью свободные концы; жесткая опора; упру-

гие и вязкоупругие опоры. Результаты количественно подтверждают, что использование опор с вязкоупругим поведением в осевом направлении трубопровода может значительно уменьшить колебания трубы (смещения и напряжения).

В статье [9] представлен анализ модели, описывающей поперечные колебания трубы, вызванные оциляцией скорости потока жидкости. Движение описывется двумя нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных с периодически изменяющимися коэффициентами. Для решения задачи используется метод Бубного-Галеркина с использованием ортогональных собственных функций. Для определения областей неустойчивости была применена теория Флоке. Выявлены условия возникновения параметрического резонанса и области высокоамплитудных колебаний. Были исследованы характер и форма колебаний, указывающие на возможность возбуждения субгармонических и квазипериодических колебаний в области параметрического резонанса.

В работе [10] представлен обширный обзор литературы, относящейся к динамическому анализу трубопроводных систем с заполненной жидкостью. Проводится сравнение различных типов моделей и алгоритмов моделирования различных уровней сложности и обсуждается их область применения. Сопоставляются эффекты влияния параметров жидкости, механических свойств и граничных условий на динамический характер поведения труб, транспортирующих жидкость.

Постановка задачи. Рассматривается изгиб пролета горизонтального трубопровода на двух опорах под воздействием ударного давления во внутренней жидкости. Предполагается, что трубопровод испытывает только упругие деформации, расстояние между опорами L на порядок больше радиуса трубопровода R, который на порядок больше толщины стенки h. Принимается также, что при изгибе поперечное сечение сохраняет круговую форму, остается плоским и перпендикулярным к изогнутой осевой линии. Влияние течения жидкости в трубопроводе не учитывается. Жидкость принимается идеальной и несжимаемой, поэтому давление в жидкости по длине трубопровода устанавливается мгновенно и состоит из постоянной и переменной частей $p = p_0 + p(t)$ (t – время). Расчетная схема представлена на рис. 1.

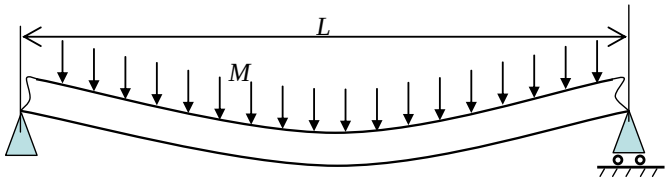


Рис. 1

Функция переменной части давления, принимается в виде [6]

$$p = 6.75 p_e \tau (1-\tau)^2 . \qquad (1)$$

Здесь безразмерное время $\tau = t/t_e$, где t_e – длительность ударной волны. Максимальное значение $p = p_e$ достигается при $\tau = 1/3$. Будет рассмотрен и случай, когда давление после достижения максимального значения остается постоянным (p_0+p_e – штриховая линия). Функции давления представлены на рис. 2.

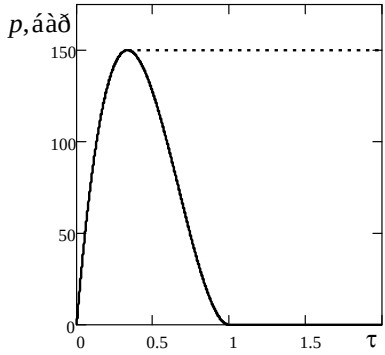


Рис. 2

Уравнение движения трубопровода относительно прогиба записывается в виде [4]

$$D\frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4} + M\frac{\partial^2 w_*}{\partial t^2} + \left[\pi R^2\left(1-\frac{2\nu}{1+\lambda}\right)(p_0+p) - \right.$$
$$\left. - \frac{EF}{2L(1+\lambda)}\int_0^L \left(\frac{\partial w_*}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2} = Mg \qquad (2)$$

Здесь $D = \pi ERh$ – изгибная жесткость трубопровода, $M = \pi R(2h\rho + R\rho_f)$ – масса трубопровода единичной длины с внутренним радиусом R, толщиной стенки h, плотностями материала трубы ρ и жидкости ρ_f. При записи D и M пренебрегаем величиной h/R по сравнению с единицей. Положительное направление гравитационного ускорения g и прогиба принято вниз, ν – коэффициент Пуассона. Коэффициент линейно-упругой податливости опор $\lambda = CL/(2\pi RhE)$, где C – жесткость опоры в продольном направлении.

Прогиб $w_* = w_0(x) + w(x,t)$ состоит из статической части $w_0(x)$, вызываемой собственным весом gM и давлением p_0, и динамической части $w(x,t)$, вызываемой давлением p.

Первый член уравнения (2) характеризует упругие силы, второй – инерционные силы. Изгиб трубы с внутренним давлением $p_0 + p$ и кривизной $\partial^2 w_* / \partial x^2$ приводит к образованию распределенной боковой силы [2]

$$\pi R^2 \left(1 - \frac{2\nu}{1+\lambda}\right)(p_0 + p)\frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2},$$

направленной в сторону выпуклости осевой линии. При изгибе трубопровода возникает продольная сила в следствие удлинения его осевой линии, которая равна

$$N = \frac{EF}{2L(1+\lambda)} \int_0^L \left(\frac{\partial w_*}{\partial x}\right)^2 dx,$$

где EF – продольная жесткость трубопровода. Продольная сила N взята со знаком минус, поскольку противодействует изгибу трубопровода [5]. Настоящая работа отличается от исследования, приведенного в [7] учетом этой продольной силы.

Граничные условия относительно функции прогиба записываются в виде:

$$w_* = \frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, L \tag{3}$$

Решение нелинейного уравнения движения трубопровода. Приближенные выражения w_0 и w для случая свободного опирания концов (3) принимаются в виде

$$w_0 = W_0 \sin \beta x, \qquad w = W \sin \beta x \qquad (\beta = \pi/L). \tag{4}$$

Статическая составляющая прогиба трубопровода под действием собственного веса и давления p_0 описывается следующим уравнением (в линейном случае)

$$D\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+\pi R^2\left(1-\frac{2\nu}{1+\lambda}\right)p_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}=gM\,, \qquad (5)$$

решение которого относительно амплитуды прогиба (4) имеет вид

$$W_0=\frac{\pi gM}{2D\beta^4(1-\eta_0^2)}, \qquad \eta_0^2=\frac{p_0}{p_0^*} \qquad p_0^*=\frac{D\,\beta^2}{\left(1-\frac{2\nu}{1+\lambda}\right)\pi R^2}\,. \qquad (6)$$

Здесь p_0^* – критическое значение давления p_0, когда линейное решение возрастает неограниченно. Предполагается, что $\eta_0^*<1$.

Нелинейное уравнение статики имеет следующий вид:

$$D\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+\left[\pi R^2\left(1-\frac{2\nu}{1+\lambda}\right)p_0-\frac{EF}{2L(1+\lambda)}\int_0^L\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}=gM \quad (7)$$

Решение уравнения (7) с учетом (4) сводится к решению следующего алгебраического уравнения [5]:

$$W_0^3+a_1W_0+a_0=0\,, \qquad (8)$$

где введены следующие обозначения

$$a_0=-\frac{2gLM(1+\lambda)}{EF\beta^5},\ a_1=\frac{4(1+\lambda)}{EF\beta^3}\left[D-\pi R^2p_0\left(1-\frac{2\nu}{1+\lambda}\right)\right].$$

Можно выписать формулу для критического значения p_0, при превышении которого появляются второе и третье статические положения равновесия:

$$p_{cr}^*=p_0^*\left[1+\frac{3}{4D\beta^2}\left(\frac{EF(gLM)^2}{1+\lambda}\right)^{1/3}\right] \qquad (9)$$

Примем следующие исходные данные: $L=4$ м, $R=0.05$ м, $h=0.002$ м, $E=2\cdot10^6$ бар $=2\cdot10^{11}$ кг/м·с^2, $p_0=30$ бар, $p_e=150$ бар, $\rho=7800$ кг/м·с^2, $\rho_f=1000$ кг/м·с^2, $t_e=0.001$ с, $\nu=0.3$.

Значение статического прогиба в линейном случае равно $W_0 = 2.95 \cdot 10^{-3}$ ($p^* = 308{,}4$ бар), а нелинейном случае $W_0 = 4.62 \cdot 10^{-3}$ ($p^*_{cr} = 384{,}3$ бар).

Решение исходной задачи строится для уравнения относительно амплитуды динамического прогиба, которое получается вычитанием из (2) уравнения (7), с учетом выражения для давления (1) и приближений (4). Получается уравнение относительно амплитуды динамического прогиба

$$\frac{d^2W}{d\tau^2} + \left[\omega^2 - \mu^2\tau(1-\tau)^2 - \gamma^2 W^2\right]W = \mu^2\tau(1-\tau)^2 W_0,$$

$$\mu^2 \equiv \frac{27\left(1-\frac{2\nu}{1+\lambda}\right)\pi R^2 p_e \beta^2 t_e^2}{4M}, \quad \omega^2 = \Omega^2(1-\eta_0^2), \qquad (10)$$

$$\Omega^2 = \frac{D\beta^4 t_e^2}{M}, \quad \gamma^2 = \frac{\pi EF}{4L(1+\lambda)M}$$

где Ω и ω – собственные частоты колебаний трубопровода при нулевом перепаде давления и внутреннем перепаде p_0, умноженные на t_e.

Для решения уравнения (10) используется методика, подробно описанная в работе [5].

Результаты моделирования. Для тестирования программы использовались аналитические решения для линейного уравнения, полученные в работе [7]. Как видно из рисунков 3, 4 и 5 численное интегрирование хорошо согласуется с аналитическими решениями, как для функции ударного давления по формуле (1), так и для случая установления в системе постоянного внутреннего давления $p_0 + p_e$ после достижения максимального значения ударного давления ($\tau \geq 1/3$, рис. 2 штриховая линия). В первом случае в системе устанавливается колебательный режим (рис. 3, 4). Во втором случае вместо осциллирующего решения имеется экспоненциальный рост динамического прогиба в рамках линейной теории изгиба (рис. 5).

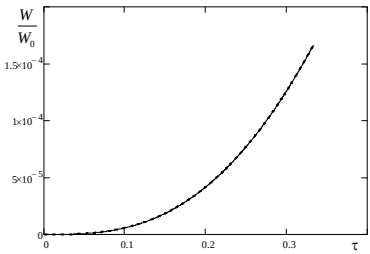


Рис. 3

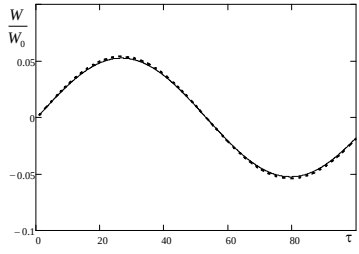


Рис. 4

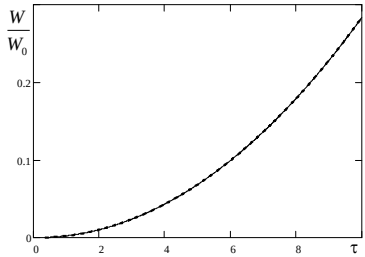


Рис. 5

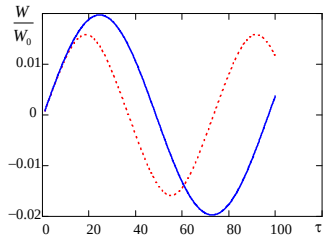


Рис. 6.

Учет влияния осевой силы на колебательный процесс, когда давление в системе принимается переменное давление по формуле (1) приводит к уменьшению амплитуды колебаний при этом происходит рост частоты (рис. 6, сплошная линия без учета осевой силы, штриховая – с учетом осевой силы).

Проведем анализ поведения системы, когда в системе устанавливается постоянное давления равное $p_0 + p_e$ ($\tau > 1/3$). В этом случае в уравнении (10) необходимо положить $\mu = 0$.

На рис. 7 дана зависимость динамического прогиба в рамках линейной теории изгиба (штриховая линия) и с учетом продольной силы (сплошная кривая) для значений коэффициента линейно-упругой податливости опор равных: $\lambda = 0$ – неподвижные опоры и $\lambda = 1$. Как видно из рисунка в случае учета нелинейной продольной силы возникает колебательный режим, т.е. решение ограничено, и не происходит экспоненциального роста динамического прогиба. Для $\lambda = 1$ амплитуда и частота колебаний возрастает.

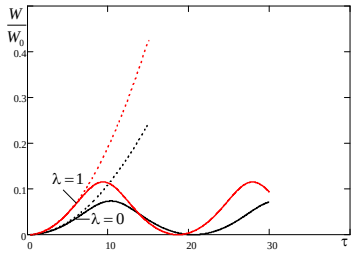


Рис. 7

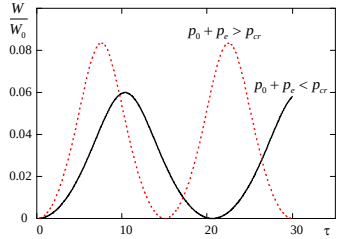


Рис. 8

На рис. 8 показан случай неподвижных опор ($\lambda = 0$), давление принято $p_0 + p_e < p_{cr}$ ($p_0 = 30$ бар, p_e=150 бар, $p_{cr} = 384{,}3$ бар) – сплошная линия и штриховая для $p_0 + p_e > p_{cr}$ ($p_0 = 100$ бар, p_e=290 бар). Как видно, с увеличением внутреннего давления растет амплитуда и частота колебаний.

Таким образом, в статье произведен сравнительный анализ динамической реакции и напряженно-деформированного состояния трубопровода при действии внутренней ударной волны в линейной [7] и нелинейной постановках. Показано, что учет влияния нелинейной продольной силы приводит к уменьшению амплитуды и увеличению частоты. Установлено, что при увеличении внутреннего давления происходит рост амплитуды и частоты колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-41-020400).

Библиографический список

1. Ilgamov M.A., Tang D.M., Dowell E.H. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // J. Fluids and Structures. – 1994. – Vol. 8. – P. 139-156

2. Ilgamov M.A. Static Problems of Hydroelasticity. - Moscow: Nauka. Fizmatlit, 1998. - 208 p.

3. Tang D.M., Ilgamov M.A., Dowell E.H. Buckling and post-buckling behaviour of a pipe subjected to internal pressure // Journal of Applied Mechanics: Transactions ASME. – 1995. – Vol. 62.– № 3. – P. 595-600.

4. Ильгамов М.А., Мишин В.Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Изв. РАН, Механика твердого тела. – 1997. – № 1. – С. 181-192.

5. Ильгамов М.А., Лукманов Р.Л., Зарипов Д.М. Механизм возбуждения гидроупругих колебаний трубопровода // Сб. трудов Института механики УНЦ РАН.– 2003.– С. 21-52.

6. Павлов А.А., Ильгамов М.А. Исследование ударной волны в жидкости // Труды семинара по теории оболочек. КФТИ АН СССР. – 1974.– Вып. IV. – С. 181-195.

7. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А. Упругая реакция трубопровода на внутреннее ударное давление // ДАН.– Т. 470.– № 2.– 2016.– С.162-165.

8. Roohollah Zanganeh, Ahmad Ahmadi, Alireza KeramatFluid–structure interaction with viscoelastic supports during waterhammer in a pipeline // Journal of Fluids and Structures.– V. 54.– 2015. – P. 215-234

9. Jan Łuczko, Andrzej Czerwiński Parametric vibrations of flexible hoses excited by a pulsating fluid flow, Part I: Modelling, solution method and simulation // Journal of Fluids and Structures V.55.– 2015.– P. 155-173.

10. Shuaijun Li, Bryan W. Karney, Gongmin Liu FSI research in pipeline systems – A review of the literature // Journal of Fluids and Structures V.57. 2015. – P. 277–297.

Сведения об авторах

Зарипов Дамир Мунзирович, кандидат физико-математических наук, доцент ИЭС УГНТУ, старший научный сотрудник ИМех УНЦ РАН. E-mail: damir@anrb.ru.

УДК 004.414.23

Захаров И.В. Мустафина С.А.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОСЕТЕВОГО ПОДХОДА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В работе использованы модели нейросетей для описания и исследования химических реакций.

Ключевые слова: нейронные сети, статистика, вычислительный эксперимет, персептрон.

© Захаров И.В. Мустафина С.А., 2017

Zakharov I.V., Mustafina S.A.

APPLICATION OF A NEUROET NETWORK APPROACH AT THE SIMULATION OF CHEMICAL PROCESSES

In the work, the models of neural networks were used to describe and study chemical reactions.

Key words: neural networks, statistics, computational experiment, perceptron.

Для работы с нейросетями есть мощные инструментальные средств. К числу таких пакетов относится STATISTICA NeuralNetworks (нейронно-сетевой пакет фирмы StatSoft), в котором представлен полный спектр нейросетевых методов анализа данных. Для визуализации данных в пакете STATISTICA NeuralNetworks реализованы диаграммы рассеяния и трехмерные поверхности отклика, помогающие пользователю понять "поведение" сети [1]. В данный момент нейросети нашли свое применение в химических исследованиях, и значимость данных методов исследования растет с каждым днем.

Цель данной работы – на основе анализа экспериментальных исследований проведенных в проточном изотермическом реакторе с использованием катализатора К-24, который эксплуатируется в настоящее время в промышленных реакторах дегидрирования ЗАО «Каучук» (г. Стерлитамак) [2], построить нейросетевую модель. В ходе кинетических экспериментов было исследовано влияние температуры, объемной скорости подачи сырья и разбавления метилбутенов водяным паром на состав продуктов реакции, конверсию метилбутенов и выход изопрена [3]. Температуру дегидрирования изменяли от 600^{o}C до 640^{o}C, объемную скорость от 0,6 ч$^{-1}$ до 2,0 ч$^{-1}$, мольное разбавление сырья водяным паром от 1:10 до 1:30.

Предварительно были проанализированы 100 сетей и выбран перспективный тип сети и вариант архитектуры – это трехслойный персептрон с шестью скрытыми нейронами. Сравнение предсказанных и экспериментальных значений концентраций компонентов при различной скорости подачи, приведено в табл.1. Данная нейросетевая модель оптимальна. В дальнейшем можно применить к новым наборам данных, например, для прогнозирования.

Таблица 1

Опыт					Наблюдаемые	Предсказанные	Остатки
Температура, оС	600	600	600	620	640	639,98	0,26445
Скорость подачи, ч-1	1	1	0,6	1	1	1,2645	0,50803
Разбавление паром	1:10	1:15	1:15	1:20	1:20	0,5636	0,27977
H2	1,71	1,58	1,7	1,94	2,79	3,0698	0,19481
CH4	1,22	0,93	1,02	1,3	1,96	2,1548	-1,77599
CO2	5,89	6,7	6,94	8,56	9	7,224	-1,32447
i-C5H12	3	1,36	2,75	2,35	3,69	2,3655	0,11966
a-i-C5H10	3,18	3,28	3,01	2,86	2,44	2,5597	-0,21582
n-C5H12	5,14	4,67	4,53	4,7	4,53	4,3142	-0,215
n-C5H10	3,01	1,95	1,93	2,32	1,25	2,823	1,2481

Работа выполнена в рамках гранта СФ БашГУ №В17-74.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-47-020068, и проекта № 13.5143.2017/БЧ, выполняемого вузом в рамках государственного задания Минобрнауки РФ.

The study was funded by RFBR according to the research project № 17-47-020068 and project No. 13.5143.2017/ BCH, carried out by the University in the framework of the State Task of the Ministry of Education of the Russian Federation.

Библиографический список

1. Боровиков В. STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: Для профессионалов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2003. – 686 =с.

2. Берзина Д.В., Смирнов Д.Ю., Мустафина С.А. Моделирование процесса дегидрирования метилбутенов в присутствии оксидных железокалиевых катализаторов // Катализ в промышленности. 2014. – № 4. – С. 22-26.

3. Степашина Е.В., Мустафина С.А. Численный алгоритм уточнения механизма химической реакции DRGEP-методом // Журнал Средневолжского математического общества, 2011.– Т. 13.– № 3. – С. 118-121.

Сведения об авторах

Захаров Игорь Владимирович, магистрант СФ БашГУ. E-mail: zahrum@mail.ru

Мустафина Светлана Анатольевна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор СФ БашГУ. E-mail: Mustafina_SA@mail.ru.

УДК 004.02

Иванов Е.Ю., Хасанова С.Л.

РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕРАКТИВНОГО ПОСТРОЕНИЯ ГРАФА

В работе реализовано приложение интерактивного построения графа.

Ключевые слова: граф, ребро, вершина.

Ivanov E.Yu., Hasanova S.L.

DEVELOPMENT OF AN APPENDIX OF INTERACTIVE CONSTRUCTION OF A TABLE

In the work, an interactive graph application is implemented.

Keywords: graph, edge, vertex.

В настоящее время теория графов и особенно алгоритмы на графах находят наиболее широкое применение в программировании. Теория графов предоставляет удобный язык для описания программных моделей. Стройная система специальных терминов и обозначений теории графов позволяют просто и доступно описывать сложные и тонкие вещи реальной действительности. Теория графов имеет широкие приложения, и важным является наличие наглядной графической интерпретации состояния графа. Визуализация графов и их алгоритмов позволяют лучше понять состояние системы. В работах [2,3]

© Иванов Е.Ю., Хасанова С.Л., 2017

были сделаны попытки визуализация графов и их алгоритмов средствами Macromedia Flash.

Представленное приложение визуализации построения графа реализовано в среде разработки Embarcadero RAD Studio 10.1 Berlin. Данная среда разработки была выбрана в связи с тем, что она позволяет наиболее удобно реализовать структуру данных графа. В качестве структур данных для описания графа были использованы записи, списки, классы.

```
type
        TEdge = record
                istart :integer; //где istart - индекс первой вершины ребра в TVertexList
                ifinish:integer; // ifinish - второй
                value:integer;
        end;
        TVertexList = TList<TPoint>;
        TEdgeList = TList<TEdge>;
         TGraph = class
            Vertex:TVertexList;
            Edges :TEdgeList;
            constructor Create;
            destructor Destroy; override;
            procedure Draw( Canvas:TCanvas );
            function FindVertexIndex( const mouse:TPoint; out index:integer ):Boolean;
            procedure DeleteVertex( index:integer );
        end;
```

При запуске приложения пользователю предлагается пустая форма для построения графа (рис. 1).

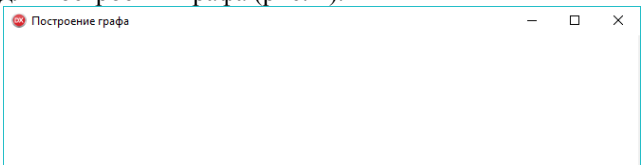


Рис. 1. Пустая форма

Для начала построения графа пользователю необходимо нажать на форму левой кнопкой мыши, после чего на ней появится первая вершина графа (рис 2). Что реализовано следующим образом:

```
if Shift = [ssLeft] then
            begin
                        if Graph.FindVertexIndex( StartPt, i ) then
                                    IndexPt := i
                        else
                              IndexPt := Graph.Vertex.Add( StartPt );
                IsStartPt := true;
                InvalidateRect( Handle, nil, false );
                 exit;
        end;
i:=1;
Canvas.Brush.Color := clSkyBlue;
for p in Vertex do
begin
    Canvas.Ellipse( p.X-R, p.Y-R, p.X+R, p.Y+R );
    Canvas.TextOut(p.X - (Length(IntToStr(i))*3), p.Y - 6, IntToStr(i));
    inc(i);
end;
```

Аналогичным образом создаются все последующие вершины.

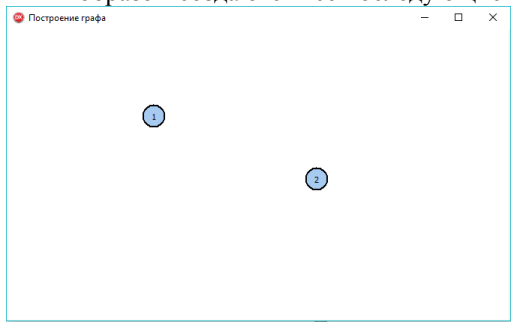


Рис. 2. Построение вершин

Удаление вершины реализовано нажатием на вершине правой кнопкой мыши, оставшиеся вершины будут переиндексированы.

На следующем этапе строится ребро графа. Для этого, зажав клавишу «Clrl» и левую кнопку мыши, протянем ребро от начальной до конечной вершины. При этом происходит интерактивная прорисовка графа (рис. 3).

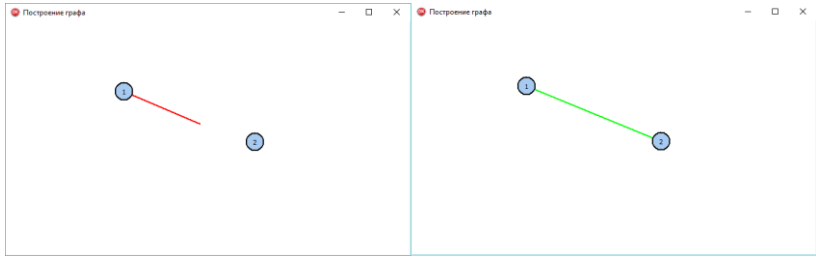


Рис. 3. Построение ребра

Для построения ребра был реализован следующий код:

```
if ssCtrl in Shift then
begin
        if not Graph.FindVertexIndex( StartPt, i ) then
                exit;
        IndexPt := i;
        StartPt := Graph.Vertex[i];
        FinishPt := StartPt;
        InvalidateRect( Handle, nil, false );
        exit;
end;
if IsStartLn then
begin
        FinishPt := Point(X,Y);
        IsFinishLn := Graph.FindVertexIndex( FinishPt, i );
        if IsFinishLn then
        begin
                IndexFinish := i;
                FinishPt := Graph.Vertex[i];
        end;
        InvalidateRect( Handle, nil, false );
end;
```

Отпустив зажатые клавиши, пользователю будет предложено ввести вес ребра, посредством диалогового окна (рис. 4).

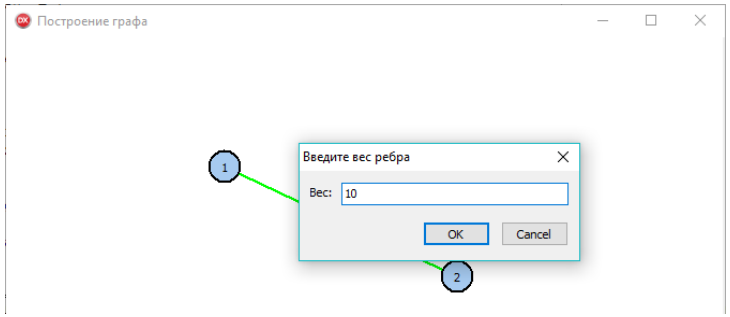


Рис. 4. Диалоговое окно выбора веса ребра

Особенностью реализованного приложения является возможность передвигать вершины в более удобную позицию, использовав технологию “Drag-Draw. Для этого пользователю надо зажать левую кнопку мыши на вершине, которую необходимо передвинуть (рис 5). При этом будет перерисована как сама вершина, так и исходящие из нее ребра.

На (рис. 5) приведен пример «перетаскивания» вершины 2.

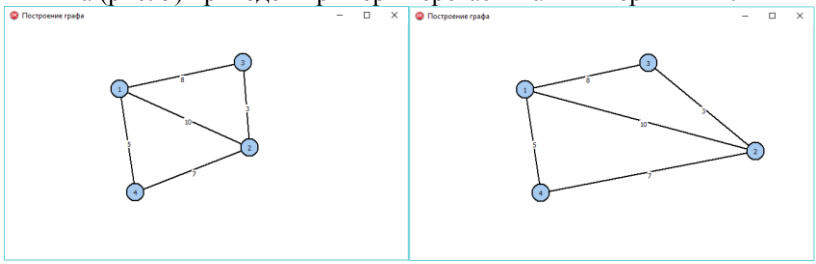


Рис. 5. Перемещение вершин

Графы имеют множество приложений: для описания алгоритмов автоматического проектирования, при установлении разного рода соответствий, при решении транспортных задач, в программировании, теории игр и т.д. Любая система, предполагающая наличие дискретных состояний или наличие узлов и переходов между ними может быть описана графом. Теория графов, на данный момент, применяется и в таких областях, как экономика, психология и биология [1]. Графы представляют собой наиболее абстрактную структуру, с которой приходится сталкиваться в теории структур данных, поэтому их алгоритмы сложны для понимания и требуют визуализации.

Библиографический список

1. Березина Л.Ю. Графы и их применение. – М.: Просвещение, 1979. – 143 с.

2. Хасанова С.Л., Зайнуллин Ф.Ф. Интерактивное приложение Визуализация алгоритмов на графах // Роспатент № 2016619842 31.08.2016.

3. Хасанова С.Л. Программная визуализация алгоритмов на графах // [Электронный журнал] NovaInfo.Ru, 2016.– Т. 3.– № 41.– С. 1-4.

Сведения об авторах

Иванов Евгений Юрьевич, студент СФ БашГУ. E-mail: viraldrill@gmail.com.

Хасанова Светлана Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ. E-mail: hasanovasl@rambler.ru.

УДК 004.942

Иващенко Д.С., Мусин А.А., Сахибгареев Э.Э.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ «ЁМКОСТЬ-СОПРОТИВЛЕНИЕ» В ЗАДАЧЕ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ИДЕНТЕФИКАЦИИ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ СКВАЖИН

В работе рассматривается применение метода на основе модели «ёмкость-сопротивление» для решения задачи анализа взаимовлияния скважин.

Ключевые слова: эффект автоГРП, источник обводнения, низкопроницаемые коллекторы, поддержание пластового давления, модель «ёмкость-сопротивление».

Ivaschenko D.S., Musin A.A., Sakhibgareev E.E.

USING CAPACITOR-RESISTANCE MODEL IN AUTOMATED INTERWELL CONNECTIVITY PROBLEM

In this work the application of method based on capacitor-resistance model for interwell connectivity analysis was reviewed.

Key words: self-induced fracturing effect, source of waterflooding, low-permeability reservoirs, maintenance of reservoir pressure, capacitor-resistance model.

© Иващенко Д.С., Мусин А.А., Сахибгареев Э.Э., 2017

Современные кустовые насосные станции позволяют развивать высокие устьевые давления при закачке жидкости в пласт.

При высоком давлении закачки и его превышении над давлением разрушения породы наблюдается самопроизвольное развитие техногенных трещин – эффект автоГРП (ГРП – гидроразрыв пласта).

Данный эффект приводит к резкому обводнению добывающих скважин. В настоящее время поиск источников обводнения выполняется вручную и в ряже случаев занимает продолжительное время (около 14 суток с учётом взятия контрольных проб и замеров).

В настоящее время для решения такого рода задач применяется метод на основе модели «ёмкость-сопротивление», построенной на аналогии потока электронов в проводнике и потока жидкости в пласте. Преимуществом является то, что она построена на материальном балансе, имеет аналитическое решение и учитывает изменение давления на забое добывающих скважин.

Выбранная нами модель не нуждается в информации о расположении скважин, параметрах пласта, направлении трещины, а необходимы лишь данные истории по добыче, закачке и давлению на забое добывающей скважины (Рис. 1).

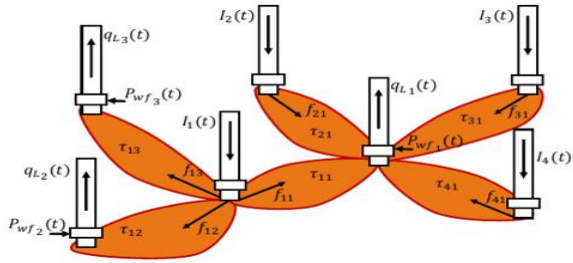


Рис. 1: Схема взаимодействия скважин в модели

Получим основное уравнение модели следующим образом:

Запишем уравнение материального баланса:

$$c_t V_p \frac{d\bar{p}}{dt} = w(t) - q(t), (1)$$

c_t – полная сжимаемость, V_p – поровый объём, $\bar{p}$ – среднее пластовое давление, $w(t)$ – изменение закачки во времени, $q(t)$ – изменение дебита во времени.

Далее, запишем уравнение продуктивности:

$$J = \frac{q}{(\bar{p} - p_{wf})}, (2)$$

J – индекс продуктивности, q – дебит жидкости, p_{wf} – давление на забое добывающей скважины.

Из уравнения (2) выражается среднее пластовое давление и подставляется в уравнение (1), получаем:

$$\tau \frac{dq}{dt} + q(t) = w(t) - \tau J \frac{dp_{wf}}{dt}, (3)$$

$\tau = \frac{c_t V_p}{J}$ – временной параметр.

Записав полученное уравнение (3) для каждой пары нагнетательная скважина (i) – добывающая скважина (j) и включив параметр взаимосвязи f_{ij} для учёта эффективности нагнетания, получим ОДУ:

$$\tau_{ij} \frac{dq_{ij}(t)}{dt} + q_{ij}(t) = f_{ij} w_i(t) - \tau_{ij} J_{ij} \frac{dp_j}{dt}, (4)$$

Аналитическое решение которого получено исходя из предположений, что приёмистость изменяется ступенчатым образом, а давление на забое меняется линейно в каждый дискретный интервал времени, имеет следующий вид:

$$q_{ij}^k = q_{ij}^{k-1} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{ij}}} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{ij}}}\right) f_{ij} w_i^k - \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{ij}}}\right) J_{ij} \tau_{ij} \frac{p_j^k - p_j^{k-1}}{\Delta t}, (5)$$

k – временной шаг.

Решение представлено в виде суперпозиции трёх факторов:

первоначальная добыча: $q_{ij}^{k-1} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{ij}}}$;

нагнетание жидкости: $\left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{ij}}}\right) f_{ij} w_i^k$;

изменение давления на забое добывающей скважины:

$$\left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{ij}}}\right) J_{ij} \tau_{ij} \frac{p_j^k - p_j^{k-1}}{\Delta t};$$

Искомыми величинами являются: параметр взаимосвязи f, определяющий объёмную долю закаченной жидкости в

нагнетательную скважину, которая фильтруется к добывающей скважине; временной параметр τ, являющейся мерой времени, необходимого, чтобы волна давления, вызванная изменением закачки, дошла по поровому пространству до добывающей скважины; индекс продуктивности J, показывающий влияние изменения давления на забое добывающей скважины на изменение дебита.

Для определения искомых параметров решается следующая задача оптимизации с ограничениями, связанными с физикой процесса:

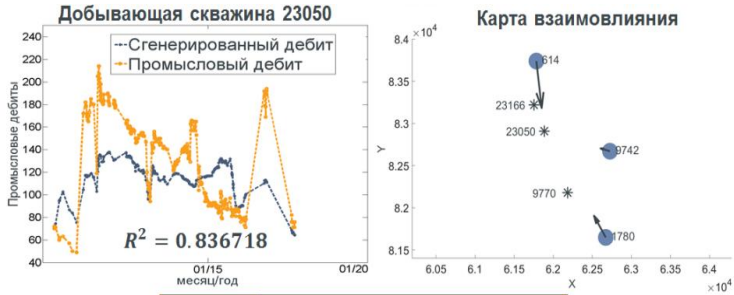
$$\min_{\mathbf{x}} z(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_{prod}} \left(\frac{q_j^k - \tilde{q}_j^k}{q_j^k} \right)^2$$

$$\begin{cases} \mathrm{a} * \mathrm{x} \leq \mathrm{b}, \\ \mathrm{aeq} * \mathrm{x} = \mathrm{beq}, \\ \mathrm{lb} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{ub}. \end{cases}$$

x – вектор параметров$[f;\ \tau;\ J]$, q_j^k – промысловые дебиты, $\tilde{q}_j^k$ – смоделированные дебиты, N_t – количество временных шагов, N_{prod} – количество добывающих скважин;

A, Aeq – матрицы; b, beq – вектора для линейных ограничений искомого вектора x; lb, ub – вектора, определяющие нижнюю и верхнюю границы искомого вектора x, соответственно.

По результатам работы модуля строятся график сгенерированных дебитов в сравнении с промысловыми, карта взаимовлияния и таблица значений искомых параметров (Рис. 2).



№ скважины	Набор параметров		
614	f	τ	γ
23050	0.16435	59.832	0.27968
23166	0	3675.2	0.064126
9770	0	2782.3	0
9742	f	τ	γ
23050	0.036512	190.29	0
23166	0.00026639	0.082657	2.1259
9770	0	2067	0
1780	f	τ	γ
23050	0	1196	0.023387
23166	0.08708	72.596	0.0053183
9770	0.029431	114.38	0.22199

Рис. 2. Результат работы модуля

Таким образом, программная реализация метода на основе модели «ёмкость-сопротивление» в задаче анализа взаимовлияния скважин позволит нам не только автоматизировать процесс поиска источника обводнения, определять изменение взаимовлияния скважин, строить карты взаимовлияния, но и использовать полученную информацию в геомеханических и гидродинамических моделях, предупреждать о возможных рисках при бурении.

Библиографический список

1. Марьин Д.Ф., Усманов Т.С., Давлетбаев А.Я., Иващенко Д.С., Автоматизированный анализ гидродинамического воздействия добывающих и нагнетательных скважин как инструмент быстрого поиска источников обводнения низкопроницаемых коллекторов с развитием трещин автоГРП // Научно-технический вестник ОАО «НК «Роснефть».– 2016.– № 3.– С. 77-82.

2. Albertoni, A., Lake, L., 2003. Inferring Interwell Connectivity Only From Well-Rate Fluctuations in Waterfloods // SPE-83381.

3. Holanda R.W. et al. Improved waterflood analysis using the capacitance-resistance model within a control systems framework // SPE 177106, 2015.

4. Sayarpour M., Zuluaga E., Kabir C.S., Lake L.W. The use of capacitance–resistance models for rapid estimation of waterflood perfor-

mance and optimization // Journal of Petroleum Science and Engineering, 2009, № 69, pp. 227–238.

5. Yousef A.A. *et al.* A capacitance model to infer interwell connectivity from production and injection rate fluctuations // SPE 95322, 2005.

Сведения об авторах

Иващенко Дмитрий Сергеевич, кандидат физико-математических наук, главный специалист отдела анализа энергетического состояния пласта, ООО «РН-УфаНИПИнефть».
Email:IvaschenkoDS@ufanipi.ru

Мусин Айрат Ахматович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной физики.
Email: mus-airat@yandex.ru

Сахибгареев Эмиль Эльвирович, студент II курса БашГУ, физико-технический институт, кафедра прикладной физики.
Email: dfdslotus@gmail.com

УДК 532.5

Игошин Д.Е., Мостовой П.Я., Белозеров Б.В., Хромова Н.А.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОРИСТЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

В работе предложен статистический подход к определению проницаемости пород коллекторов на основе ранее найденных значений для периодических структур по результатам численного решения системы уравнений Навье-Стокса. Результат получен с учетом пористости и гранулометрического состава керновых данных.

Ключевые слова: пористая среда, пористость, проницаемость, керн, гранулометрический состав, фракция, периодическая структура, статистика.

Igoshin D.Ye., Mostovoy P.Ya., Belozerov B.V., Khromova N.A.

STATISTICAL APPROACH TO THE PERMEABILITY D ETERMINATION OF POROUS MEDIA ON THE BASIS OF PERIODICAL STRUCTURES

In the paper statistical approach to the permeability determination of reservoir rocks was proposed on the basis of the previously found values for periodic structures based on the results of a numerical solution of the

Navier-Stokes system of equations. The result was obtained taking into account the porosity and the granulometric composition of core data.

Key words: porous medium, porosity, permeability, core, granulometric composition, fraction, periodic structure, statistics.

Проницаемость горных пород является сложной функцией, определяемой размером, упаковкой, формой, окатанностью зерен, слагающих ее. Основными измеряемыми величинами кроме проницаемости являются пористость и гранулометрический состав. Как правило, керновые данные представляют собой «облако» точек, характеризуемое выраженной положительной корреляцией пористость–проницаемость. На рис. 1 приведена проницаемость в зависимости от пористости для n = 138 образцов керна с месторождения Ц. Пористость образцов лежит в диапазоне (1,5÷15,1)%. В связи с этим актуально прогнозирование проницаемости породы по известным значениям пористости и гранулометрического состава. Для этой цели воспользуемся свойствами периодических пористых структур, рассмотренных в [5; 6]. Похожие периодические среды рассмотрены в [4; 9]. В таблице 1 приведены зависимость $m = m(\alpha)$, предельное значение безразмерного модельного параметра $\alpha = \alpha_*$ и пористость при $\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_*$. Для указанных типов структур приняты следующие обозначения: КП – кубическая простая структура, ГП – гексагональная простая структура, КОЦ – кубическая объёмно-центрированная структура, КГЦ - кубическая гранецентрированная структура. Из таблицы видно, что для прогнозирования проницаемости пород с месторождения Ц подходит КОЦ структура, множество значений которой перекрывает диапазон керновых данных. В работе оценки проницаемости для приведенных данных выполнены по этой структуре.

Таблица 1

Пористость кубических структур

Структура	Пористость, $m = m(\alpha)$	$m(0)$	α_*	$m(\alpha_*)$
КП	$1-\frac{\pi\left(2-3\alpha^2(3-\alpha)\right)}{12(1-\alpha)^3}$	0,4764	0,2929	0,0349
ГП	$1-\frac{\pi[1-2\alpha^2(3-\alpha)]}{3\sqrt{3}(1-\alpha)^3}$	0,3954	0,134	0,1649

КОЦ	$1-\frac{\pi\sqrt{3}\left(1-2\alpha^2(3-\alpha)\right)}{8(1-\alpha)^3}+\frac{3\pi\sqrt{3}\alpha^2(3-\alpha)}{16(1-\alpha)^3}$	0,3198	0,1835	0,0055
КГЦ	$1-\frac{\pi\left(1-3\alpha^2(3-\alpha)\right)}{3\sqrt{2}(1-\alpha)^3}$	0,2595	0,134	0,0359

На основе численного решения системы уравнений Навье–Стокса и закона Дарси в [3; 7] для этих структур определена проницаемость в зависимости от безразмерного параметра α: $k = k\,(L, \alpha)$ и пористости m: $k = k\,(L, m)$ при L=10^{-5} м – модельный параметр, сторона куба. Согласно π–теореме проницаемость можно представить в виде произведения масштабного параметра и безразмерной функции

$$k = d^2\tilde{k}. \qquad (1)$$

Приведенная проницаемость $\tilde{k}$ зависит только от типа периодической структуры и не зависит от характерного размера зерен. Для КОЦ структуры

$$d^2 = \frac{3L^2}{4(1-\alpha)^2}. \qquad (2)$$

Гранулометрический состав кернового образца представляет собой гистограмму процентного содержания зерен для N фракций. Для приведенных керновых данных N = 11. Из системы (1)-(2) выразим модельное значение проницаемости i-ой фракции по КОЦ структуре через значение k_{num}, определенное численно в [3]

$$k_{num} = \frac{3L^2\tilde{k}}{4(1-\alpha)^2},\ k_i = d_i^2\tilde{k},$$

где d_i – средний диаметр i-ой фракции, откуда прогнозируемое значение проницаемости

$$k_i = k_{num}\frac{4(1-\alpha)^2}{3L^2}d_i^2. \qquad (3)$$

Если фракции в породе расположены параллельно, то ее проницаемость максимальна и определяется взвешенным средним арифметическим

$$\bar{k} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \cdot k_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} = k_{num}\frac{4(1-\alpha)^2}{3L^2}\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \cdot d_i^2}{\sum_{i=1}^{N} w_i} = k_{num}\frac{4(1-\alpha)^2}{3L^2}\overline{d^2}, \qquad (4)$$

где w_i – доля i-ой фракции в общем объеме керна (вес фракции).

При случайном взаимном расположении фракций проницаемость определяется взвешенным средним геометрическим

$$\bar{k}_g = \exp\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_i} \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot \ln k_i\right). \quad (5)$$

При последовательном (слоистом) расположении фракций проницаемость определяется взвешенным средним гармоническим

$$\bar{k}_h = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i}{\sum_{i=1}^{N} \frac{w_i}{k_i}}. \quad (6)$$

На рис. 1 приведены взвешенные арифметическая, геометрическая и гармоническая оценки проницаемости с учетом гранулометрического состава. Видно, что оценка проницаемости, рассчитанная по (6), существенно ближе к керновым данным, чем оценки по (4) и (5), которые на 1-3 порядка выше. Это связано с тем, что в породе крупные зерна, как правило, окружены более мелкими и доля крупных пор незначительна. Фильтрация происходит преимущественно по сети каналов внутри мелких фракций.

Эффективное значение проницаемости представим в виде взвешенного среднего геометрического значения между оценками (5) и (6)

$$k_{eff} = \bar{k}_g^{\sigma} \bar{k}_h^{(1-\sigma)} \quad (7)$$

где σ – «вес» случайной укладки, $\sigma \in [0:1]$. Минимизируя целевую функцию

$$F = \sum_{j=1}^{n} \frac{max(k_{eff,j}, k_c)}{min(k_{eff,j}, k_c)}, \quad (8)$$

найдем σ. Для приведенных керновых данных $\sigma = 0$, $F_{min} \approx 1065$. Это значит, что в целом среднее гармоническое лучше всего подходит для прогнозирования проницаемости. Однако, имеется 19 образцов с проницаемостью выше 10^{-14} м^2 = 10 мД и пористостью выше 9,5% (в правой верхней части диаграммы), проницаемость которых плохо предсказывается средним гармоническим.

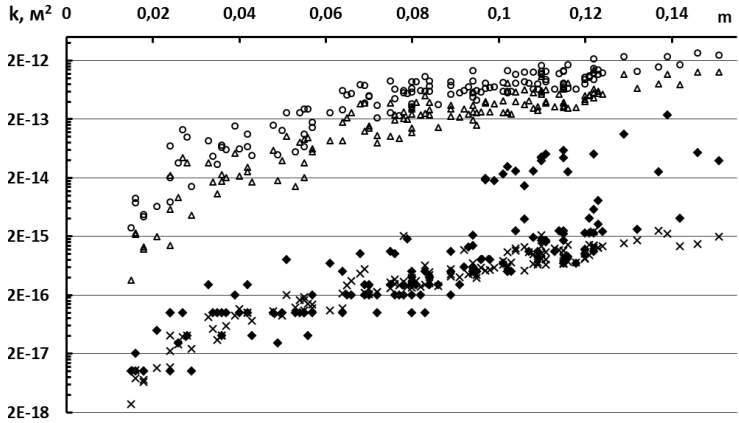


Рис. 1. Взвешенные по фракциям оценки проницаемости (○ – арифметическая, Δ – геометрическая, × – гармоническая) в сравнении с керновыми данными (♦)

Способ укладки фракции будет определять пористость, поэтому формально он от нее зависит. Представим σ в виде линейной функции от пористости

$$\sigma = Am + B, \tag{9}$$

где A и B – неотрицательные параметры, определяемые из условия минимума целевой функции (8). Для приведенных керновых данных $A = 1{,}93791$, $B = 0$, $F_{min} \approx 536$. Это приводит к тому, что $\sigma\,(m = 0) = 0$, $\sigma\,(m = 0{,}151) = 0{,}2926$. Видно, что даже при максимальном значении пористости «вес» оценки по среднему гармоническому, соответствующему последовательному (слоистому) расположению фракций, не менее 0,7.

На рис. 2 приведена оценка проницаемости, полученная по результатам оптимизационной задачи (7)-(9). Видно, что точки, соответствующие прогнозу модели, лежат в средней части облака керновых данных. В будущем интересным представляется сравнение приведенного прогноза проницаемости с оценками по обобщенному методу Козени [1] с учетом извилистости каналов [8]. Постановка задачи (7)-(9) допускает обобщение на случай трехпараметрической пористой структуры [10]. Гранулометрический состав рассмотренных образцов керна, отраженный в алгоритме [2], позволит получить еще одну оценку проницаемости по результатам прямого гидродинамического моделирования.

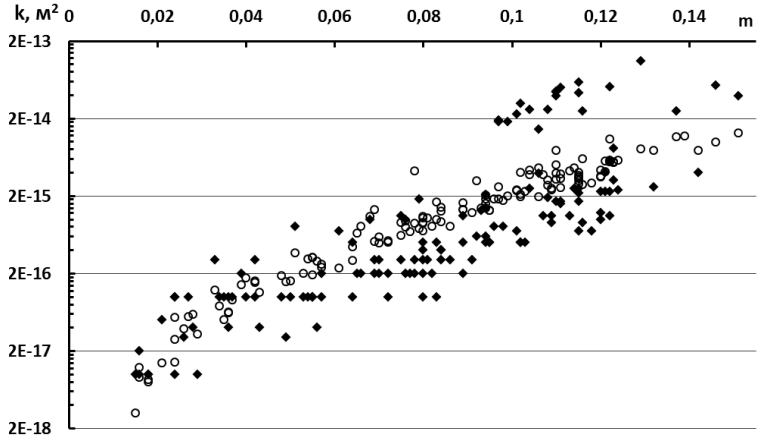


Рис. 2. Оценка проницаемости из оптимизационной задачи (○) в сравнении с керновыми данными (♦)

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-29-15119.

Библиографический список

1. Губайдуллин А.А., Игошин Д.Е., Хромова Н.А. Обобщение подхода Козени к определению проницаемости модельных пористых сред из твердых шаровых сегментов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика, 2016.– Том 2.– № 2.– С. 105–120.

2. Губкин А.С., Игошин Д.Е., Трапезников Д.В. Численный расчет проницаемости в двумерной пористой среде со скелетом из случайно расположенных пересекающихся дисков // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика, 2016. –Том 2. –№ 4.– С. 54–68.

3. Игошин Д.Е. Численное определение проницаемости в среде периодической структуры, образованной разветвляющимися каналами // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности, 2015. –№ 12.– С. 30–33.

4. Игошин Д.Е., Максимов А.Ю. Численные и аналитические оценки проницаемости пористой среды, образованной каналами, имеющими вращательную симметрию // Вестник Тюменского государственного университета. Физико–математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика, 2015.– Том 1.– № 3 (3).– С. 112–121.

5. Игошин Д.Е., Никонова О.А. Проницаемость пористой среды периодической структуры с разветвляющимися каналами // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. – Том 1.– № 2 (2). – С. 131–141.

6. Игошин Д.Е., Никонова О.А., Мостовой П.Я. Моделирование пористой среды регулярными упаковками пересекающихся сфер // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика, 2014.– № 7.– С. 34–42.

7. Игошин Д.Е., Сабуров Р.С. Численное исследование зависимости проницаемости от пористости среды, образованной каналами регулярной структуры // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика, 2015.– Т. 1.– № 1 (1).– С. 84–90.

8. Игошин Д.Е., Хромова Н.А. Гидравлическое сопротивление извилистых каналов // Вестник кибернетики.– 2016.– № 3 (23).– С. 8–17.

9. Игошин Д.Е., Хромова Н.А. Основные фильтрационные свойства пористой среды, образованной сообщающимися осесимметричными каналами // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015.– Том 1.– № 4 (4).– С. 69–79.

10. Игошин Д. Е., Хромова Н. А. Фильтрационно-емкостные свойства периодической пористой среды ромбоэдрической структуры со скелетом из шаровых сегментов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика, 2016.– Том 2.– № 3.– С. 107–127.

Сведения об авторах

Игошин Дмитрий Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН. E-mail: igoshinde@gmail.com

Мостовой Павел Ярославович, ведущий специалист отдела ГРР в Восточной Сибири, ООО «Газпромнефть НТЦ». E-mail: mostovoy.pya@gazpromneft-ntc.ru

Белозеров Борис Владимирович, начальник управления геологической экспертизы и научно-методического развития – ведущий эксперт, ООО «Газпромнефть НТЦ». E-mail: belozerov.bv@gazpromneft-ntc.ru.

Хромова Надежда Александровна, инженер-исследователь, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН. E-mail: khromova.n.a@gmail.com

УДК 544.474

Икрамов Р.Д., Мустафина С.А.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕТЕРОГЕННОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ РЕАКЦИИ ОКИСЛЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНОГО ВОДОРОДА НА ПОВЕРХНОСТИ КАТАЛИЗАТОРА

В работе рассматривается реакция окисления молекулярного водорода на поверхности никелевого или платинового катализатора. Приводится математическая модель данной реакции – модель Чумакова-Слинько. Приводится численное исследование данной модели и результаты.

Ключевые слова: модель Чумакова-Слинько, осцилляции, реакция окисления водорода, колебательные реакции.

Ikramov R.D., Mustafina S.A.

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE HETEROGENEOUS OSCILLATING REACTION OF OXIDATION OF MOLECULAR HYDROGEN ON THE SURFACE OF THE CATALYST

In the article reaction of oxidation of molecular hydrogen on the surface of the catalyst is considered. There is the mathematical model – Chumakov-Slinko model, is considered and numerical investigated.

Key words: Chumakov-Slinko model, oscillations, reaction of oxidation of molecular hydrogen, oscillating reactions.

Одним из важнейших примеров сложной нелинейной динамики в химической кинетике является существование концентрационных колебаний в химических реакциях. Колебания могут наблюдаться как в гомогенных реакциях (реакция Белоусова-Жаботинского), так и в гетерогенных, на поверхностях катализаторов. Одним из ярких примеров колебательной гетерогенной реакции является реакция окисле-

©Икрамов Р.Д., Мустафина С.А., 2017

ния молекулярного водорода на поверхности никелевого или платинового катализатора [1]:

$$H_2 + 2M \leftrightarrow 2HM,$$
$$O_2 + 2M \leftrightarrow 2OM,$$
$$2HM + OM \rightarrow 3M + 2H_2O,$$
$$H_2 + OM \rightarrow M + H_3O,$$
$$M_n + OM \leftrightarrow (M_nO) + M.$$

Первые две стадии обратимые и представляют собой адсорбцию молекул водорода и кислорода, третья основная необратимая стадия – окисление водорода по рекомбинационному механизму Лэнгмюра – Хиншельвуда, четвертая необратимая стадия – окисление водорода по ударному механизму Или-Ридила. Пятая обратимая стадия – растворение кислорода в приповерхностном слое катализатора (буферная стадия). В приповерхностном слое происходит накопление излишка адсорбированного кислорода, в противном случае, идет обмен поверхностными и приповерхностными центрами адсорбции через окисление. Реакция происходит в проточном реакторе, в нем поддерживаются постоянными концентрации молекул O_2 и H_2, происходит отвод H_2O, температура постоянна.

Механизму реакции соответствует следующая математическая модель, представленная дифференциальными уравнениями (открытая гетерогенная система):

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= k_1(1 - c_1 - c_2)^2 - k_{-1}c_1^2 - 2k_3c_1^2c_2, \\ \frac{dc_2}{dt} &= k_2(1 - c_1 - c_2)^2 - k_{-2}c_2^2 - k_3c_1^2c_2 - k_4c_2, \\ \frac{dc_3}{dt} &= k_5c_2(1 - c_3) - k_{-5}(1 - c_1 - c_2). \end{aligned} \qquad (1)$$

где $c_1 = [HM]$, $c_2 = [OM]$, $c_3 = [M_nO]$, k_i – константы скоростей стадий.

Для возникновения автоколебаний необходимо наличие обратной связи в системе. Обратная связь осуществляется через воздействие реагирующих веществ на активность и свойства катализатора и выражается в зависимости энергий активаций стадий адсорбции и реакции от концентрации водорода и кислорода на поверхности катализатора. В простейшем случае, концентрация адсорбированных веществ влияет только на скорость поверхностного взаимодействия реагирующих веществ, причем энергия активации этой стадии линей-

но зависит от степеней покрытия поверхности кислородом и водородом. В этом случае константы скоростей стадий 3 и 4 схемы экспоненциально зависят от концентраций поверхностных компонент [2]:

$$k_3 = k_{30}e^{-\mu_3 c_2},\ k_4 = k_{40}e^{-\mu_4 c_2 - \mu_5 c_3}$$

Тогда система (1) принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{dc_1}{dt} = k_1(1-c_1-c_2)^2 - k_{-1}c_1^2 - 2k_{30}e^{-\mu_3 c_2}c_1^2 c_2,\\ \frac{dc_2}{dt} = k_2(1-c_1-c_2)^2 - k_{-2}c_2^2 - k_{30}e^{-\mu_3 c_2}c_1^2 c_2 - k_{40}e^{-\mu_4 c_2-\mu_5 c_3}c_2,\\ \frac{dc_3}{dt} = \epsilon c_2(1-c_3) - \alpha c_3(1-c_1-c_2).\end{gathered} \quad (2)$$

где $\epsilon = k_5$ – малый параметр, $\alpha = {}^{k_{-5}}/_{k_5}$. Система (2) называется системой Чумакова-Слинько [3].

Результаты интегрирования системы при следующих значениях параметров (все параметры и условия считают безразмерными, так как они характеризуют скорость и степень покрытия поверхности катализатора):

$$k_1 = 1.5, k_{-1} = 0.008, k_2 = 20, k_{-2} = 0.02,$$
$$k_{30} = 100, k_4 = 20, \epsilon = 0.0024, \alpha = 7.88,$$
$$\mu_3 = 2, \mu_4 = 7, \mu_5 = -12.320463.$$

Начальные условия $c_1 = 0.1, c_2 = 0.5,\ c_3 = 0$. Шаг интегрирования $h = 10^{-3}$.

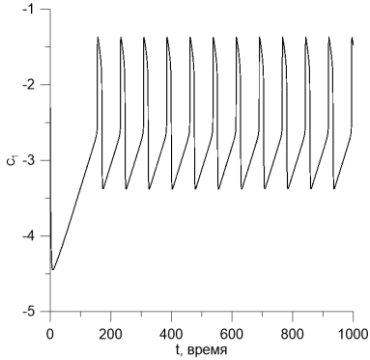


Рис. 1. Зависимость степени покрытия реагентом c_1 поверхности катализатора от времени в модели (2)

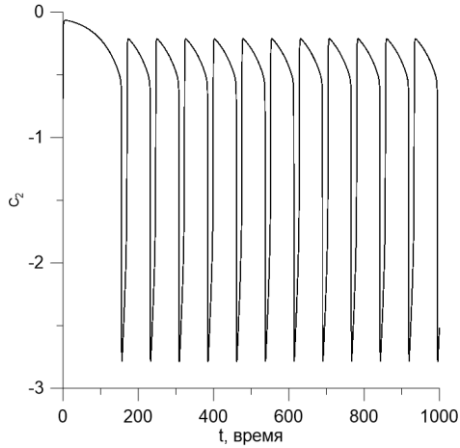


Рис. 2. Зависимость степени покрытия реагентом c_2 поверхности катализатора от времени в модели (2)

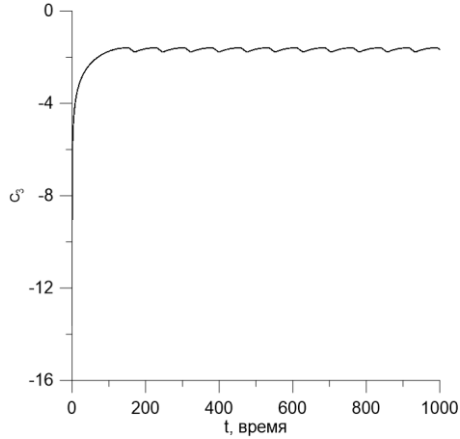


Рис. 3. Зависимость степени покрытия реагентом c_3 поверхности катализатора от времени в модели (2)

Из рис.1 – рис. 3 следует, что система является автоколебательной с периодом колебаний $T \sim 76$ сек. Рис. 1 и рис. 2 демонстрируют релаксационные колебания, рис. 3 – квазисинусоидальный тип колебаний.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-47-020068 и проекта №13.5143.2017/БЧ, выполняемого вузом в рамках государственного задания Минобрнауки РФ

The study was funded by RFBR according to the research project № 17-47-020068 and project No. 13.5143.2017/ BCH, carried out by the University in the framework of the State Task of the Ministry of Education of the Russian Federation

Библиографический список

1. Чумаков Г.А., Слинько М.Г., Беляев В.Д. Сложные изменения скорости гетерогенных каталитических реакций // ДАН СССР. 1980.– Т. 253.– № 3.– С. 653–658.

2. Слинько М.М., Слинько М.Г. Автоколебания скорости гетерогенных каталитических реакций // Успехи химии. 1980.– Т. 49.– № 4.– С. 561-587.

3. Потапов В.И. О бифуркациях в динамической системе Чумакова-Слинько // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.– 2011.– № 2.– С. 146-155.

Сведения об авторах

Икрамов Рустам Джамолович, к.ф.-м.н., старший преподаватель СФ БашГУ. E-mail: rustam_ikramov@mail.ru

Мустафина Светлана Анатольевна, доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета математики и информационных технологий СФ БашГУ. E-mail: mustafina_sa@mail.ru

УДК 330.322

Имангулова Г.С, Карамова А.И.

РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ МАРКОВИЦА

В работе были рассмотрены стандартные задачи по формированию инвестиционного портфеля методом Г. Марковица и решены две классические задачи: на максимизацию доходности портфеля при минимальном рынке и минимизацию риска при заданной доходности.

© Имангулова Г.С., Карамова А.И., 2017

Портфель Марковица позволяет снизить систематические риски за счет комбинации различных активов.

Ключевые слова: инвестиционный портфель, количественная оценка риска, колеблемость, дисперсия, анализ чувствительности, метод Марковица.

Imangulova G.S., Karamova A.I.

APPLICATION DEVELOPMENT FOR SOLVING OPTIMIZATION PROBLEM BASED ON THE MODEL OF MARKOWITZ

The standard tasks of forming the investment portfolio by the method of G. Markowitz are considered and two classical tasks are solved: to maximize the portfolio yield under the minimum market and to minimize the risk for a given profitability. The Markowitz method allows reducing systematic risks through a combination of different assets.

Key words: investment portfolio, quantitative risk assessment, variability, variance, sensitivity analysis, method of Markowitz.

Под инвестиционным портфелем понимается некая совокупность ценных бумаг, принадлежащих физическому или юридическому лицу, либо юридическим или физическим лицам, выступающая как целостный объект управления.

Главная цель формирования портфеля инвестиции это есть обеспечение реализации инвестиционной стратегии предприятия с качественным отбором более эффективных так же безопасных инвестиционных проектов и инструментов. Основными понятиями для анализа инвестиционного портфеля являются: количественная оценка риска – это есть численное определение размеров отдельных рисков и риска проекта в целом, и колеблемость – это есть степень отклонения ожидаемого значения от среднего. Для оценки колеблемости на практике чаще применяют два близко связанных критерия – дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Рассмотрим некоторые методы количественной оценки риска.

1. Вероятностная оценка. Вероятность означает возможность получения определенного результата. Можно применить к задачам инвестирования методы теории вероятности, сводящиеся к определению вероятности наступления определенных событий и выбору из нескольких возможных событий самого вероятного, соответствующего наибольшее численное значение математического ожидания.

Дисперсия σ^2 это есть среднее арифметическое из квадратов отклонений x_i от их среднего арифметического $\bar{x}$:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2, \quad (1)$$

где $\bar{x} = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n}$,

Среднее квадратичное отклонение σ выражается по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}. \quad (2)$$

2. Количественный риск инвестора определяется оценкой вероятностных значений максимального и минимального дохода. Степень риска высокая, когда большой дапазон между экстремальными значениями. Расчет дисперсии σ^2, среднего квадратичного отклонения σ и коэффициента вариации ν можно выразить следующим образом:

$$\sigma^2 = p_{\max} * (x_{\max} - \bar{x})^2 + p_{\min} * (\bar{x} - x_{\min})^2, \quad (3)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}, \quad (4)$$

$$\nu = \frac{\pm\sigma}{\bar{x}} * 100, \quad (5)$$

где $p_{\max}$ и $p_{\min}$ – соответственно вероятность получения максимального и минимального искомого значения искомого показателя проекта (прибыли, рентабельности и так прочие); $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – максимальное и минимальное значение искомого показателя эффективности проекта (прибыли, рентабельности и так далее).

В 1952 г. Г. Марковицем была опубликована работа, являющаяся основной для подхода к инвестициям с точки зрения современной теории формирования портфеля. Согласно модели Марковица, ожидаемая доходность *E(r)* портфеля ценных бумаг равна сумме ожидаемых доходностей каждого его актива r_i умноженной на долю этого актива в портфеле:

$$E(r) = \sum_{i=1}^{n} w_i * r_i, \quad (6)$$

Риск портфеля $\sigma_p{}^2$ равен:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i * \sigma_i * w_j * \sigma_j * p_{ij}}, \qquad (7)$$

Первая задача будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i * r_i \to \max, \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i * \sigma_i * w_j * \sigma_j * p_{ij}} \le \sigma_{req}, \\ w_i \ge 0, \\ \sum w_i = 1. \end{cases} \qquad (8)$$

Вторая задача будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i * \sigma_i * w_j * \sigma_j * p_{ij}} \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n} w_i * r_i \ge E(r)_{req}, \\ w_i \ge 0, \\ \sum w_i = 1. \end{cases} \qquad (9)$$

На основании этих формул инвестор должен определить эффективные портфели с помощью нахождения наилучших комбинаций ожидаемой доходности портфеля *E(r)* и его риска σ_p при заданных ожидаемых доходностях активов $E(r_i)$ и коэффициентов линейной корреляции p_{ij}.

Рассмотрим применение теории Марковица для формирования оптимального портфеля ценных бумаг, и проведем расчеты на основе его метода. Вычислительный эксперимент по данному методу производился на основе данных, представленных в таблице 1.

Индексы ценных бумаг рассчитывались по формулам:

$$I_i = \frac{a_i - a_{i-1}}{a_{i-1}} * 100\% = \frac{текущее\,значение - предыдущее\,значение}{предыдущее\,значение} * 100\%,$$

Таблица 1

Индексы ценных бумаг

	Сбербанк	Аэрофлот	ГазпромНефть	РосНефть	Мегафон	Европлан
07.12.15	103,45	57,06	149,8	252,2	919	587
14.12.15	97,6	58,15	148,05	242,55	928	571
21.12.15	98,94	56,95	150,9	250,45	859	559,5
…	…	…	…	…	…	…
21.11.16	150,93	130,94	186,85	339	540	745
28.11.16	160,1	130,36	197	341,25	549,9	729

Далее были получены значения доходности и риска по каждой ценной бумаге, рассчитанные по формулам:

$$Доходность = r_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} I_j^i}{n}, \qquad (11)$$

$$Риск = \sigma_i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} *(x_j - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} (I_j^i - r_i)^2}. \qquad (12)$$

Результаты вычислений представлены в табл. 2.

Таблица 2

Риск и ожидаемая доходность ценных бумаг

	Сбербанк	Аэрофлот	ГазпромНефть	РосНефть	Мегафон	Европлан
Риск Ц.Б.	23,01407107	29,80204546	18,20842946	39,20107296	107,7082662	56,57055989
Ожидаемая						
доходность	126,8126923	87,81807692	163,3278846	315,4596154	722,5634615	631,0365385
Ц.Б.						

Затем на основании исходных данных была построена корреляционная матрица (табл. 3). Коэффициенты корреляции вычислены соответственно по формулам:

$$p_{kl} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (I_i^k - r^k) * (I_i^l - r^l)}{n * \sigma_k * \sigma_i}, \qquad (13)$$

После того как построена корреляционная матрица составляется ковариационная матрица, используя значения корреляционной матрицы и значения рисков ценных бумаг.

$$\text{cov}_{kl} = p_{kl} * \sigma_k * \sigma_i, \qquad (14)$$

После всех проделанных вычислений приступаем к решению первой задачи по методу Марковица или системы (3.3). Составим

данную систему на основе значений полученных на предыдущих этапах. Целевая функция имеет вид:

$$f(x) = 126{,}812 * w_1 + 87.818 * w_2 + 163{,}327 * w_3 + 315{,}459 * w_4 + \\ + 722{,}563 * w_5 + 631{,}036 * w_6 \to \max, \quad (15)$$

Аналогично и для второй задачи составляем целевую функцию, только там уже будет стремиться к минимальному значению.

Теория Марковица позволяет инвесторам определить и исключить неэффективные комбинации активов. Таким образом, результаты данной модели могут быть применимы только в условиях стабильного фондового рынка, когда доходность активов действительно зависит от прошлых значений.

Библиографический список

1. Маховикова, Г.А. Рынок ценных бумаг / Г.А. Маховикова, А.С. Селищев.– М.: Юрайт, 2013. – 432 с.

2. Николаева И.П. Рынок ценных бумаг: Учебник для бакалавров. – Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К».– 2015. – 256 с.

Сведения об авторах

Имангулова Гульназ Салаватовна, студентка СФ БашГУ, E-mail: gulnaz.imangulova.96@mail.ru.

Карамова Альбина Ильгизовна, кандидат физико-математических наук, доцент СФ БашГУ, E-mail: alb_bai@rambler.ru.

УДК 517.5

Исаев К.П., Луценко А.В., Юлмухаметов Р.С.

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ НОРМИРОВАННЫХ ЭКСПОНЕНТ В СЛАБОВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ОТРЕЗКЕ

Показано, что существование базисов Рисса из нормированных экспонент в весовом пространстве не определяется ростовыми характеристиками весовой функции. Для этого построены примеры выпуклых весов сколь угодно медленного роста вблизи границы такие, что базисов Рисса из экспонент в соответствующем пространстве не существует.

© Исаев К.П., Луценко А.В., Юлмухаметов Р.С., 2017

Ключевые слова: гильбертовы пространства, целые функции, безусловные базисы из экспонент, базисы Рисса.

Isaev K.P., Lutsenko A.V., Yulmukhametov R.S.

ON RIESZ BASES OF NORMALIZED EXPONENTIALS IN WEAK WEIGHTED SPACES ON SEGMENT

We show that the existence of Riesz bases of normalized exponentials is not determined by the growth characteristics of weight function. In order to do this, we construct examples of convex weights with arbitrarily slow growth near the boundary such that Riesz bases of normalized exponentials do not exist in the corresponding space.

Key words: Hilbert spaces, entire functions, unconditional exponential bases, Riesz bases.

В данной работе мы рассматриваем гильбертовы пространства вида

$$L_2(W) = \left\{ f \in L_{loc}(-1,1):\ \|f\|^2 = \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 W^2(t)dt < \infty \right\},$$

где W – положительная непрерывная интегрируемая функция на (−1, 1). В классическом случае, когда $W(t) \equiv 1$, система Фурье $\{e^{\pi nit}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ образует ортонормированный базис. Очевидно, что в других случаях ортонормированных базисов из экспонент в пространствах $L_2(W)$ не может быть. Понятие базиса Рисса введено в [1] и обозначает образ ортонормированного базиса при ограниченном обратимом операторе. Базис $\{e_k,\ k = 1, 2, ...\}$ в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом [2], если для некоторых постоянных $c, C > 0$ и для любого элемента $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, выполняется соотношение

$$c \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \|e_k\|^2 \le \|x\|^2 \le C \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \|e_k\|^2.$$

Безусловный базис $\{e_k,\ k = 1, 2, ...\}$ становится базисом Рисса тогда и только тогда, когда $0 < \inf \|e_k\| \le \sup \|e_k\| < \infty$. Задача о базисности по Риссу данной системы экспонент $\{e^{\lambda_k t}\}$ в классическом пространстве L_2 подробно изучалась. В работе [3] получен критерий, состоящий в том, что порождающая функция данной системы должна удовлетворять условию Макенхоупта. В весовых пространствах с неограничен-

ной весовой функцией базисов Рисса из экспонент не может существовать. Этот факт доказан в работе [4].

Безусловные базисы рассматривались и в гильбертовых подпространствах пространства $H(D)$ аналитических в ограниченной выпуклой области комплексной плоскости D функций. Для пространства Смирнова $E_2(D)$ на выпуклом многоугольнике D были построены безусловные базисы из экспонент [5]. В работе [6] рассмотрен вопрос о существовании базисов из экспонент в $E_2(D)$ на выпуклой области D с гладкой границей. В [7] доказано, что в пространствах Смирнова на выпуклых областях, содержащих на границе гладкую дугу, безусловных базисов из экспонент не существует. В [8] показано, что в пространствах Бергмана $B_2(D)$ на выпуклых областях, на границе которых есть точка с ненулевой кривизной, безусловных базисов из экспонент не существует. В работе [9] доказан аналог этого результата в весовых пространствах $L_2(e^{-h(t)})$ с выпуклой функцией h: при определенных условиях регулярности роста весовой функции $h(t)$, если для любого натурального k

$$e^{h(t)}(1-|t|)^k \to \infty, |t| \to 1,$$

то в пространстве $L_2(e^{-h(t)})$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Все упомянутые выше задачи могут быть сформулированы на одной модели весовых пространств целых функций, если с помощью преобразования Фурье-Лапласа перейти к эквивалентной задаче о безусловных базисах из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций. Пусть X – некоторое гильбертово пространство функций, в котором совокупность всех экспонент $e^{\lambda z}$, $\lambda \in C$, полна. Тогда преобразование Фурье-Лапласа, которое каждому линейному непрерывному функционалу $S \in X^*$ ставит в соответствие функцию $\hat{S}(\lambda) = S\left(e^{\lambda z}\right), \lambda \in C$, взаимно однозначно отображает сопряженное пространство X^* на некоторое пространство функций $\hat{X}$. При естественных условиях на исходное пространство X пространство $\hat{X}$ оказывается гильбертовым пространством целых функций с наведенной из X^* структурой, в котором точечные функционалы $F \to F(z)$ оказываются ограниченными для всех $z \in C$. Тем самым, в силу самосопряженности гильбертовых пространств возникает воспроизводящее ядро (см. [10])

$$K(\lambda, z): \ \left(F(\lambda), K(\lambda, z)\right)_{\hat{X}} = F(z), \ \forall F \in \hat{X}.$$

Из простых функционально-аналитических соображений следует, что система экспонент $e^{\lambda_k z}, k \in Z,$ будет безусловным базисом в X тогда и только тогда, когда система $K(\lambda, \lambda_k)$, $k \in Z$, будет безусловным базисом в $\hat{X}$.

Задача о безусловных базисах из воспроизводящих ядер в весовых пространствах целых функций изучалась в работах [11]–[14], в которых рассматривались весовые пространства целых функций

$$H(\varphi) = \left\{ F \in H(C):\ \|F\|^2 = \int_C |F(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} dm(z) < \infty \right\},$$

где φ – некоторая субгармоническая функция на плоскости, $dm(z)$ – плоская мера Лебега. В работе [14] в предположении некоторой регулярности роста функции $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ доказано, что если

$$ln^2(t) = o\big(\varphi(t)\big), t \to \infty,$$

то в пространстве $H(\varphi)$ безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует, а в пространствах с весом $\varphi(t) = ln^{\alpha}(t), 1 \le \alpha \le 2,$ – существуют.

В работе [15] доказано общее условие на функцию Бергмана весового пространства целых функций, при выполнении которого безусловного базиса из воспроизводящих ядер в этом пространстве не существует.

Результаты работы [14] наводят на мысль о некоторой устойчивости существования безусловных базисов в весовых пространствах при «возмущениях» веса. Дело в том, что пространства $H(\varphi)$, когда $\varphi(\lambda) = O(\ln |\lambda|)$, $\lambda \to \infty$, становятся конечномерными и, тем самым, в них существуют безусловные базисы из воспроизводящих ядер. Мы строим примеры выпуклых функций h на интервале $(-1; 1)$ сколь угодно медленного роста на концах интервала таких, что в пространстве $L_2(h)$ безусловных базисов из экспонент не существует. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для любой непрерывной интегрируемой положительной функции W на интервале $(-1; 1)$, стремящейся к 0, при $|t| \to 1$, существует выпуклая функция h, такая что $e^{h(t)} \le \frac{1}{W(t)}$ при $|t| < 1$ и в пространстве $L_2(e^{-h(t)})$ базисов Рисса из нормированных экспонент не существует.

Библиографический список

1. Бари Н.К. О базисах в гильбертовом пространстве // Доклады Академии наук. – 1946. – Т. 54. – С. 383–386.

2. Hruscev S.V., Nikolskii N.K., Pavlov B.S. Unconditional Bases of exponentials and of reproducing kernels // Complex Analysis and Spectral Theory. Lecture Notes in Mathematics. – 1981. – V. 864. – P. 214–335.

3. Павлов Б.С. Базисность системы экспонент и условие Макенхоупта // ДАН СССР. – 1979. – Т. 247.– № 1. – С. 37–40.

4. Путинцева А.А. Базисы Рисса в весовых пространствах// Уфимский математический журнал. – 2011. – Т. 3.– № 1. – С. 47–52.

5. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1975. – Т. 39.– № 3. – С. 657–702.

6. Любарский Ю.И. Ряды экспонент в пространствах Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1988. – Т. 52.– № 3. – С. 559–580.

7. Луценко В.И. Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова // Дис. канд. физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН.– Уфа, 1992.

8. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана // Изв. РАН. Сер. матем. – 2004. – Т. 68.– № 1. – С. 5–42.

9. Башмаков Р.А., Махота А.А., Трунов К.В. Об условиях отсутствия безусловных базисов из экспонент// Уфимский математический журнал. – 2015. – Т. 7.– № 2. – С. 19–34.

10. Aronszajn N. Theory of reproducing kernels // Transactions of the American Mathematical Society. – 1950. – V. 68, № 3. – P. 337–404.

11. Seip K. Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space I // Reine Angew. Math. –1992. – V. 429. P. 91–106.

12. Seip K., Wallsten R. Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space II // Reine Angew. Math. – 1992. – V. 429. – P. 107–113.

13. Borichev A., Dhuez R., Kellay K. Sampling and interpolation in large Bergman and Fock spaces // Journal of Functional Analysis. – 2007. – V. 242.– № 2. P. 563–606.

14. Borichev A., Lyubarskii Yu. Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. – 2010. – № 9. P. 449–461.

15. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. Безусловные базисы из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций // Уфимский математический журнал. – 2013. – Т. 5.– № 3.– С. 67–77.

Сведения об авторах

Исаев Константин Петрович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИМ с ВЦ УНЦ РАН.
E-mail: orbit81@list.ru

Луценко Анастасия Владимировна, аспирант ФМиИТ БашГУ.
E-mail: lutsenko.av@ya.ru

Юлмухаметов Ринад Салаватович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник ИМ с ВЦ УНЦ РАН. E-mail: yulmukhametov@mail.ru

УДК 544.431.2, 51-73

Исмагилова А.С., Пыжьянова Л.Р., Спивак С.И.

РАЗРАБОТКА ИНСТРУМЕНТОВ И МЕТОДОВ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В настоящей работе описан процесс проектирования системы автоматизации анализа информативности кинетических измерений при решении обратных задач химической кинетики.

Ключевые слова: обратная задача, информативность, параметры модели, базис нелинейных параметрических функций.

Ismagilova A.S., Pyzhyanova L.R., Spivak S.I.

DEVELOPMENT OF TOOLS AND METHODS FOR DESIGNING SOFTWARE IN PROBLEMS OF MATHEMATICAL MODELING OF CHEMICAL PROCESSES

In this paper we describe the design process of system automation the analysis of information the kinetic measurements in the solution of inverse problems of chemical kinetics.

Keywords: inverse problem, informativeness, model parameters, basis of nonlinear parametric functions.

© Исмагилова А.С., Пыжьянова Л.Р., Спивак С.И., 2017

Разработка инструментов и методов для проектирования программного обеспечения позволяет осуществлять комплексное математическое моделирование многостадийных химических процессов, начиная от этапа подготовки данных, оценки значимости экспериментальных данных, решения обратных задач, идентификации механизмов реакций, и до оценки качества полученных математических моделей.

Математическое моделирование химических процессов позволяет повышать эффективность химических производств. При использовании методов математического моделирования в химии и нефтехимии возникают трудные задачи, связанные с решением обратных задач кинетики. Решение обратных задач построения кинетических моделей играет решающую роль как в задачах идентификации схем сложных химических реакций, так и в задачах расчета оптимальных режимов протекания каталитических процессов. Основная проблема – анализ информативности кинетических измерений с точки зрения надежности решения обратных задач химической кинетики и оценки значимости имеющихся экспериментальных данных [1].

Важным моментом в обратной задаче является представление кинетической модели в виде, содержащем независимые комбинации параметров. Если число таких комбинаций меньше общего числа параметров, то в технологических целях удобно иметь дело с моделями, содержащими меньшее число параметров. Основная трудность – измерению доступна только часть участвующих в реакции веществ. Следствием является неединственность решения обратной задачи.

Под информативностью будем понимать базис нелинейных параметрических функций (НПФ) кинетических констант, допускающих однозначное оценивание при заданной структуре кинетического эксперимента.

Применение общей теории анализа информативности, основанной на исследовании матриц Якоби, затруднено большой размерностью исследуемых систем по константам. Определение базиса НПФ в аналитическом виде для реальных схем большой размерности – задача трудоемкая. Речь идет об аналитических вычислениях с нелинейными выражениями. Таким образом, проектирование программного обеспечения [2] становится самостоятельной проблемой при анализе информативности.

Опишем реализацию алгоритма определения базиса НПФ кинетических констант в среде MathWorks MATLAB на языке программирования Matlab.

Интерфейс программы представляет собой окно с полями и таблицами для ввода и вывода, с кнопками для выполнения расчетов и сохранения результатов. Входными данными, вводимыми пользователем, являются вводимый механизм реакций, химические формулы участников реакции.

После ввода механизма реакции происходит распределение веществ и знаков в таблице на форме, и распознавание X_i ($1 \le i \le n_1$) – измеряемых (исходных веществ и продуктов реакции), Y_j ($1 \le j \le n_2$) – промежуточных веществ. На основании этих данных формируются два массива с обозначениями участников химической реакции. Вместе с этим, происходит запоминание позиции и вид знака обратимости стадии реакции.

Далее формируется вектор W скоростей s элементарных стадий, которые выписываются в соответствии с законом действующих масс. Каждой элементарной стадии соответствует параметр k_l ($1 \le l \le s$). Параметры записываются в массив.

Для построения матрицы Γ программа определяет стехиометрические коэффициенты участников (сначала измеряемых, затем промежуточных веществ) в элементарных стадиях. Количество строк матрицы Γ стехиометрических коэффициентов равно числу элементарных стадий, количество столбцов – числу участников химической реакции. Если вещество расходуется в стадии, то его стехиометрический коэффициент записывается со знаком «-», если образуется – со знаком «+».

Построение кинетической модели организовано по формуле $c=\Gamma^T W$. Вектор-столбец с состоит из подвекторов F_1 и F_2, несущие информацию о скорости изменения концентраций измеряемых и промежуточных веществ соответственно.

Поскольку эксперимент неизбежно сопряжен с погрешностью, то формируется вектор ε, количество компонентов которого равно числу исходных веществ и продуктов реакции. Параметр ε входит в вектор определяемых параметров $k'=(k_1,\ldots,k_s,\varepsilon)^T$.

Затем формируются матрицы $(\partial F_1/\partial k')$, $(\partial F_1/\partial y)$, $(\partial F_2/\partial k')$, $(\partial F_2/\partial y)$ – дифференцирование выражений систем F_1 и F_2 по k', далее F_1 и F_2 по y.

Далее организован аналитический счет матрицы

$$U = \left(\frac{\partial F_1}{\partial k'}\right) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F_2}{\partial k'}\right)$$

и приведение ее к треугольному виду при помощи метода Гаусса.

Число НПФ определяется как число независимых столбцов в матрице U. Это число будет меньше общего числа определяемых параметров, если существует ненулевая матрица A, зависящая только от k и ε такая, что UA(k,ε)=0.

Столбцам якобиана соответствуют кинетические параметры схемы сложной химической реакции – k_1, k_{10},…, k_s, k_{s0}, ε_1,…, ε_{n1}. Система векторов-столбцов линейно зависима, если существуют параметры из множества $\{0,k_1, k_{10},\ldots, k_s, k_{s0}, (1+\varepsilon_1),\ldots, (1+\varepsilon_{n1})\}$, не все равные нулю, такие, что линейная их комбинация равна нулевому вектору-столбцу. Система векторов-столбцов линейно независима, если для любых параметров (из $\{0,k_1, k_{10},\ldots, k_s, k_{s0}, (1+\varepsilon_1),\ldots, (1+\varepsilon_{n1})\}$) из равной нулевому вектору-столбцу их линейной комбинации, следует, что все параметры равны 0. Согласно этому организован перебор, позволяющий проанализировать такие линейные комбинации.

Формируется массив $\{0,\pm k_l,\pm(1+\varepsilon_i)\}$ вариантов значений элементов отвечающих за массив определяемых параметров для столбцов матрицы A. Таким образом, число возможных комбинаций равно 3^N, где $N=s+n_1$ – количество столбцов матрицы U. Для перебора всевозможных комбинаций поместим варианты значений в одномерный массив, подставляя который в умножение матрицы U, будем ожидать формирования нулевого вектора-столбца. Чтобы перебрать все возможные варианты одномерного массива, будем вызывать элементы по индексу в тройке вариантов. Для первой комбинации получим индексы равные нулю, что даст тривиальное решение. Для второй комбинации мы получим последовательность индексов с единицей в конце, что даст ненулевую комбинацию. Проверив эту комбинацию на матрице U перейдем к следующей комбинации и т.д. Индексы всегда будут формировать число в троичной системе счисления длины N. Переводя номер комбинации в троичную систему счисления, получим путь перебора всех возможных комбинаций из троек значений. Так будет построена матрица A, для которой выполнено условие UA=0.

Тогда базис НПФ определятся как система независимых частных решений системы дифференциальных уравнений первого порядка $(\partial\rho/\partial k')A=0$, где $\rho(k,\varepsilon)$ – система НПФ.

Результатом работы программы является нахождение базиса НПФ кинетических констант.

Теоретически программа способна корректно работать с массивами, состоящими из нескольких десятков кинетических параметров, образующих математическую модель сложной химической реакции. Однако надо отметить, что увеличение количества параметров может потребовать чрезмерных затрат компьютерных и временных ресурсов. В этом случае становится актуальным применение метода декомпозиции [3] для схем сложных химических реакций на ряд более простых составляющих, каждая из которых имеет самостоятельное физико-химическое содержание.

Библиографический список

1. Горский В.Г., Спивак С.И. Степень полноты экспериментальной информации при восстановлении кинетических или равновесных констант сложных химических реакций. В кн.: Математические методы химической термодинамики. – Новосибирск: Наука, 1982.– С. 139-158.

2. Спивак С.И., Исмагилова А.С., Пыжьянова Л.Р. Автоматизация анализа информативности кинетических параметров // Химия высоких энергий, 2016. – Т. 50.– № 1. – С.8-12.

3. Исмагилова А.С., Пыжьянова Л.Р., Спивак С.И. Автоматизация метода декомпозиции для анализа информативности кинетических измерений при решении обратных задач // Вестник Башкирского университета, 2016. – Т. 21.– № 1. – С.9-13.

Сведения об авторах

Исмагилова Альбина Сабирьяновна, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического моделирования БашГУ. E-mail: IsmagilovaAS@rambler.ru

Пыжьянова Ляйсан Разифовна, ассистент кафедры общегуманитарных дисциплин УГАТУ. E-mail: leisanmr@mail.ru

Спивак Семён Израилевич, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математического моделирования БашГУ. E-mail: semen.spivak@mail.ru

УДК 517.927.25

Ишкин Х.К.

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ АМБАРЦУМЯНА ДЛЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Для несамосопряженного ангармонического осциллятора показано, что если возмущение V не порождает дополнительных серий собственных чисел, локализованных около лучей, отличных от основного, то V=0.

Ключевые слова: несамосопряженный ангармонический осциллятор, теорема Амбарцумяна, локализация спектра.

Ishkin Kh.K.

THE ANALOGUE OF AMBARZUMIAN THEOREM FOR NON-SELFADJOINT ANHARMONIC OSCILLATOR

For non-selfadjoint anharmonic oscillator it is shown that if the perturbation V does not generate additional series of eigenvalues that are localized around the rays than the primary, then V=0.

Key words: non-selfadjoint anharmonic oscillator, Ambarzumian theorem, localization of the spectrum.

Теорема Амбарцумяна [1] утверждает, что если собственные значения краевой задачи

$$-y'' + qy = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0,$$

где потенциал q вещественен и суммируем, имеют вид $\lambda_n = n^2$, $n = 0,1,\ldots$, то $q(x) = 0$ п.в. на $(0,\pi)$. Впоследствии выяснилось [2, 5, 6], что этот случай является исключительным и одного спектра, вообще говоря, недостаточно для однозначного определения потенциала. Однако в несамосопряженном случае теоремы типа Амбарцумяна скорее закономерный, нежели случайный факт, что обусловлено спектральной неустойчивостью операторов, не близких к нормальным. А именно, асимптотика спектра таких операторов может сохраняться при весьма жестких ограничениях на возмущение, поэтому требование совпадения спектров возмущенного и невозмущенного операторов (или даже только их асимптотик) может повлечь тривиальность возмущения. Так, в работе [4] для оператора

© Ишкин Х.К., 2017

$H(\alpha,\theta)$, порожденного в $L^2(0,\infty)$, дифференциальным выражением $-y''+e^{i\theta}x^{\alpha}y$, $(0<|\theta|<\pi,\ \alpha>0)$ и краевым условием $y(0)=0$, были доказаны следующие утверждения:

1) *Пусть V – оператор умножения на финитную, квадратично суммируемую на своем носителе $[0;b]$ функцию $V(\cdot)$, которая в некоторой полуокрестности точки b допускает представление $V(x)=(b-x)^m W(x)$, где $m>0, W(b-0)$ существует, конечен и не равен 0. Тогда спектр оператора $T=H(\alpha,\theta)+V$ распадается на 2 серии $\{\mu_k^{(1)}\}_1^{\infty}$ и $\{\mu_k^{(2)}\}_1^{\infty}$, имеющие асимптотики*

$$\mu_k^{(1)}\sim\lambda_k,\quad \mu_k^{(2)}\sim\left(\frac{\pi k}{b}\right)^2\quad (k\to 0),$$

где $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$ – собственные числа оператора $H(\alpha,\theta)$, которые лежат на луче $\arg z=2\theta/(2+\alpha)$ и имеют асимптотику

$$\lambda_k\sim Ce^{2i\theta/(2+\alpha)}k^{2\alpha/(2+\alpha)},\ (k\to\infty);$$

2) *Если $\sup V\subset[0,b]$ и $V\in L^1[0,b]$ и спектр оператора T состоит только из одной серии, имеющей асимптотику $\mu_k\sim\lambda_k+0(\lambda_k^{1-1/\alpha}),\ (k\to\infty)$, то $V=0$ п.в. и, следовательно, $\mu_k=\lambda_k$.*

Цель настоящей заметки – обобщение утверждений 1) и 2) на некоторый класс нефинитных возмущений.

Определение 1. *Будем говорить, что спектр T_0* ***локализован около луча*** *$\arg\lambda=\alpha_0$ тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon>0\ N(T_0,r)\sim N(T_0,\alpha_0-\varepsilon,\alpha_0+\varepsilon,r),\quad r\to+\infty$, где $N(T,\eta,\varsigma,r)$ и $N(T,r)$ – число собственных значений оператора T соответственно в секторе $\{\eta<\arg\lambda<\varsigma,\ \ |\lambda|<r\}$ и круге $|\lambda|<r\}$.*

Введем обозначения. Пусть Γ – кривая с параметризацией $z=x+i\gamma(x),\quad x\in[0,1]$, где функция γ непрерывно дифференцируема, выпукла вверх и $0\ge\gamma'(0)>\gamma'(1)\ge -tg\dfrac{\theta}{2+\alpha}$. Если $0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$, то $z_k=z(x_k)$, Γ_k – дуга кривой Γ_k с

концами z_{k-1} и z_k, Ω_k – область, ограниченная дугой Γ_k и отрезком $[z_{k-1}, z_k]$. Далее пусть V – оператор умножения на функцию

$$V(x) = \int_{\Gamma} \frac{v(t)dt}{t-x},$$

где $v \in L^p(\Gamma)$ при некотором $p > 1$. При сделанных предположениях (см., например, 3, §6) функция V голоморфна вне Γ, почти в каждой точке $\varsigma \in \Gamma$ имеет угловые граничные значения $V_+(\varsigma)$ и $V_-(\varsigma)$ (слева и справа соответственно) и $V_{\pm} \in L^p(\Gamma)$.

Пусть $T = H(\alpha, \theta) + V$, где $V-$ оператор умножения на функцию $V(\cdot)$.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) За исключением конечного числа весь спектр оператора T лежит в угле $U_\theta = \{-arctg(\gamma'(0) \le \arg \lambda \le 2\theta/(2+\alpha)\}$ *и локализуется в смысле определения 1 около луча* $\arg \lambda = 2\theta/(2+\alpha)$;

2) Если V удовлетворяет дополнительному условию: существует разбиение $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$, *такое, что функция* v_k *– сужение* v *на* Γ_k *–*

(v1) непрерывна на Γ_k *и* $v_k(z_k) \ne v_{k+1}(z_k) \quad (k = \overline{1, n-1})$;

(v2) допускает аналитическое продолжение в область $\overline{\Omega}_k$, *непрерывное на* $\overline{\Omega}_k$, *то спектр оператора T разбивается на* $n+1$ *серию* $\left\{\mu_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad (k = \overline{0, n})$, *которые имеют асимптотики* $\mu_n^{(0)} \sim \lambda_n$, $\mu_n^{(k)} \sim \left(\frac{\pi n}{z_k - z_{k-1}}\right), \quad n \to \infty,$ *где* $\{\lambda_n\}$ *- собственные числа оператора* $H(\alpha, \theta)$;

3) Если v *– произвольная функция из* $L^p(\Gamma)$ *и спектр оператора T состоит только из одной серии, имеющей асимптотику*

$$\mu_k \sim \lambda_k + o\left(\lambda_k^{1-\frac{1}{\alpha}}\right), (k \to \infty),$$

то $v = 0$ *п.в. на* Γ *и, следовательно,* $\mu_k = \lambda_k$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-01095) и Министерства образования и науки РФ (грант № 01201456408).

Библиографический список

1. Ambarzumiyan V.A. Überline Frage der Eigenwerttheorie // Zs. f. Phys. – 1929. – Vol. 53. – P.690-695.

2. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm-Liovillschen Eigenwertaufgabe // Acta Math. – 1946. – Vol. 78. – P. 1-96.

3. Дынькин Е.М. Методы теории сингулярных интегралов (преобразование Гильберта и теория Кальдерона-Зигмунда). Коммутативный гармонический анализ – 1. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. – 1987. – Vol. 15. – P. 197-292.

4. Ишкин Х.К. О спектральной неустойчивости оператора Штурма-Лиувилля с комплексным потенциалом // Диффер. уравнения. – 2009. – Vol. 45. – № 4. – С. 480-495.

5. Левитан Б.М., Гасымов М.Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам // УМН. – 1964. – Т. 19.– № 2(116). – С. 3-63.

6. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977.

Сведения об авторах

Ишкин Хабир Кабирович, профессор БашГУ. E-mail: Ishkin62@mail.ru.

УДК 517.927.25

Ишкин Х.К., Ишназарова В.Т.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМ БЫСТРОРАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Для оператора Штурма-Лиувилля на полуоси с комплекснозначным экпоненциально растущим потенциалом найдена асимптотика спектра.

Ключевые слова: несамосопряженный оператор Штурма-Лиувилля, локализация спектра.

© Ишкин Х.К., Ишназарова В.Т., 2017

Ishkin Kh.K., Ishnazarova V.T.

EIGENVALUE ASYMPTOTICS FOR THE STURM–LIOUVILLE OPERATOR WITH A COMPLEX-VALUED RAPIDLY INCREASING POTENTIAL

We have obtained the eigenvalue asymptotics for the Sturm-Liouville operator on the half-line with complex-valued exponentially growing potential.

Key words: non-selfadjoint Sturm-Lioville, localization of the spectrum.

Пусть L – оператор, порожденный в $L^2(0,\infty)$ дифференциальным выражением $ly = -y'' + qy$ и краевым условием $y(0) = 0,$ где $q(x) = p(x) + ir(x), p(x)$ и $r(x)$ – вещественные функции, суммируемые на каждом $(0, b), b > 0.$

Пусть $p(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty.$ Тогда [1] спектр оператора L дискретен. Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственные значения L, пронумерованные в порядке неубывания модулей с учетом их алгебраических кратностей.

Пусть L_0 – оператор, который получается из L при $q = p$, R оператор умножения на функцию r. Тогда $L = L_0 + iR$.

Если $r(x) = o(p(x)$, $x \to +\infty$, то оператор R бесконечно мал относительно оператора L_0 в смысле форм [2, § X.2]:

для любого положительного ε существует положительное число M_ε, такое, что

$$| Rf, f | < \varepsilon(L_0 f, f) + M_\varepsilon || f ||^2, \forall f \in Q(L_0), \qquad (1)$$

где $Q(L_0)$ – область определения квадратичной формы, ассоциированной с оператором L_0. Отсюда, согласно теореме Келдыша [3], спектр оператора L локализуется около положительной вещественной полупрямой в следующем смысле: если $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – собственные числа L, пронумерованные в порядке неубывания модулей, то

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K(\varepsilon) \in \mathrm{N} : | \arg \mu_k | \le \varepsilon \forall k \ge K(\varepsilon).$$

Если $\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{r(x)}{p(x)} > 0,$ то оценка (1), вообще говоря, неверна, следовательно, оператор L нельзя рассматривать как малое возмущение (самосопряженного) оператора L_0. В такой ситуации теорема Келдыша не работает, поэтому без дополнительных условий на функции p и r ничего определенного об асимптотике спектра оператора L сказать нельзя. Используя метод комплексного скэйлинга [4, гл. XII, §10], легко показать [5], что спектр оператора L локализуется около луча $\arg\lambda = \beta$, если функция q допускает аналитическое продолжение в угол $U_\beta = \{-\beta/2 < \arg z < 0\}$ так, что

А) при каждом $R > 0$ q принадлежит пространству Смирнова [6, гл. III, §7] $E_1(U_\beta(R))$, где $U_\beta(R) = U_\beta \bigcap \{|z| < R\}$;

Б) функция $q(\zeta)-$ угловое граничное значение [6, гл. I, §5] q на луче $\{\arg z = -\beta/2\}-$ удовлетворяет условиям: $|q(xe^{-i\beta/2})| \to +\infty, \arg(q(xe^{-i\beta/2})) \to \beta, x \to +\infty$;

В) $q(xe^{is}) = 0(q(xe^{-i\beta/2})), x \to +\infty,$ равномерно по $-\beta/2 \le s \le 0.$

Этим условиям удовлетворяют, например, функции вида

$$q(x) = a_0 x^\alpha, \tag{2}$$

где $\alpha > 0, |\arg a_0| < \pi$. В работе [7] доказано, что спектр оператора L с потенциалом (2) имеет асимптотику

$$\lambda_k(\alpha) \sim c_0 e^{2i\theta/(2+\alpha)} k^{2\alpha/(2+\alpha)}, k \to +\infty,$$

где $\theta = \arg a_0, c > 0$. Из этой формулы видно, что собственные значения L локализуются около одного луча $\arg\lambda = \frac{2\theta}{2+\alpha}$, и этот луч при больших α приближается к лучу $l_0 = \{\arg\lambda = 0\}$. Этот пример показывает, что спектр оператора L может сильно «прижиматься» к лучу l_0 даже в случае, когда вещественная и мнимая части потенциала имеют одинаковый рост. С другой стороны, при каждом фиксированном α собственные числа $\lambda_k(\alpha)$ с ростом k удаляются от l_0 причем расстояние сравнимо с $|\lambda_k|$. В связи с этим возникает вопрос:

каков порядок этого расстояния, если в (2) вместо x^{α} взять функцию с большей скоростью роста (например, e^{x}, $e^{e^{x}}$ и т.д.)?

Статья посвящена этому вопросу. Оказалось, что если

$$q(x) = a_0 e^{x}, \tag{3}$$

где $a_0 = pe^{i\theta}$, $p > 0$, $0 < \theta < \pi$, то $\arg \lambda_k \sim \dfrac{\theta}{\ln k}$, $k \to \infty$, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Собственные числа оператора L с потенциалом (3) имеют асимптотику*

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{2 \ln \pi k} \right) \left[1 + 2 \frac{\ln \ln k}{\ln k} + \frac{b + i\theta}{\ln k} + 0\left(\frac{\ln \ln k}{\ln^2 k} \right) \right], k \to \infty,$$

где $b = 2 + \ln \rho$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-01095) и Министерства образования и науки РФ (грант № 01201456408).

Библиографический список

1. Лидский В.Б. Несамосопряженный оператор типа Штурма-Лиувилля с дискретным спектром // Тр. ММО. – 1960. – Т. 9. – С. 45-79.

2. Рид М., Саймон. Б. Методы современной математической физики. – Т.2. – М.: Мир, 1978.

3. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // ДАН СССР. – 1951. – Т. 77.– № 1. – С. 11-14.

4. Рид М., Саймон. Б. Методы современной математической физики. – Т. 4. – М.: Мир. 1982.

5. Ишкин Х.К. О спектральной неустойчивости оператора Штурма-Лиувилля с комплексным потенциалом // Диффер. Уравнения. – 2009. – Т. 45.– № 4. – С. 480-495; англ. версия: Kh.K. Ishkin. On the Spectral Instability of the Sturm-Liouville Operator with a Complex Potential, Dierential Equations. – 2009. – Vol. 45.– № 4. – P. 480-495.

6. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М. – Л.: ГИТТЛ. 1950.

7. Лидский В.Б. Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром // Тр. ММО. – 1959. – Т. 8. – С. 83-120.

Сведения об авторах

Ишкин Хабир Кабирович, профессор БашГУ.
E-mail:Ishkin62@mail.ru.

Ишназарова Валерия Тимуровна, магистрант ФМиИТ БашГУ. E-mail: Valeria_rush@mail.ru.

УДК 517.927.25

Ишкин Х.К., Семенихина М.

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Для оператора Штурма-Лиувилля на кривой с потенциалом, имеющим регулярную особенность внутри отрезка, соединяющего концы этой кривой, получена асимптотика собственных чисел

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля на кривой, асимптотика спектра, регулярная особая точка.

Ishkin Kh.K., Semenikhina M.

ON THE SPECTRAL ASYMPTOTICS OF THE OPERATOR STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH REGULAR REGULAR SINGULAR POINT

We have obtaine the spectral asymptotics for the Sturm-Liouville operator on a curve with a potential having a regular singular point out of this curve.

Key words: Sturm-Liouville operator on a curve, spectral asymtotics, regular singular point.

Пусть γ – некоторая кривая на комплексной плоскости с параметризацией

$$z = x + i\gamma(x),\ x \in [0,1],$$

где функция $\gamma(x)$ – кусочно-гладкая на $[0,1]$ (то есть существует разбиение $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$ такое, что γ непрерывно дифференцируема на $[x_{i-1}, x_i]$) и $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$. Пусть функция y абсолютно непрерывна на кривой γ (относительно меры $|dz|$). Функцию

© Ишкин Х.К., Семенихина М., 2017

$$y'_\gamma(z)=\lim_{\gamma\ni\zeta}\frac{y(\zeta)-y(z)}{\zeta-z},$$

определенную почти всюду на γ будем называть *производной вдоль* γ. Аналогично определяем $y''_\gamma(z)$ и т.д. (в предположении, что эти объекты существуют). Всюду далее, если не возникает путаницы, значок γ в $y_\gamma^{(n)}$ будем опускать.

Обозначим через T_γ оператор с областью определения

$$D(T_\gamma)=\left\{y\in L^2(\gamma):-\partial_\gamma y\in AC(\gamma),-\partial_\gamma^2\in L^2(\gamma),\ y(0)=y(1)=0\right\}$$

и действующий по правилу $T_\gamma=-\partial_\gamma^2$. Здесь $AC(\gamma)$ и $L^p(\gamma)-$ множества функций, абсолютно непрерывных (соответственно суммируемых с р-й степенью (по мере $|1+i\gamma'|dx$)) на γ функций [1]. Оператор $L_\gamma=T_\gamma+V,$ где $V-$оператор умножения на функцию $V(z)$ из $L^1(\gamma)$, в дальнейшем будем называть оператором Штурма-Лиувилля на кривой γ. Спектр невозмущенного оператора T_γ, как и в классическом случае $\gamma=[0,1]$ состоит из простых собственных чисел $\lambda_n=(\pi n)^2, n=1,2,\ldots.$

Оператор T_γ спектрально неустойчив: существуют сколь угодно малые и бесконечно дифференцируемые функции $V(z),$ что собственные числа возмущенного оператора $M_\gamma=T_\gamma+V$ с большими номерами могут локализоваться около конечного или счетного числа лучей (см. например, $[2,3]$). Однако даже для таких неустойчивых операторов существует класс возмущений, сохраняющих асимптотику спектра. Таким образом, обладают, например, функции V, допускающие аналитическое продолжение в область Ω, ограниченную кривой γ и отрезком $[0,1]$, непрерывные вдоль до границы Ω. Действительно, в этом случае решение $\varphi(z,\lambda)$ уравнения $M_\gamma\varphi=\lambda\varphi$, удовлетворяющие условиям $\varphi(0,\lambda)=0,\partial_\gamma\varphi(0,\lambda)=1$, аналитично в $\Omega,$ а непрерывно в $\overline{\Omega}$. Следовательно, собственные числа операто-

ра M_γ, совпадающие с корнями функции $\varphi(1,\lambda)$, не меняются при деформации кривой γ в отрезок $[0,1]$, то есть совпадают со спектром классического оператора Штурма-Лиувилля $M_{[0,1]}$ с непрерывным потенциалом $q = V|_{[0,1]}$, а потому имеют асимптотику

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2, n \to \infty \qquad (1)$$

Если функция q достаточно гладкая, то формулу (1) можно уточнить (см. например, [4]). В частности, если q непрерывно дифференцируема, то

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 q(x)dx + 0(n^{-2}), n \to \infty. \qquad (2)$$

В связи со сказанным возникает вопрос: *какой вид будет иметь формула* (1), *если отказаться от условия непрерывности функции* q, *какой вклад внесут в формулу* (2) *изолированные особенности* q ?

В статье изучается случай, когда функция q имеет вид регулярную особенность в интервале $(0,1)$:

$$q(z) = \frac{k(k-1)}{(z-\theta)^2}, k \in \mathbb{C}, \theta \in (0,1).$$

Оказалось, что в случае целых k поправка от указанной особенности имеет порядок n^{-1}. Если $k \notin \mathbb{Z}$, то асимптотика определяется константой θ: если $\theta \in \mathbb{Q}$, то спектр можно разбить на конечное число серий с известной асимптотикой, если же $\theta \notin \mathbb{Q}$, то можно лишь указать полуполосу, вне которой спектр конечен, при этом асимптотики нет.

Так как $k(k-1) = (-k)(-k+1)$, то при $k \in \mathbb{Z}$ можно считать, что $k \geq 0$, то есть $k = 0$ или $k \in \mathbb{N}$. В случае $k = 0$ спектр M_γ совпадает со спектром $T_{[0,1]}$, поэтому интерес представляет только случай $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Если* $k \in \mathbb{N}$, *то спектр оператора* $M_\gamma(0)$ *имеет асимптотик*

$$y\,\lambda_n(0) \sim \pi m - \frac{k(k-1)}{\pi(1-\theta)\theta}\, n^{-1} + O(n^{-1}),\ n \to \infty,$$

Теорема 2. *Пусть* $k \notin \mathbb{Z}$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. Если $\theta = \frac{p}{q}$, *где* $p, q \in \mathbb{N}$, *то спектр оператора* $M_\gamma(0)$ *состоит из* $2q$ *серий* $\left\{\lambda_n^{(m)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $m = \overline{1,2q}$, *имеющих асимптотику*

$$\lambda_n^{(m)} \sim \left[(2\pi n - i \ln s_m)q\right]^2 + O(1),\ n \to \infty,$$

где $\{s_m\}_1^{2q}$ *– различные корни уравнения* $s^{2q} - 2\sin(k\pi)s^{2p} - i = 0$, *ветвь логарифма выбрана так, что* $\ln z > 0$ *при* $z > 1$.

2. Если θ *иррационально, то собственные значения оператора* $M_\gamma(0)$ *за исключением конечного числа лежат в некоторой полуполосе* $\{|\mathrm{Im}\,\lambda| < a, \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$ *и не имеют асимптотику.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-01095) и Министерства образования и науки РФ (грант № 01201456408).

Библиографический список

1. Ишкин Х.К. О локализации спектра задачи с комплексным весом // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. –№ 5. – С. 49-64.

2. Ишкин Х.К. О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма-Лиувилля на кривой // Мат. заметки. – 2005. – Т. 78. – № 1. – С. 72-84.

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматлит, 2004.

4. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977.

Сведения об авторах

Ишкин Хабир Кабирович, профессор БашГУ.
E-mail: Ishkin62@mail.ru.

Семенихина Маргарита Михайловна, студент ФМиИТ БашГУ. E-mail: Margarita.234@mail.ru.

CONTENTS

Akhtyamov A.M., Mouftakhov A.V.
IDENTIFICATION OF BOUNDARY CONDITION ON ONE OF THE ENDS OF A SEGMENT 5

Akhtyamov A.M., Trooshin I.Yu.
IDENTIFICATION OF BOUNDARY CONDITIONS COEFFICIENTS FOR INFINITE STAR GRAPH 6

Ala V., Mamedov Kh.R.
ON BASIC PROPERTY OF EIGENFUNCTIONS OF ONE CLASS DISCONTINOUS STURM-LIOUVILLE OPERATOR 11

Auken V.M.
UNIVERSITY PERFORMANCE MEASUREMENT IN QUALITY ASSURANCE 12

Cerci G., Cetinkaya F.A., Mamedov Kh.R.
ON A DISCONTINUOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH RETARDED ARGUMENT 21

Çolakoğlu Havare Ö., Menken H.
ON THE p-ADIC GAMMA FUNCTION, CHANGHEE NUMBERS AND POLYNOMIALS 24

Gandarilla-Pérez C.A., Reinaldo Rodríguez-Ramos R., Lau-Alfonso L., Sabina F.
MAXWELL METHOD APPLIED TO ELASTIC COMPOSITES 25

Goktas S., Maris E.A.
ON THE SPECTRAL EXPANSIONS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A SPECTRAL PARAMETER DEPENDING ON QUADRATICALLY IN ONE BOUNDARY CONDITION 38

Kopezhanova A.N., Nursultanov E.D., Persson L.-E.
ON THE TWO-SIDED INEQUALITY FOR THE FOURIER TRANSFORM 40

MA Bin
NEW SILK ROAD ECONOMIC BELT AND SINO-RUSSIAN RELATIONS IN CENTRAL ASIA 43

Menken H., Çolakoğlu Havare Ö.
A NOTE ON THE P-ADIC GAMMA FUNCTION AND Q-CHANGHEE POLYNOMIALS 54

Nasibova N.P.
BASES OF EXPONENTS WITH A PIECEWISE LINEAR PHASE IN GENERALIZED WEIGHTED LEBESGUE SPACE 55

Mamedov Kh. R.
ON AN INVERSE PROBLEM FOR A CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS 58

Mochizuki Kiyoshi, Trooshin Igor
ON STABILITY OF INVERSE SCATTERING PROBLEM ON A LASSO-SHAPED GRAPH 60

Nursultanov E.D., Tleukhanova N.T.
INEQUALITIES OF HARDY-LITTLEWOOD TYPE IN ANISOTROPIC SPACE 63

Quliyeva A.A.
BASICITY OF THE PERTURBED SYSTEM OF EXPONENTS IN MORRY-LEBESGUE SPACE 64

Xiyan Yang, Xiaohua Lin
EFFECTS OF OUTWARD MIGRATION ON INWARD FDI: FROM SOCIAL NETWORKS TO HUMAN CAPITAL 67

Yusuf Zeren, Seyma Cetin
SOME PROPERTIES OF THE MAXIMAL VALUES OF HARMONIC FUNCTIONS IN MORREY TYPE SPACES 99

Abdullina R.I.
TEMPERATURE FIELD OF SOURCES OF HEAT AT PURIFICATION OF LIQUID IN ANISOTROPIC INHOMOGENEOUS PLAST 103

Akimov A.A., Agafonova A.A.
ON A EXISTENCE OF THE SOLUTION BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR EQUATION OF OSCILLATION BEAM 108

Alexandrov P.N., Vardazaryan N.G., Sinitskaya E.V., Suleymanov R.V.
THE RELEVANCE OF THE RICHARDSON'S MODEL IN THE TODAY'S CONDITIONS 110

Aliev A.R., Elbably A.L.
ON THE CORRECT SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ONE CLASS OF OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER 117

Aralbaeva A.R., Karamova A.I., Mustafina S.A.
PROGRAM COMPLEX FOR MATHEMATICAL MODELING OF PROCESSES IN THE CASCADE OF REACTORS 121

Arslanova R.R., Abdiusheva S.R.
STATISTICAL ANALYSIS OF MORBIDITY OF THE POPULATION TAKING INTO ACCOUNT VARIOUS FACTORS 126

Akhmetova O.V., Galiev F.F.
NUMERICAL INVESTIGATION OF PRESSURE FIELD IN SOUTH-YUGAN DEPOSIT FACILITY AT WATER PUMPING.. 132

Ahmetyanova A.I., Ismagilova A.S., Khursan S.L.
CONSTRUCTION OF HOMODESMIC REACTIONS ON THE EXAMPLE OF CYCLOPENTONE 137

Akhtyamov A.M.
TO THE SOLUTION OF A PROBLEM OF JOHN LOCKER 142

Akhtyamov A.M, Garipova L.Kh.
ECONOMIC LAWS AS MATHEMATICAL STATEMENTS. THEOREMS, EXAMPLES AND COUNTEREXAMPLES. 145

Akhtyamov A.M., Safina G.F.
THE EFFECT OF ELASTIC FIXING OF HOLLOW TUBE AT THE FREQUENCY OF THE ASYMMETRIC VIBRATIONS..... 148

Akhtyamov A.M., Khusnutdinova G.A.
DETERMINING THE TYPE AND PARAMETERS OF A BEAM DEFECT BY ITS FIVE NATURAL FREQUENCIES OF FLEXURAL VIBRATIONS 153

Baranova M.A., Galiaskarova G.R.
APPLICATION OF NEURAL NETWORKS FOR FORECASTING OF EXCHANGE RATE 158

Bashmakov R.A., Lobova Y.Y., Khramov A.E.
DISCRETE-HARMONIC FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS 161

Bashmakov R.A., Makhota A.A., Dinislamova G.I.
THE POMPEIU PROBLEM AND INTEGRAL TRANSFORMATIONS OF RADIAL FUNCTIONS 164

Bashmakov R.A., Makhota A.A., Ibragimova A.A.
ON THE COMPLETENESS OF SYSTEMS OF EXPONENTIALS IN A CONVEX DOMAIN 167

Bashmakov R.A., Makhota A.A., Islamalova N.A.
ABOUT FUNCTIONS OF TYPE OF SINUS AND COMPLETE SYSTEMS EXPONENT 170

Belyaeva M.B.
ANALYSIS AND FORECASTING OF FINANCIAL FLOWS OF ENTERPRISES ON THE BASIS OF IMITATION MODELS ... 174

Bikkulova N.N., Akmanova G.R., Nigmatullina G.R., Kurbangulov A.R., Bikkulova L.V.
CRISTAL STRUCTURE AND ELECTROPHYSICAL PROPERTIES OF THE SUPERIONIC CONDUCTOR CU1,85TE 185

Bilalov B.T.
STATISTICAL CONVERGENCE, ITS GENERALIZATIONS, CONTINUOUS VARIANT AND APPLICATIONS TO FOURIER TRANSFORMATIONS 190

Biryukov A.N., Alexeeva N.G.
THE GENERALIZED CRITERION OF THE QUALITY OF NEURAL NETWORK MODELS FOR ILL-POSED OPERATOR

TASKS BY THE METHOD OF TIKHONOV REGULARIZATION 194

Biryukov A.N., Alexeeva N.G.
MANAGEMENT OF GENERALIZED CRITERION OF THE QUALITY OF NEURAL NETWORK MODELS BASED ON BAYESIAN APPROACH 199

Blyumin S.L.
GRAPHS, HYPERGRAPHS, METAGRAPHS, ASSOCIATED WITH 2D-SYSTEMS 204

Borisov D.I.
ON A SMALL PERIODIC PERTURBATION OF A QUADRATIC PT-SYMMETRIC OPERATOR PENCIL 209

Bulanov AS, Hasanova S.L.
DEVELOPMENT OF THE NETWORK RESOURCE OF THE PROGRAM SUPPORT OF THE TRAINING PROCESS OF THE MIIT FACULTY SF BASHGU 211

Burenkov V.I., Chigambayeva D.K., Nursultanov E.D.
BOUNDEDNESS OF SOME CLASSICAL OPERATORS ON MORREY-TYPE SPACES 216

Vagapov V.Z.
CRITERION OF UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE EQUATION OF THE MIXED TYPE WITH TWO LINES OF DEGENERATION IN THE SEMI-STRIP 219

Viktorov S.V.
METHOD OF PARALLEL CALCULATION OF THE TASK ABOUT THE FIELD DIRECT ELECTRIC CURRENT IN TO THE AXISYMMETRIC ENVIRONMENT 224

Viktorov S.V., Ibragimova A.R.
MATHEMATICAL MODEL OF THE FIELD OF THE DOT SOURCE IN THE ISOTROPIC ENVIRONMENT WITH CYLINDRICAL INCLUSION 230

Viktorova Yu.V., Viktorov S.V.
INTERACTIVE ELECTRONIC TEXTBOOK AS MEANS OF INCREASE IN LEARNING EFFICIENCY TO MATHEMATICS OF PUPILS OF THE 9TH CLASSES 235

Viktorova Yu.V., Viktorov S.V.
ELECTRONIC EDUCATIONAL AND METHODICAL COMPLEX AS THE TUTORIAL TO MATHEMATICS IN THE 9TH CLASS 240

Gafarova E.A., Mishenev A.I.
ECONOMETRIC MODELING OF HOUSEHOLD INCOME 246

Gizzatova E.R., Spivak S.I.
ABOUT MODEL OF MONOMER CONVERSION IN RADICAL POLYMERIZATION PROCESSES OF DIENE..... 252

Gimaltdinova A.A.
THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION WITH THE OPERATOR OF LAVRENTIEV-BICADZE WITH TWO LINES OF TYPE CHANGE IN THE RECTANGULAR AREA 256

Gimaltdinov I.K., Kildibaeva S.R., Kildibaeva G.R.
FEATURES OF FLOW SIMULATION IN A SUBMERGED JET SUBJECT TO CONDENSATION..... 260

Gnatenko Y.A., Myrzabaev T.R.
THE SEARCH FOR THE OPTIMAL COOLANT TEMPERATURE IN THE REACTOR OF IDEAL MIXING OF PERIODIC ACTION 266

Gorbatkov S.A., Polupanov D.V.
APPLICATION OF ITERA-APPROXIMATION METHOD IN ECONOMIC AND ECOLOGICAL SYSTEMS 270

Gribova O.V., Labakhua L.R., Merkuryev I.V.
DEVELOPMENT OF INTEGRATED NAVIGATION AND MOTION CONTROL OF A MOBILE ROBOT 275

Grigoriev I.V., Mustafina S.A.
MODELING OF THE PROCESS OF CO-POLYMERIZATION OF A-METHYLSTYRENE WITH MALEIC ANHYDRIDE 281

Huseynli A.A., Selim Yavuz
FUNCTIONAL SPACES $L_{p;r}$ AND CAUCHY SINGULAR INTEGRAL 288

Huseynov H.M., Dostuyev F.Z.
RECOVERY OF STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH DISCONTINUITY ONDITIONS WITH RESPECT TO SPECTRAL DATA..... 291

Gushchina V.A.
EXISTENCE OF THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF DESIN FOR THE DEGENERACY EQUATION OF THE MIXED TYPE..... 296

Devitsyn A.O., Karamova A.I.
DEVELOPMENT OF AN APPLICATION ON MOBILE PLATFORM 1C: ENTERPRISE 8.3 301

Dmitriev VL, Karimov R.Kh., Salavatova S.S.
CHARACTERISTIC OF THE STATE OF ELECTRONIC EDUCATION IN THE REPUBLIC OF BASHKORTOSTAN 304

Dmitriev A.N., Shtennikov D.G.
MODERN METHODS AND ALGORITHMS FOR FORMING SPEECH FOR CHATTERBOTS..... 3109

Duishenaliev T.B., KhromatovV.E.
MODELING OF FINITE DEFORMATIONS BY A LINEAR CAUCHY TENSOR 313

Efimov A.M., Koledina K.F., Koledin S.N.
DETERMINATION OF OPTIMUM CONDITIONS OF CONDUCTING THE CATALYTIC REACTION OF INTERACTION OF ALCOHOLS WITH DIMETHYL CIRCONATE..... 319

Zhapsarbayeva L.K., Kanguzhin B.E., Konyrkulzhayeva M.N.
THE CONVOLUTION REPRESENTATION OF THE RESOLVENT OF DIFFERENTIAL OPERATORS ON THE GRAPHS..... 324

Zhiber A.V., Toshmurodova D.R.
CHARACTERISTIC LIE RINGS OF HYPERBOLIC SYSTEMS OF EQUATIONS GENERATED BY THE PAINLEVÉ II EQUATION 329

Zainullin R.R.
ON ONE SPECTRAL PROBLEM FOR THE FOURTH ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR 333

Zaynullov A.R.
INVERSE PROBLEM OF FINDING THE TIME-DEPENDENDING FACTORS OF THE RIGHT PART OF THE TELEGRAPH EQUATION 336

Zaitseva N.V.
KELDYSH TYPE PROBLEM FOR B- HYPERBOLIC EQUATION WITH INTEGRAL BOUNDARY VALUE CONDITION OF THE SECOND KIND 340

Zaripov D.M.
NONLINEAR OSCILLATIONS OF PIPELINES 345

Zakharov I.V., Mustafina S.A.
APPLICATION OF A NEUROET NETWORK APPROACH AT THE SIMULATION OF CHEMICAL PROCESSES 354

Ivanov E.Yu., Hasanova S.L.
DEVELOPMENT OF AN APPENDIX OF INTERACTIVE CONSTRUCTION OF A TABLE 356

Ivaschenko D.S., Musin A.A., Sakhibgareev E.E.
USING CAPACITOR-RESISTANCE MODEL IN AUTOMATED INTERWELL CONNECTIVITY PROBLEM 361

Igoshin D.Ye., Mostovoy P.Ya., Belozerov B.V., Khromova N.A.
STATISTICAL APPROACH TO THE PERMEABILITY D ETERMINATION OF POROUS MEDIA ON THE BASIS OF PERIODICAL STRUCTURES 366

Ikramov R.D., Mustafina S.A.
NUMERICAL INVESTIGATION OF THE HETEROGENEOUS OSCILLATING REACTION OF OXIDATION OF

MOLECULAR HYDROGEN ON THE SURFACE OF THE CATALYST 373

Imangulova G.S., Karamova A.I.
APPLICATION DEVELOPMENT FOR SOLVING OPTIMIZATION PROBLEM BASED ON THE MODEL OF MARKOWITZ 378

Isaev K.P., Lutsenko A.V., Yulmukhametov R.S.
ON RIESZ BASES OF NORMALIZED EXPONENTIALS IN WEAK WEIGHTED SPACES ON SEGMENT 383

Ismagilova A.S., Pyzhyanova L.R., Spivak S.I.
DEVELOPMENT OF TOOLS AND METHODS FOR DESIGNING SOFTWARE IN PROBLEMS OF MATHEMATICAL MODELING OF CHEMICAL PROCESSES .. 387

Ishkin Kh.K.
THE ANALOGUE OF AMBARZUMIAN THEOREM FOR NON-SELFADJOINT ANHARMONIC OSCILLATOR 392

Ishkin Kh.K., Ishnazarova V.T.
EIGENVALUE ASYMPTOTICS FOR THE STURM–LIOUVILLE OPERATOR WITH A COMPLEX-VALUED RAPIDLY INCREASING POTENTIAL 396

Ishkin Kh.K., Semenikhina M.
ON THE SPECTRAL ASYMPTOTICS OF THE OPERATOR STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH REGULAR REGULAR SINGULAR POINT 399

Научное издание

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы
Международной научно-практической конференции

Часть I

18-20 мая 2017 г.
г. Уфа

Ответственный редактор – доктор физико-математических наук, профессор **Светлана Анатольевна Мустафина** (Стерлитамакский филиал БашГУ)

Начальник ИИЦ *О.А. Шарипова*
Компьютерный набор, вёрстка *И.В. Григорьев, С.В. Викторов, Л.В. Леонтьева*

Печатается в авторской редакции.
Авторы несут ответственность за достоверность материалов, изложенных в сборнике

Сдано в набор 02.05.2017 г.
Подписано в свет 17.05.2017 г.
Бумага офсетная.
Печать оперативная.
Тираж 300 (1-й вып. – 150) экз.
Заказ № 167/17.

Подписано в печать 10.05.2017 г.
Формат $60x84_{1/16}$
Уч.-изд. л. 23,7.
Усл. печ. л. 23,9.
Гарнитура «Times».

ISBN 978-5-86111-585-8

Информационно-издательский центр
Стерлитамакского филиала БашГУ:
453103, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49